多変数の微分積分学 2

問 6 解説

桂田 祐史

2007 年 11 月 6 日,11 月 8 日

1. a, b を正定数とする。$\Omega = \left\{(x,y); \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 \le 1\right\}$ とおくとき、$I = \displaystyle\iint_\Omega x^2\,dx\,dy$ を求めよ。

2. $\Omega = \{(x,y); 0 \le x+y \le 2,\ 1 \le x-y \le 3\}$ とするとき、$J = \displaystyle\iint_\Omega \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$ を求めよ。

1 の解答　$x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ $(r \ge 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$ と変数変換する。

$$(x,y) \in \Omega \quad\Longleftrightarrow\quad (x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1 \quad\Longleftrightarrow\quad (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta^2) \le 1 \quad\Longleftrightarrow\quad r \le 1.$$

(もう少していねいにやると、$r > 0$ を 1 つ固定したとき、$\{(ar\cos\theta, br\sin\theta); \theta \in [0,2\pi)\}$ は、円 $x^2+y^2 = a^2$ を y 軸方向に b/a 倍した (つぶした) 楕円、つまり x 軸との交点の座標 $(\pm ar, 0)$, y 軸との交点の座標 $(0, \pm br)$ である楕円である。r を $0 < r \le 1$ の範囲で動かすと、Ω から原点を除いた部分 Ω' と 1 対 1 に対応する。つまり $D' := \{(r,\theta); 0 < r \le 1, \theta \in [0,2\pi)\}$ は $\Omega' := \{(x,y); (x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1,\ (x,y) \ne (0,0)\}$ と 1 対 1 に対応する。定理 1.5.2 を使って厳密に議論するには、集合 N をどう取ればよいか？)

ゆえに Ω と対応するのは $D = \{(r,\theta); 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{pmatrix} = a\cos\theta\cdot br\cos\theta - (-ar\sin\theta)\cdot b\sin\theta = abr$$

となるので、$dx\,dy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = abr\ dr\,d\theta.$

$$I = \iint_D (ar\cos\theta)^2 \cdot abr\ dr\,d\theta = a^3 b\int_0^1 r^3\ dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta = a^3 b\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{2} = \frac{\pi a^3 b}{4}.\blacksquare$$

最初に $x = au$, $y = bv$ と変数変換すると、$dx\,dy = ab\,du\,dv$ となり、Ω は $D := \{(u,v); u^2+v^2 \le 1\}$ と 1 対 1 に対応するので、

$$I = \iint_D (au)^2\cdot ab\ du\,dv = a^3 b\iint_D u^2\ du\,dv$$

ここから後は通常の極座標変換などを使って $\displaystyle\iint_D u^2\ du\,dv = \frac{\pi}{4}$ (p.57 の例 1.5.1 参照). ゆえに $I = \dfrac{\pi a^3 b}{4}.\blacksquare$

2の解答　$x+y=u, x-y=v$ と変数変換する。Ω と対応するのは、$D=\{(u,v); 0\le u\le 2, 1\le v\le 3\}$. (これは式の計算だけから分かるが、1 次変換で平行四辺形は平行四辺形に写ることからも、もっともに感じられるであろう。) x と y について解くと、$\begin{cases} x=(u+v)/2 \\ y=(u-v)/2, \end{cases}$　ゆえに $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

となるので、

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \frac{1}{2}\,du\,dv. \quad \text{(絶対値に注意 !!)}$$

$x^2-y^2=uv$ であるから、

$$\begin{aligned} J &= \iint_D \sqrt{uv}\cdot\frac{1}{2}du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^2 u^{1/2}\,du\int_1^3 u^{1/2}\,dv = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^2\left[\frac{2}{3}v^{3/2}\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right) = \frac{4}{9}\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}-1\right). \blacksquare \end{aligned}$$