多変数の微分積分学 2

問 14

桂田 祐史

2008 年 1 月 10 日出題, 22 日配布

問　$\mathbf{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(2xy+z^2,2yz+x^2,2zx+y^2)^T$ のポテンシャルを求めよ。

解答

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\nabla\times\boldsymbol{f}=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & f_1 & \boldsymbol{e}_1\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & f_2 & \boldsymbol{e}_2\\ \dfrac{\partial}{\partial z} & f_3 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_3}{\partial y}-\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z}-\dfrac{\partial f_3}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}-\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(2zx+y^2\right)-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(2yz+x^2\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(2xy+z^2\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(2zx+y^2\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2yz+x^2\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(2xy+z^2\right)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2y-2y\\2x-2y\\2x-2x\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

$\boldsymbol{f}$ の定義域は $\mathbf{R}^3$ と考えられ、これは単連結領域である。また上で示したように $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$ であるから、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。原点から $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$ に真っ直ぐ至る曲線 (像は線分) を $C_{\boldsymbol{x}}$ とすると、そのパラメーター付けとして $\boldsymbol{\varphi}(t)=t(x,y,z)^T$ が取れる。

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))=\boldsymbol{f}(tx,ty,tz)=t^2\begin{pmatrix}2xy+z^2\\2yz+x^2\\2zx+y^2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\varphi}'(t)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)=t^2\left(2x^2y+xz^2+2y^2z+x^2y+2z^2x+y^2z\right)=3t^2(x^2y+y^2z+z^2x).$$

であるから、$\boldsymbol{f}$ の (1 つの) ポテンシャルとして

$$F(\boldsymbol{x}):=\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^1 3t^2(x^2y+y^2z+z^2x)dt=x^2y+y^2z+z^2x$$

が得られる。実際

$$\operatorname{grad}F(\boldsymbol{x})=(2xy+z^2,x^2+2yz,y^2+2zx)^T=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

は容易に確認できる。■

解説　「C^1 級の n 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ がポテンシャルを持つかどうかチェックし、持つ場合はそれを求めよ」という問題には、例えば次の手順で考えるとよい (上の解答もそれに沿っている)。

(1) 条件

$$(\star)\qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\quad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

が成り立つか調べる (条件 (☆) は $n=3$ の場合、$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$ と同値である。また $n=2$ の場合も $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}=0$ と同値である)。これが成り立たなければポテンシャルは存在しない。この条件 (☆) が成り立つならば、次の (2) に進む。

(2) $\boldsymbol{f}$ の定義域 Ω が単連結かどうか調べる[1]。単連結でなければ次の (3) に進む。単連結であれば、

$$(\heartsuit)\qquad F(\boldsymbol{x}):=\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}\quad (\boldsymbol{x}\in\Omega)$$

がポテンシャルとなる。ここで $C_{\boldsymbol{x}}$ は、Ω から任意に選んだ定点 $\boldsymbol{a}$ を始点とし、$\boldsymbol{x}$ を終点とする Ω 内の区分的 C^1 級曲線である[2]。ていねいにこの線積分を計算し、念のため $\operatorname{grad}F=\boldsymbol{f}$ が成り立つかどうか検算する。

(3) ((☆) が成り立つが、Ω は単連結でない場合) ポテンシャルを持たない可能性が高いが、それを確かめるには、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}\neq 0$$

を満たす Ω 内の閉曲線 C を見つければよい。軟弱な問題の場合、そういう閉曲線が設問中にあったりする。自分で探す場合は、Ω に空いた「穴」を囲む (ひっかかる) 閉曲線で、線積分を計算しやすいものを試してみるとよい。 ■

余談 0.1 計算を間違えない自信があれば、最初から線積分 (♡) で $F(\boldsymbol{x})$ を計算し、$\nabla F=\boldsymbol{f}$ が成り立つかどうかチェックすればよい (どうしてそれで良いかわかりますか？)。しかし、これは長い計算のうち 1 箇所でも間違えると、すべてがおじゃんになるので、人間向きではないと思われる (コンピューターにやらせるのならば案外良いかもしれない)。 ■

[1] 単連結というのは、直観的には閉曲線が外せなくなるような障害物が存在しないことであるが、実際に演習問題で出くわすのは大抵の場合、簡単なものに限られる。授業中ににあげた例 (講義ノートに書いてある) をよく見ておくとよい。例えば、空間の次元が何であっても、全空間 $\mathbf{R}^n$ は単連結である (障害物が何もないので、閉曲線はひっかかりようがない)。2 次元の場合は、1 点 ($\boldsymbol{a}$ とする) の補集合 $\Omega=\mathbf{R}^2\setminus\{\boldsymbol{a}\}$ のような穴があいているものは単連結ではない (3 次元以上の場合は、1 点の補集合は単連結である)。

[2] これは自分に都合のよいように選べる。$\Omega=\mathbf{R}^n$ の場合は、始点 $\boldsymbol{a}=$ 原点 である「有向線分」$\boldsymbol{\varphi}(t)=t\boldsymbol{x}$ ($t\in[0,1]$) のように取るのが簡単？