重積分の説明の補足

桂田 祐史

2007 年 11 月 15 日

1　Fubini の定理 (続き) 三重積分の場合

$\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 上の次の積分を Fubini の定理を使って計算することを考える。次の (1), (2) は消化和泉である。

$$I := \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(1) (3 次元の縦線集合上の Fubini の定理) Ω の xy 平面への射影 $D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \exists z \in \mathbf{R} \text{ s.t. } (x,y,z) \in \Omega\}$ 上の関数 $\varphi_1\colon D \to \mathbf{R}$, $\varphi_2\colon D \to \mathbf{R}$ で、$\varphi_1 \le \varphi_2$ (on D) と

$$\Omega = \{(x,y,z); (x,y) \in D, \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$$

を満たすものがあるならば、

$$I = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

(2) (「体積は断面積の積分」の一般化、軸に沿って断面での積分を積分)

$$a := \inf_{(x,y,z)\in\Omega} x, \quad b := \sup_{(x,y,z)\in\Omega} x.$$

さらに $x' \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\Omega_{x'} := \{(y,z) \in \mathbf{R}^2; (x',y,z) \in \Omega\} \quad (\text{平面 } x = x' \text{ での断面の } yz \text{ 平面への射影})$$

とおくとき、

$$I = \int_a^b \left(\iint_{\Omega_x} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx.$$

例えば $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ とするとき、(1) に従うと

$$I = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy, \quad D := \{(x,y); x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(2) に従うと

$$I = \int_{-R}^{R} \left(\iint_{\Omega_x} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx, \quad \Omega_x := \{(y,z); y^2+z^2 \le R^2-x^2\}.$$

例 1.1 $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2 \le 1, x \le z \le 2x+1\}$ の体積を求めよ。
(解) これは方法 (1) を使うのに向いている。

$$D := \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}, \quad \varphi_1(x,y) := x, \quad \varphi_2(x,y) := 2x+1$$

とおくと、

$$\varphi_1 \le \varphi_2 \quad (\text{on } D), \quad \Omega = \{(x,y,z); (x,y) \in D,\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\mu_3(\Omega) &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_x^{2x+1} dz\right) dx\,dy = \iint_D (x+1)dx\,dy \\ &= \iint_{0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi} (r\cos\theta+1)\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 r\,dr = \pi.\blacksquare\end{aligned}$$

例 1.2 $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le a\}$ の体積を求めよ。
(解) これは方法 (2) を使うのに向いている。任意の $z \in [0,a]$ に対して

$$\Omega_z := \{(x,y); (x,y,z) \in \Omega\} = \{(x,y); x^2+y^2 \le z^2\}$$

であるから、

$$\mu_3(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_0^a \left(\iint_{\Omega_z} dx\,dy\right) dz = \int_0^a \mu_2(\Omega_z)\,dz = \int_0^a \pi z^2\,dz = \frac{\pi a^3}{3}.\blacksquare$$

2 不等式で定義されていない立体図形上の積分

$\Omega \subset \mathbf{R}^3$ を不等式による条件で与えるのでなく、「○○と△△で囲まれた」,「○○と△△で切り取られた」のような説明で指定する場合もある (特に「立体図形の体積を求めよ」という問題などでは頻出)。その場合は、簡単な図を書いたりして、Ω を定義する条件を不等式に翻訳することが必要になる場合が多い。付録 **B.1** の例 **B.1.1** や、演習問題 **6**, **9**, **11** を見よ。

3 付録B「重積分の応用」への補足 — 密度と積分

イントロダクションで説明したように、積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ は、何かあるものが Ω 内に密度 f で分布しているとき、Ω 全体での総量を表す。

例えば、$\mathbf{R}^3$ 内の領域 Ω を占める物体があり、点 (x,y,z) における密度 (単位体積当りの質量) $\rho(x,y,z)$ が与えられているとする。このとき、この物体の総質量は

$$M = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

である。

注意: 「密度」は狭義には、単位体積当りの質量を意味するが、広義には、ある量が単位体積・単位面積などに分布する割合を意味する。