情報処理 2 第 11 回

まとめ

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

2011 年 7 月 20 日

この授業用の WWW ページは http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2011/

(リンク切れを直すために組版しなおしましたが、内容は 2011/7/20 のままです。)

1 連絡事項

- 今日は早目に解説を済ませて、後はレポート作成タイムとします。レポート作成が済んだ人は退出して構いません。
- 大分間が空いてしまいましたが、課題 6B, 課題 7 の解説をします。
  Mathematica の課題が残っている人はそちらをやっていて構いません (その気になれば後で読めるでしょうから)。
- Mathematica の課題の解説については、今週末の締切が済み次第、この WWW サイトに掲載します (掲載期間 2011/7/23〜9/20)。

2 課題 6B 解説

課題 6B[1]

「円周率計算の歴史」[2] で書いたように、円周率 π の効率的な計算法には、(i) $\arctan = \tan^{-1}$ のような逆三角関数の Taylor 展開を利用する方法, (ii) AGM 公式を利用する方法, (iii) ラマヌジャンの公式 (またはその系列) を利用する方法, などがある。

ここでは、主に単純な (i) の方法を解説する。

[1] http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2011/jouhousyori2-2011-06/node9.html
[2] http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2011/jouhousyori2-2011-06/node10.html

2.1 arctan の Taylor 展開を用いて計算する

既に言ってあるように、http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2011/jouhousyori2-2011-06/node8.html で紹介した piarctan.BAS が叩き台になる。これは、与えられた x, N に対して、級数

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \tag{1}$$

の第 N 部分和 S_N を計算するプログラムである。

piarctan.BAS (再掲)

```
REM piarctan.BAS --- マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数でπを計算
REM arctan x の級数を第 n 項まで計算
INPUT X
INPUT N
F=-X*X
T=X
S=0
FOR J=1 TO N
  A=T/(2*J-1)
  S=S+A
  T=F*T
NEXT J
PRINT "arctan(x)≒";S
PRINT "その4倍";4*S
REM 組込み定数 PI との差を計算してみる
PRINT USING "πとの差=-%.###^^^^^^";4*S-PI
END
```

$x = 1$ の場合の

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

は有名であるが、収束は非常に遅い。実際、実験で見た通り、

$$\pi - 4S_N \fallingdotseq \frac{1}{N}$$

が成り立つ (1 億 $(= 10^8)$ 項足して、誤差 10^{-8} — 10 桁も合わない)。どんなにコンピューターが速くても、100 桁の精度の値を計算するのは無理である。

しかし、これは x の値として、収束ギリギリの $x = 1$ を代入するからである (実際、(1) の収束半径は 1 である, 冪級数は収束円の内部では必ず収束するが円周上の点で収束するかどうかは case by case で収束しても「遅い」場合が多い)。$|x| < 1$ なる x に対しては、(1) の収束はぐっと速くなる。

一番簡単なのは、高校生も知っている $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ に基づく、$\pi = 6\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を用いることである。

INPUT X を X=1/SQR(3) に変え、4 をかけるところを 6 をかけるように変えたものが次のプログラムである (OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH にも変えた)。

kadai6b1.BAS

```
REM kadai6b1.BAS --- マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数でπを計算
REM arctan(1/√3) の級数を第N項まで計算
OPTION ARITHMETIC decimal_high
INPUT N
LET X=1/SQR(3)
LET F=-X*X
LET T=X
LET S=0
FOR J=1 TO N
   LET A=T/(2*J-1)
   LET S=S+A
   LET T=F*T
NEXT J
PRINT "6*arctan(x)≒";6*S
REM 組込み定数 PI との差を計算してみる
PRINT USING "πとの差=-%.###^^^^^^":6*S-PI
END
```

最後に PI と比較しているのは、カンニングであるが (苦笑)、その結果は次のようになり、$N = 210$ くらいで 100 桁精度を実現しているようである。

kadai6b1.TXT ($N = 210$ の場合)

```
? 210
6*arctan(x)≒ 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640
πとの差=-3.939E-0103
```

N が増加するにつれて、精度がどのように上がっていくか見るために、INPUT N をやめて、全体を

```
FOR N=10 TO 210 STEP 10
...
NEXT N
```

と FOR NEXT ループにして、次の表 1 の結果を得る。

誤差が大体等比数列的に (N に関して指数関数的に?) 0 に収束している様子が分かる 本当はこういうのはグラフにするのが良い。ここでは gnuplot (1 年生のときに習ったはず) を使ってみたが、もちろん十進 BASIC で描くのも簡単である。

余談 2.1 (少し数学) この級数は交代級数なので、和と部分和の差は、次の項よりも小さくな

N	誤差
10	-2.143×10^{-6}
20	-1.839×10^{-11}
30	-2.085×10^{-16}
40	-2.654×10^{-21}
50	-3.601×10^{-26}
60	-5.086×10^{-31}
70	-7.387×10^{-36}
80	-1.095×10^{-40}
90	-1.649×10^{-45}
100	-2.514×10^{-50}
110	-3.872×10^{-55}
120	-6.011×10^{-60}
130	-9.399×10^{-65}
140	-1.478×10^{-69}
150	-2.337×10^{-74}
160	-3.710×10^{-79}
170	-5.915×10^{-84}
180	-9.461×10^{-89}
190	-1.518×10^{-93}
200	-2.442×10^{-98}
210	-3.939×10^{-103}

図 1: 項数 N と誤差

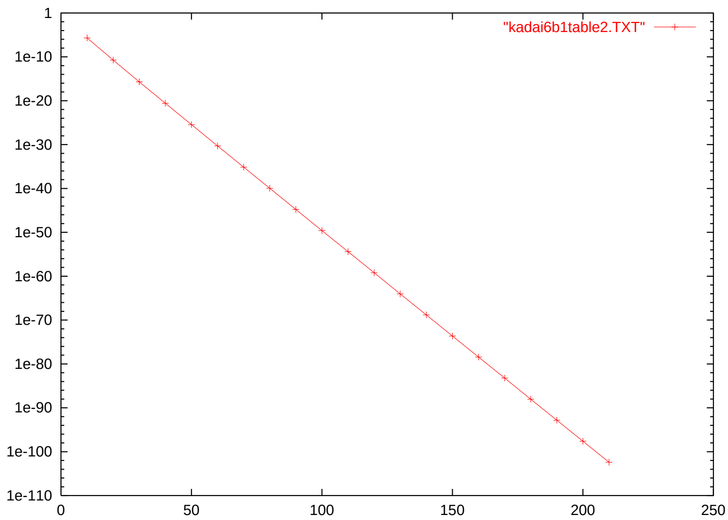

図 2: 項数 N と誤差 (縦軸対数目盛)

ることが分かる[3]。従って、誤差が等比数列的に小さくなることが分かる。もう少し考えると、上の級数は $N = 210$ 程度で、誤差が 10^{-100} 位になることも分かる (なぜ?)。 ■

それでは、要求されていた結果を求めるプログラムを作ろう。課題2Bでやったように、FOR NEXT で N を大きくして行って、部分和を計算するプログラムにする。

kadai6b2.BAS

```
REM kadai6b2.BAS --- マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数でπを計算
REM arctan(1/√3) の級数を 10,20,...,250 項まで計算
REM 結果は小数点以下 110 位まで表示
OPTION ARITHMETIC decimal_high
LET FMT$="N=### -%."&REPEAT$("#",110)
LET N=250
LET X=1/SQR(3)
LET F=-X*X
LET T=X
LET S=0
FOR J=1 TO N
   LET A=T/(2*J-1)
   LET S=S+A
   LET T=F*T
   IF MOD(J , 10) =0 THEN
      PRINT USING fmt$:J,6*S
   END IF
NEXT J
REM 組込み定数 PI との差を計算してみる
PRINT USING "πとの差=-%.###^^^^^^":PI-6*S
END
```

結果は次のようになる。

```
N= 10  3.14159051093808009964275422994425504368823543729459863385301608264097243139275244243408049537664837144194195965
N= 20  3.14159265357140338177371056457791845749708370902558800062450336039110974863967354187227900363909324495379551167
N= 30  3.14159265358979302993126907675698512128890364163387594078160677223250316907504141910094384327780556430672531665
N= 40  3.14159265358979323845998904545815723164682333580898559851810755021711576515774234507828600074005410050567590231
N= 50  3.14159265358979323846264334727215223712766242383933328994947074253583407491260142245980404128750279799354137185
N= 60  3.14159265358979323846264338327899429478611788675967126248193958028428440424653148715465478961463146251880103922
N= 70  3.14159265358979323846264338327950287681011408881114209344980232821142119403271477392517560945005206755050370174
N= 80  3.14159265358979323846264338327950288419705988682105507083891588023987499387955321296887381276928532730590072263
N= 90  3.14159265358979323846264338327950288419716939772598750958858556364736336671762754275139106652717651497248200692
N=100  3.14159265358979323846264338327950288419716939937508067873446993355312916323675359893283010326258393751533470850
N=110  3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582058777350231913204053479937154593911517289127500338915 84
N=120  3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097493858083854337957828522717360102517299756190923350247
N=130  3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459221382757184428319165349115190289161510116917782
N=140  3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781492806566013451682112808110943615477604646
N=150  3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640626284131806763014633707611386690905481
N=160  3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620862758871391779973144580812870063
N=170  3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862212031675396342638517754282
N=180  3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803473073620684479093638320
```

[3] $a_1 > a > 2 > \cdots \geq 0$, $a_n \downarrow 0$ なる $\{a_n\}$ を用いて、$s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ と表される級数を交代級数と言う。これは必ず収束し、$|s - s_n| \leq a_{n+1}$ という評価が簡単に得られる。