常微分方程式の初期値問題 (2)　定数係数線形常微分方程式

桂田 祐史

1992 年 5 月 27 日

前回は数値解法（Euler 法、 Runge-Kutta 法）の紹介をしましたが、今回はそれを 2 次元の定数係数線形常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \tag{1}$$

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{2}$$

を解くのに応用してみましょう[1]。ただし $\vec{x} = \vec{x}(t)$ は 2 次元ベクトル値関数

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

で、 A は 2 次の実正方行列、 $\vec{x}_0$ は $\mathbf{R}^2$ の要素です:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

もちろん、 A, $\vec{x}_0$ は既知量で、 $\vec{x} = \vec{x}(t)$ は未知量（未知関数）となっています。前回の記号と対応させると $f(t, \vec{x}) = A\vec{x}$ となっているわけです。方程式 (1) を成分で書けば

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

となります。

注意 1: この問題は、計算機を使わなくても線形代数を用いて解くことが出来ます。既に一年次の微分方程式で習っているかもしれませんし、そうでない場合も三年次の常微分方程式の講義で学ぶことになるでしょう。

注意 2: 高校までの数学で、最も簡単で基本的な関数は正比例の関数 $x \mapsto ax$ (a は定数) でしょう。ここでの線形写像 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ (A は 2 次の正方行列) は、正比例の関数の一般化と考えられ、2 次元の世界で最も基本的な写像と言えるでしょう。

注意 3: （物理的イメージがあった方が分かりやすい、という人のために）いわゆる単振動の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (\omega \text{ は正定数})$$

[1] 今回は x がベクトルであることを強調するために矢印 $\vec{}$ をつけて $\vec{x}$ と書きます。

は $y = dx/dt$, $\vec{x} = {}^t(x, y)$ と置くことにより (1) の形に帰着されます。ここで

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

です。同じ置き換えで、速度に比例する抵抗力がある場合の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (\omega, \gamma \text{ は正定数})$$

も (1) の形に帰着されます。この場合は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}$$

です。

初期値問題 (1),(2) の解は平面内での点の運動を表わしていると考えることが出来ます。初期値 $\vec{x}_0$ を色々と変えて、それに対応する解 $\vec{x}(t)$ の軌跡（解軌道と呼びます）を描いてみましょう。この解軌道を考える時の空間（ここでは平面 $\mathbf{R}^2$）を相空間 (phase space)[2]と呼びます。

例題 5-1 初期値 $\vec{x}_0$ を色々と変えて、それに対応する解軌道を描け。

いつものように getsample コマンドでサンプルプログラムをコピーした後に、 f77x でコンパイルして、実行して下さい。

```
waltz11% getsample
waltz11% f77x reidai5-1.f
waltz11% reidai5-1
```

最初に行列 A の成分 a, b, c, d を尋ねてきますので、自分が調べたいと思う行列を選んで入力します。

```
a,b,c,d=
0 1 -1 -1
```

するとウィンドウが開かれた後に、次のようなメニューが表示されます。

```
 したいことを番号で選んで下さい。
  -1: メニュー終了, 0: 初期値のキーボード入力, 1: 初期値のマウス入力,
    2: 刻み幅, 追跡時間変更 (現在 h= 0.0100,T=10.0000)
```

この意味は希望することを選ぶのに、-1 から 2 までの整数を入力しなさい、ということです。'0' を入力すると、キーボードから数値で初期条件 $x0, y0$ を入力することになります。

```
0                                          ← 0 番を選択する。
初期値 x0,y0=                              → x0,y0 の入力の催促。
0.5 0.5                                    ← 0.5 0.5 を入力。
```

また '1' を入力した場合は、マウスで初期値を指定することが出来ます。 fplot のウィンドウの中の初期値としたい点のところまでマウス・カーソルを移動して、マウスの左ボタンをクリックします。

[2] "phase space" は数学以外の本では「位相空間」と訳されることが多いですが、数学では「相空間」という訳語を用います。これは「位相空間」という言葉は数学では "topological space" の訳語に使われるからです。

```
マウスの左ボタンで初期値を指定して下さい（右ボタンで中止）。
(x0,y0)=-0.724609  -0.365234                → マウスで指定した点の座標
マウスを使って初期値を入力して下さい。          → 次の入力を催促
```

マウスを使っての初期値の入力を止めるには、マウスの右ボタンを押します。するとメニューまで戻るはずです。

メニューを抜けるには、メニューで '-1' を入力します。その後マウスを fplot ウィンドウに持っていき、ボタンをクリックすると `reidai5-1` を終了することが出来ます。

ここでは初期値のサンプル・データ `reidai5-1.data` も用意してあります（内容は注意 3 の二つ目の方程式で $\omega = \gamma = 1$ の場合の実験です）。これを試すには

```
waltz11% cat reidai5-1.data | reidai5-1
```

とします。

注意 4: このサンプルの例では、解軌道は後で述べるように、内向きの対数螺旋（らせん）になります。時刻 t が大きくなると点 $\vec{x}(t)$ は急速に原点に近付くのですが、到達はしません。画面では見分けがつきませんので、誤解しないように注意して下さい。

さて、今日はこの `redai5-1` で色々（行列を替えて）実験してもらうのが目的なのですが、まったく闇雲にやっても、なかなかうまく行かない（重要な現象に遭遇できない）でしょうから、以下少し数学的背景を説明します。

行列 A を変えると、解軌道の作るパターンが変わるのですが、それらは以下のように比較的小数のケースに分類されます。どのケースに属するか調べるには、行列 A の固有値に注目します。A の固有値とは A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

の根 λ_1, λ_2 のことでした。

Case I. A の固有値が相異なる 2 実数である場合

固有値がいずれも 0 でない場合は、原点が唯一の平衡点になっていますが、詳しく分類すると

1. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$（ともに正）ならば湧出点（不安定結節点）
2. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$（ともに負）ならば沈点（安定結節点）
3. $\lambda_1 \lambda_2 < 0$（異符号）ならば鞍状点

となります（湧出点、沈点、鞍状点の定義はここには書きません。自分で試してみて納得してください）。

4. λ_1, λ_2 のいずれか一方が 0 ならば、ある原点を通る一つの直線上の点が平衡点の全体となります。

Case II. A の固有値が 2 重根で、A が対角化可能である場合

これは結局 $A = \lambda I$ と書けるということで (λ は固有値)、単純なケースです。$\lambda \neq 0$ である限り、原点は唯一の平衡点となり、$\lambda > 0$ ならば湧出点、$\lambda < 0$ ならば沈点です。

Case III. A の固有値が 2 重根で、A が対角化不能である場合

例えば $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ のような場合です。$\lambda = 0$ であれば平面上のすべての点が平衡点、$\lambda \neq 0$ であれば原点を通るある一つの直線上の点が平衡点全体となります。原点は $\lambda > 0$ であれば湧出点、$\lambda < 0$ であれば沈点です。

Case IV. A の固有値が二つの相異なる虚数である場合

この場合、固有値は $\mu \pm i\nu(\mu, \nu$ は実数) と書けます。平衡点は原点だけです。

1. $\mu > 0$ であれば、解軌道は外向きの対数螺旋になります。こういう場合「原点は不安定渦状点である」と言います。

2. $\mu < 0$ であれば、解軌道は内向きの対数螺旋になります。こういう場合「原点は安定渦状点である」と言います。

3. $\mu = 0$ であれば、解軌道は楕円になります（特別な場合として円を含みます）。こういう場合「原点は渦心点（または中心点）である」と言います。

問題 5-1 様々な場合にについて、自分で適当な行列 A を探して解軌道を描いてみなさい。

（自分で探すのがおっくうという人は、以下の行列を試してみて下さい。どの Case に相当しますか？）

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{11}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{9}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 5-2 `reidai5-1` で Runge-Kutta 法を用いているところを Euler 法に書き変えなさい。いくつかの行列（特に Case IV-3 に属するもの）に対する問題 (1),(2) を 2 つのプログラムで解き比べて見なさい。

問題 5-3 注意 3 であげた 2 つの微分方程式は上の分類でどこに属するか？また解軌道を見て、その解のどんな性質が分かるか？

問題 5-4 reidai5-1 で、初期値をキーボードから数値で入力する方法とマウスで入力する方法の長所、短所を論じなさい。