

多変数の微分積分学 2

問 8 解説

桂田 祐史

2007年11月20日, 11月27日

問題. 以下の広義積分を計算せよ. (1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ (2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (3) $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ (4) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

(1)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R x^{-2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [-x^{-1}]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - R^{-1}) = 1.$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [2x^{1/2}]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} 2(1 - \varepsilon^{1/2}) = 2.$$

(3)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [\log |x|]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (\log R - 0) = \infty.$$

(4)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [\tan^{-1} x]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (\tan^{-1} R - \tan^{-1} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$