多変数の微分積分学 2

問 10 解説

桂田 祐史

2007 年 11 月 29 日,12 月 4 日

問題. 以下の広義積分を求めよ。ただし α は正の定数とする。
(1) $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\ge 1}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$ (2) $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$

解. (1) 積分範囲 $\Omega := \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; x^2+y^2+z^2\ge 1\}$ は、(球の外部なので) 明らかに非有界であり、(境界が滑らかな曲面である球面なので) Jordan 可測である。被積分関数 $f(x,y,z) := \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$ は Ω 全体で定義されていて、連続であり、符号は一定 $(f\ge 0)$ である。ゆえに Ω の任意の一つのコンパクト近似列 $\{K_n\}$ を取ると、

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\ge 1}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} = \lim_{n\to\infty}\iiint_{K_n}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}.$$

ここでは

$$K_n := \{(x,y,z); 1\le x^2+y^2+z^2\le n^2\}\quad (n\in\mathbf{N})$$

と選ぶ。3 次元極座標変換

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \qquad (r\ge 0,\ \theta\in[0,\pi],\ \phi\in[0,2\pi]) \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

によって K_n に対応するのは、

$$D_n := \{(r,\theta,\phi); 1\le r\le n,\ \theta\in[0,\pi],\ \phi\in[0,2\pi]\}.$$

$dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$ であるから、

$$\iiint_{K_n}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} = \iiint_{D_n}\frac{dx\,dy\,dz}{(r^2)^{\alpha/2}}\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi = \int_1^n r^{2-\alpha}\,dr\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi,$$

$$\int_1^n r^{2-\alpha}\,dr = \begin{cases} \left[\frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right]_1^n = \dfrac{n^{3-\alpha}-1}{3-\alpha} & (\alpha\ne 3) \\ [\log r]_1^n = \log n & (\alpha = 3). \end{cases}$$

これが $n\to\infty$ としたときに収束するには、$3-\alpha<0$ であることが必要十分であり、そのときの極限値は $-\dfrac{0-1}{3-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-3}$. ゆえに

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\ge 1}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-\alpha} & (\alpha>3) \\ \infty & (0<\alpha\le 3). \end{cases}$$

(2) 積分範囲 $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ は、明らかに有界閉集合なのでコンパクトであり、(境界が滑らかな曲面である球面なので) Jordan 可測である。被積分関数 $f(x,y,z) := \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$ は、原点 $(0,0,0)$ では定義されていないが、それ以外の $\Omega \setminus N$, $(N := \{(0,0,0)\})$ では連続であり、符号は一定 $(f \ge 0)$ である。また N は明らかに Jordan 零集合である。ゆえに $\Omega \setminus N$ の任意の一つのコンパクト近似列 $\{K_n\}$ を取ると、

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\ge 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} = \lim_{n\to\infty} \iiint_{K_n} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}.$$

ここでは

$$K_n := \left\{(x,y,z); \frac{1}{n^2} \le x^2+y^2+z^2 \le 1\right\} \quad (n \in \mathbf{N})$$

と選ぶ。3 次元極座標変換

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \qquad (r \ge 0,\ \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi]) \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

によって K_n に対応するのは、

$$D_n := \left\{(r,\theta,\phi); \frac{1}{n} \le r \le 1,\ \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi]\right\}.$$

$dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$ であるから、

$$\iiint_{K_n} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} = \iiint_{D_n} \frac{dx\,dy\,dz}{(r^2)^{\alpha/2}} \cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi = \int_{1/n}^1 r^{2-\alpha}\,dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\phi,$$

$$\int_{1/n}^1 r^{2-\alpha}\,dr = 4\begin{cases} \left[\frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right]_{1/n}^1 = \dfrac{1-n^{\alpha-3}}{3-\alpha} & (\alpha \ne 3) \\ [\log r]_{1/n}^1 = 0 - \log\frac{1}{n} = \log n & (\alpha = 3). \end{cases}$$

これが $n \to \infty$ としたときに収束するには、$\alpha - 3 < 0$ であることが必要十分であり、そのときの極限値は $\dfrac{1-0}{3-\alpha} = \dfrac{1}{3-\alpha}$. ゆえに

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-\alpha} & (0 < \alpha < 3) \\ \infty & (\alpha \ge 3). \end{cases}$$

注意　これは非常にしばしば現れる広義積分であるが、結果が複雑で間違えやすい。いくつかヒントを書いておく。

- 分かれ目は $\displaystyle\int r^\beta\,dr$ の β が -1 になるところであり、-1 は発散。つまり $\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{r}$ も $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dr}{r}$ も発散である。
- $r^{-\alpha}$ は α が大きいほど、遠方では速く減少し、原点の近くでは速く無限大に発散する。ゆえに遠方での積分が収束する条件は α が十分大きいことで、原点近傍での積分が収束する条件は α が十分小さいことである。
- 結果が正であることは明らかなので、「$\alpha > 3$ のとき $\dfrac{4\pi}{3-\alpha}$」のようになったら、間違いであることはすぐ分かる (この手のミスは結構多い — 簡単にチェックできることなので間違えないように)。