多変数の微分積分学２ 問11解説

桂田祐史

2007 年 12 月 13 日, 12 月 20 日

問 11. (1) $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^T$ とするとき、$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1$ を計算して求めよ。
(2) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を満たす $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^3$ を求めよ。
(3) 3次元空間内の同一直線上にない A, B, C に対して、$\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$ (ただし $\boldsymbol{a} := \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} := \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\boldsymbol{c} := \overrightarrow{\mathrm{OC}}$) は、三角形 ABC の面積ベクトルであることを示せ。

解答 (1) ベクトル積の幾何学的特徴づけを使えば、明らかに $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$. 以下同様に $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$ が得られるが、ここでは「計算で求めよ」ということなので、

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{e}_1 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{e}_2 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 = 0\boldsymbol{e}_1 - 0\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3$$

などとする。
(2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_2$ とすると、(1) の結果を使って

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1) \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0} \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{e}_1 \times (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_2$$

となるので、明らかに $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.
(3) $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ の作る平行四辺形の一部であり、面積は半分であるから、

$$\boldsymbol{S} := \frac{1}{2} \|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})\|$$

は面積ベクトルである。ベクトル積の双線形性から、いわゆる展開が出来て、

$$\boldsymbol{S} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}).$$

ここで反可換性より、$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ であるから、

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}).$$