多変数の微分積分学２ 練習問題　(2007 年 9 月 27 日, 10 月 2 日)

問 1

(1) 次の各集合の sup, inf を求めよ。

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \left\{ \dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N} \right\}$, $C = \left\{ \tan x; x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \right\}$

(2) 関数 $f\colon [-1, 1] \to \mathbf{R}$ を次式で定めるとき、$\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} f(x)$, $\displaystyle\inf_{x\in[-1,1]} f(x)$ を求めよ。

$$f(x) := \begin{cases} x^3 - x & (x \in [-1, 1] \setminus \left\{ \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}} \right\}) \\ 0 & (x = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}) \\ -1 & (x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}) \end{cases}$$

解答　(1) $\sup A = 3$, $\inf A = 1$, $\sup B = 1$, $\inf B = 0$, $\sup C = \infty$, $\inf C = 0$.

(2) まず $y = x^3 - x$ の増減を調べる。

$$y' = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

であるから、増減表は下のようになり、

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{のとき} \quad y = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9},$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{のとき} \quad y = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

x	-1		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	0

これから、グラフの概形は図のようになり (…すみません、図を描くのは面倒なのでさぼります。それから $-1 < -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ に注意しましょう。)、

$$f([-1, 1]) = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \cup \{-1\}.$$

これから $\displaystyle\min_{x\in[-1,1]} f(x) = -1$. ゆえに $\displaystyle\inf_{x\in[-1,1]} f(x) = \min_{x\in[-1,1]} f(x) = -1$.

$\displaystyle\max_{x\in[-1,1]} f(x)$ は存在しないが、$\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. ■

解説　上限と下限について理解してもらいたいが、不等号の向きを逆にするだけのことだから、上限についてだけ説明する。まず基本となる定理を見ることから。

定理 (Weierstrass (ワイエルシュトラス))

$\mathbf{R}$ の部分集合 A が空でなく、上に有界ならば、A の上限が存在する。

(この定理は、実数体 $\mathbf{R}$ の連続性というものの一つの表現である。証明は実数の構成に依存していて難しいので、ここでは述べない。)

A が上に有界であるとは、A が少なくとも 1 つ上界を持つこと、すなわち

$$(\exists U \in \mathbf{R})(\forall a \in A) \quad a \le U$$

が成り立つことをいう (U を A の上界という)。

A の上限とは、A の上界の最小値のことを指す。すなわち

$$U \in \mathbf{R} \text{ が } A \text{ の上限} \iff \begin{cases} \text{(i)} \ (\forall a \in A) \quad a \le U \\ \text{(ii)} \ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists a \in A) \text{ s.t. } a > U - \varepsilon \end{cases}$$

(i) は U が A の上界であることを表している。(ii) は U を少しでも小さくすると A の上界ではなくなることを示す (これで最小性を表している)。

上限は最大値を一般化した概念である。実際

1. 最大値が存在するとき、それは上限である。
2. 最大値も上限もつねに存在するとは限らないが、最大値が存在しなくても上限が存在することは多い。

特に sup という記号は、$A \subset \mathbf{R}$, $A \ne \emptyset$ なる A に対して、

$$\sup A := \begin{cases} A \text{ の上限} & (A \text{ の上限が存在するとき、つまり } A \text{ が上に有界なとき}) \\ \infty & (A \text{ の上限が存在しないとき、つまり } A \text{ が上に有界でないとき}) \end{cases}$$

で定義されるので、<u>いつでも意味を持つ</u>ことに注意しよう。

確認用の問　次の各集合の sup を求めよ。(1) $[0,1]$ (2) $(0,1)$ (3) $\mathbf{N}$ (4) $\left\{1 - \dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\right\}$

確認用の問の答　($\sup A$ が求められればよしとする。参考までに証明つきで書いておくが。)

(1) 明らかに $\max A = 1$ ($1 \in A$ かつ $\forall x \in A$ に対して $x \le 1$) であるから、$\sup A = \max A = 1$.

(2) $\forall x \in A$ に対して $x \le 1$ であり、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\exists x \in A$ s.t. $1 - \varepsilon < x$ なので (実際 $1 - \varepsilon \le 0$ ならば $x = 1/2$ でよいし、$1 - \varepsilon > 0$ ならば $x = \dfrac{(1-\varepsilon)+1}{2}$ とおくと、$x \in A$ かつ、$1 - \varepsilon < x$.) $\sup A = 1$.

(3) $A = \mathbf{N}$ は明らかに上に有界でない (証明するのならばアルキメデスの公理？)。ゆえに A の上限は存在しない。ゆえに $\sup A = \infty$.

(4) 最初に $A = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}, \cdots\right\}$ であることを見ておく。明らかに 1 は A の上界である。また $\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ となるような $n \in \mathbf{N}$ が存在する (これも本当はアルキメデスの公理)。ゆえに $1 - \varepsilon > 1 - \dfrac{1}{n}$, $1 - \dfrac{1}{n} \in A$ であるから、$1 = \sup A$.