多変数の微分積分学 2

問 7

桂田 祐史

2007 年 11 月 15 日, 11 月 20 日

問題. $z=x^2+y^2$ と $z=1-x^2-y^2$ で囲まれた範囲 Ω の体積を求めよ。

解答. ともに $z=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ の形をしているので、回転面である。$y=0$ での切口 $z=x^2$, $z=1-x^2$ を描いてみると、

$$\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\}$$

であることが分かる。これは縦線集合である。すなわち

$$D:=\{(x,y);x^2+y^2\le 1-(x^2+y^2)\}=\left\{(x,y);x^2+y^2\le\frac{1}{2}\right\}.$$

とおくとき、D で $x^2+y^2\le 1-(x^2+y^2)$ であり、

$$\Omega=\{(x,y,z);(x,y)\in D,\ x^2+y^2\le z\le 1-(x^2+y^2)\}.$$

ゆえに Ω の体積は

$$\begin{aligned}
\mu_3(\Omega)&=\iiint_\Omega dx\,dy\,dz=\iint_D\left(\int_{x^2+y^2}^{1-(x^2+y^2)}dz\right)dx\,dy\\
&=\iint_D\left[1-2(x^2+y^2)\right]dx\,dy=\iint_{\substack{0\le r\le 1/\sqrt{2}\\ 0\le\theta\le 2\pi}}(1-2r^2)\cdot r\;dr\,d\theta\\
&=2\pi\int_0^{1/\sqrt{2}}(r-2r^3)dr=2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{2}\right]_0^1=2\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)=2\pi\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.\blacksquare
\end{aligned}$$