多変数の微分積分学 2

問 8,9 解説

桂田 祐史

2007 年 11 月 29 日 (出題は 20 日, 27 日)

問題 8. 以下の広義積分を計算せよ。(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ (4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R x^{-2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}(1-R^{-1}) = 1.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2x^{1/2}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}2(1-\varepsilon^{1/2}) = 2.$

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\log|x|\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}(\log R - 0) = \infty.$

(4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}(\tan^{-1}R - \tan^{-1}1) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

問題 9. 以下の広義積分を計算せよ。$\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

解答 $n\in\mathbf{N}$ に対して、$K_n := \{(x,y); x^2+y^2\le n^2\}$ とおくと、K_n は $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測なコンパクト集合で、

$$K_1\subset K_2\subset\cdots,\quad \bigcup_{n=1}^\infty K_n = \mathbf{R}^2.$$

また $\mathbf{R}^n$ の任意のコンパクト集合 K に対して、十分大きな n を取ると、$K\subset K_n$ となる ($\because K$ はコンパクトだから有界なので)。ゆえに $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $\mathbf{R}^2$ のコンパクト近似列である。

被積分関数 $f(x,y) := e^{-x^2-y^2}$ は $\mathbf{R}^2$ で連続であり、$f>0$ であるから、1 つの近似列 $\{K_n\}$ だけで調べれば十分で、

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} e^{-x^2-y^2}\,dx.$$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ($r\ge 0,\ \theta\in[0,2\pi]$) とするとき、$K_n$ に対応するのは $D_n := \{(r,\theta); 0\le r\le n,\ \theta\in[0,2\pi]\}$. $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ であるから、

$$\iint_{K_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_{D_n} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^n\left(\int_0^{2\pi} re^{-r^2}\,d\theta\right)dr = 2\pi\int_0^n re^{-r^2}\,dr$$
$$= 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^n = -\pi\left(e^{-n^2}-e^0\right) = \pi\left(1-e^{-n^2}\right).$$

ゆえに

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\pi(1-e^{-n^2}) = \pi.\blacksquare$$