多変数の微分積分学 2

問 13

桂田 祐史

2008 年 1 月 10 日出題, 15 日説明&配布

問　$\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$ とするとき、次の各曲線上での $\boldsymbol{f}$ の接線線積分を求めよ。

(1) C_1: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ $(t\in[0,1])$　(2) C_2: 折れ線 $(0,0)\to(1,0)\to(1,1)$

解説　接線線積分の定義の式は、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\,dt$$

である (ただし C は $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ であるとする)。これに「代入」するだけである。ただ諸君の解答を見ていておぼつかない人もいるので、一つの流れを提示しておく。

(i) $\boldsymbol{f}(x,y)$ に $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$ を $\boxed{\text{代入}}$ して、t の関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))=\boldsymbol{f}(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ を得る。

(ii) $\boxed{\text{微分}}$ して $\boldsymbol{\varphi}'(t)=\begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$ を求める。

(iii) 上の 2 つのベクトルの $\boxed{\text{内積}}$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)$ を計算する。

(iv) t について α から β まで $\boxed{\text{積分}}$ する。

(1) の解答　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))=\boldsymbol{f}(t,t^2)=\begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\varphi}'(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ であるから、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)=t^2\cdot 1+t^2\cdot 2t=t^2+2t^3.$$

ゆえに

$$\int_{C_1}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^1\left(t^2+2t^3\right)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{2}\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}.$$

(2) の解答　$(0,0)$ からまっすぐ $(1,0)$ に向う曲線 (形は線分) を γ_1, $(1,0)$ からまっすぐ $(1,1)$ に向う曲線 (形は線分) を γ_2 とすると、$C_2=\gamma_1+\gamma_2$ で、

$$\int_{C_2}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\gamma_1}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{\gamma_2}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

γ_1 は $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \in [0,1])$ とパラメーターづけできる。

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{f}(t,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0 \cdot 1 + t^2 \cdot 0 = 0$$

であるから、

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 0 \ dt = 0.$$

一方 γ_2 は $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ $(t \in [0,1])$ とパラメーターづけできる。

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{f}(1,t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = t \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

であるから、

$$\int_{\gamma_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 1 \ dt = 1.$$

ゆえに

$$\int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\gamma_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 + 1 = 1. \blacksquare$$