多変数の微分積分学2 いわゆる過去問

桂田 祐史

2008年2月12日

目次

1　取り扱い上の注意

「多変数の微分積分学 2」は 2006 年度から新しく始まった講義科目ですが、過去に対応する講義科目があり、何回かそれを担当したので、それらの試験問題も含めておきます。

講義科目の試験問題は、例えば入学試験問題のようなものとは異なり、記号や用語など、その講義での約束を前提とするところがあり、それら約束は講義によって違うことに注意してください。古い年度の問題を読んで「そもそも問題の意味が分からない」ということも大いにありえます。

(念のために予防線) 試験が終ったずっと後になって編集したので、誤植の訂正が落ちている可能性があります。

2　1994 年度 微分積分学 II・同演習

2.1　本試験

2.1.1　試験問題

1, 5 は必修。2,3,4 の 3 問の中から 2 問を選択して解答せよ。

1.　(1) $\mathbf{R}^n$ の閉方体 (有界閉区間) 上の積分の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合が Jordan 可測 (体積確定) であることの定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合上の積分の定義を記せ。(4) Jordan 可測でない有界部分集合の例をあげよ。

2.　累次積分 $I = \int_0^1 dy \int_0^y (y-x)^2 \log(1-x) dx$ について以下の問に答えよ。
(1) I の積分の順序交換をせよ。 (2) I の値を求めよ。

3.　極座標による曲線 $r = \sin 2\theta$ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ について以下の問に答えよ。
(1) 曲線の概形を描け。 (2) この曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

4.　(1) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ を計算せよ。(2) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$ が収束するような正数 α の範囲を求めよ。

5.　$\mathbf{R}^2$ におけるベクトル場 $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y + 2xy \\ x^3 + x^2 + 2y \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。
(1) $\mathbf{f}$ がポテンシャル持つことを示せ。(2) $\mathbf{f}$ のポテンシャルを (一つ) 求めよ。(3) 次の各曲線 C_i にそった線積分 $\displaystyle\int_{C_i} \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds}$ を求めよ。 $C_1 : (\cos 2t, \sin 3t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$. C_2 : 折れ線 $(0,0) \to (-2,0) \to (-2,4) \to (2,4)$.

2.1.2　解説

1.　講義では、黒板に日本語の文章を（語尾まで含めて完全に）書くのは大変なので（それに案外見やすくない)、普通は色々な記法を用いて、省略して書くわけだが、どうも読み損なっているいる人が多いようなので、ここでは文章で書いてみよう。
(1) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ とするとき、f が A 上積分可能であるとは、$U(f) = L(f)$ がなりたつことである (ここで $U(f)$ は f の A 上の上積分、$L(f)$ は f の A 上の下積分)。またこのとき (f が A 上積分可能であるとき)、$U(f)$ のことを f の A 上の積分と呼び、$\int_A f(x)dx$ で表す。
注意 上積分 $U(f)$、下積分 $L(f)$ の定義も要求されれば書けるようにしておいて欲しい。君達の答案に多かったミスとして、$U(f)$, $L(f)$ が何であるか一言も説明しなかったり (それでは説明文としてナンセンスである)、分割 Δ に関する上限和 $U(f,\Delta)$、下限和 $L(f,\Delta)$ と混同したことがあげられる。
(2) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合とするとき、Ω が Jordan 可測であるとは $\int_A \chi_{\Omega(x)}dx$ が存在することである (言い替えると χ_Ω が A 上積分可能であること)。ただし A は $\overline{\Omega} \subset A^i$ となる閉方体で[1]、χ_Ω は Ω の定義関数、すなわち

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$$

である。
(3) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、f が Ω 上積分可能であるとは、$\int_A \tilde{f}(x)dx$ が存在することである。ただし A は $\Omega \subset A$ となる $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$\tilde{f}$ は

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$$

で定義される関数 $\tilde{f}\colon A \to \mathbf{R}$ である。
(4) $\Omega = \mathbf{Q} \cap [0,1]$ は Jordan 可測でない $\mathbf{R}$ の有界部分集合である。実際 $\overline{\Omega} \subset A^i$ となる任意

[1] A^i は A の内部を表す。

の有界閉区間 A について $U(\chi_\Omega)=1$, $L(\chi_\Omega)=0$ となるから χ_Ω は A 上積分可能ではない (この理由は要求していなかったから書かなくてもよい)。

2. (1) 文字だけで書くと $\{(x,y); 0\le y\le 1, 0\le x\le y\}=\{(x,y); 0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$ ということだが、図を描いて考えたほうが分かりやすいだろう。結果は

$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 (y-x)^2\log(1-x)dy.$$

(2) 上の結果を利用して[2]

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\left(\int_x^1 (y-x)^2 dy\right)\log(1-x)dx=\int_0^1\left[\frac{(y-x)^3}{3}\right]_x^1\log(1-x)dx\\
&= \int_0^1\frac{1}{3}(1-x)^3\log(1-x)dx=\int_0^1\frac{1}{3}\left(-\frac{(1-x)^4}{4}\right)'\log(1-x)dx\\
&= -\frac{1}{12}\left[(1-x)^4\log(1-x)\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{12}(1-x)^4\left(\log(1-x)\right)'dx\\
&= 0+\frac{1}{12}\int_0^1(1-x)^4\cdot\frac{-1}{1-x}dx=\frac{1}{12}\int_0^1(x-1)^3dx=\frac{1}{12}\left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^1=-\frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

(本当は被積分関数が $x=1$ のところが定義されていないので広義積分 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}$ として計算すべきであるが、省略して書いた。)

3. 極座標と言ったら、直交座標系を入れた xy 平面の中にあると考える (講義でも色々例を出したはず)。(1) これはごくごく大雑把でいい。(2) 考えている図形は極座標による条件では

$$0\le r\le\sin 2\theta,\quad 0\le\theta\le\pi/2$$

と表されるから、

$$\begin{aligned}
\Omega\text{ の面積} &= \int_\Omega 1dx\,dy=\int_{0\le r\le\sin 2\theta, 0\le\theta\le\pi/2} r dr d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\sin 2\theta} r dr=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sin 2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

4. (1) $\Omega_n=\{(x,y); x^2+y^2<n^2\}$ とおくと、$\{\Omega_n; n\in\mathbf{N}\}$ は $\mathbf{R}^2$ の近似列[3]になるので、

$$I=\int\int_{\mathbf{R}^2}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2},\quad I_n=\int\int_{x^2+y^2<n^2}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

[2]累次積分は Fubini の定理を用いて積分の順序を交換した方が簡単に積分できることがあるということを示す例。

[3]あまり一般的な言葉ではない。この講義でしか使えないと思った方がよい。

とおくと $\lim_{n\to\infty} I_n = I$. そこで I_n を計算しよう。

$$I_n = \int\int_{0\le r<n, 0\le\theta\le 2\pi} \frac{rdrd\theta}{(1+r^2)^2} = \int_0^n dr \int_0^{2\pi} \frac{r}{(1+r^2)^2} d\theta = 2\pi \int_0^n \frac{r}{(1+r^2)^2} dr.$$

ここで $u = 1+r^2$ とおくと $du = 2rdr$, r が $0\to n$ と動くにつれて u は $1\to n^2+1$ と動くので、

$$I_n = \pi \int_1^{n^2+1} \frac{du}{u^2} = \pi \left[-u^{-1}\right]_1^{n^2+1} = \pi \left(1 - \frac{1}{n^2+1}\right).$$

これから $I = \pi$.

(2) 少し簡単に書くと (本当は広義積分だから lim を持ち出して表現すべきだが、∞ のままやると)

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha} = 2\pi \int_0^\infty \frac{rdr}{(1+r^2)^\alpha} = \pi \int_1^\infty \frac{du}{u^\alpha} = \begin{cases} \text{収束} & (\alpha > 1) \\ \text{発散} & (\alpha \le 1) \end{cases}$$

(ただし $u = 1+r^2$ という変数変換を行なった。) ゆえに収束するような α の範囲は $\alpha > 1$.

5. $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ とする。すなわち $P(x,y) = 3x^2y + 2xy$, $Q(x,y) = x^3 + x^2 + 2y$.

(1) $\mathbf{R}^2$ は星型領域であり、

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (3x^2 + 2x) - (3x^2 + 2x) = 0$$

であるから $\mathbf{f}$ はポテンシャルを持つ。

(2) 前項で確認した条件を満たすベクトル場について、ポテンシャルは線積分で与えられるのであった。つまり、$\mathbf{R}^2$ 内の定点を一つ選んで固定し、任意の $(X,Y)\in\mathbf{R}^2$ に対して、

$$F(X,Y) = \int_C \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds} \quad (C \text{ は定点と } (X,Y) \text{ を結ぶ滑らかな曲線})$$

とおくと、F は $\mathbf{f}$ のポテンシャルになる。定点を原点 $O=(0,0)$ に選び、曲線 C を

$$\begin{cases} x = tX \\ y = tY \end{cases} \qquad (0 \le t \le 1)$$

と取ると、

$$\begin{aligned} F(X,Y) &= \int_C Pdx + Qdy \\ &= \int_0^1 \left\{ \left[3(tX)^2(tY) + 2(tX)(tY)\right] X + \left[(tX)^3 + (tX)^2 + 2(tX)\right] YY \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left(3t^3x^3y + 2t^2x^2y + t^3x^3y + t^3x^2y + 2ty^2\right) dt \\ &= \frac{3}{4}x^3y + \frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{4}x^3y\frac{1}{3}x^2y + y^2 \\ &= x^3y + x^2y + y^2. \end{aligned}$$

(3) C_1 は閉曲線である。ベクトル場がポテンシャルを持つ必要十分条件は任意の閉曲線にそっての線積分が 0 になることであるから、

$$\int_{C_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds} = 0.$$

（Green の定理を用いて $\displaystyle\int_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds} = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = \int_D 0 dx\,dy = 0$ (D は C の囲む領域) としてもよい。また、次の C_2 上の線積分の計算と同様に考えてもよい。）ポテンシャルが存在するベクトル場について、線積分の値は曲線の始点と終点のみで決まる。ゆえに C_2 の代わりに、次の曲線 C_2' にそって積分すればよい。

$$C_2' \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

ところが、$\int_{C_2'} \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds}$ はまさにポテンシャル F を定義する積分であるから

$$\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds} = \int_{C_2'} \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds} = F(2, 4) = (2^3 \cdot 4 + 2^2 \cdot 4 + 4^2) = 64.$$

この C_2 上の積分は線積分の定義に基づいて計算してもよい。

2.2 追試験

2.2.1 試験問題

(2 月 9 日実施)

1 は必修。**5A**, **5B** の二問のうち、いずれか一方を選んで解答せよ。 **2**, **3**, **4** の三問の中からいずれか二問を選んで解答せよ。(全部で四問解くことになる。)

1. (1) $\mathbf{R}^n$ の閉方体上の有界な関数の積分の定義を記せ。ただし Riemann 和、上積分、下積分などの言葉を使う場合はその説明も書くこと。閉方体の分割の定義は既知としてよい。(2) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合が Jordan 可測であることの定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合上の有界関数の積分の定義を記せ。(4) 可積分でない関数の例をあげ、上に書いた定義に従って、それが可積分でないことを示せ。

2. (1) $\Omega = \left\{ (x, y); 0 \leq x \leq \dfrac{1}{4}, 0 \leq y \leq \pi \right\}$ とするとき、次の積分の値を求めよ。

$$I = \iint_\Omega \frac{x}{\cos^2 xy} dx\,dy.$$

(2) Ω を $y = 0$, $x = y$, $x = 1$ で囲まれた領域とするとき、次の積分の値を求めよ[4]。

$$I = \iint_\Omega \exp\left(\frac{y}{x}\right) dx\,dy.$$

[4]記号 $\exp\left(\dfrac{y}{x}\right)$ は $e^{(y/x)}$ を意味する。

3.　極座標による曲線 $r = \sin 2\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ について以下の問に答えよ。
(1) 曲線の概形を描け。 (2) この曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

4.　$\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$ とするとき、以下の問に答えよ。
(1) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を計算せよ。(2) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ が収束するような正数 α の範囲を求めよ。

5A　$\mathbf{R}^2$ におけるベクトル場 $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。
(1) $\mathbf{f}$ がポテンシャル持つことを示せ。(2) $\mathbf{f}$ のポテンシャルを (一つ) 求めよ。(3) 次の各曲線 C_i にそった線積分 $\displaystyle\int_{C_i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds}$ を求めよ。 $C_1 : (\cos 2t, \sin 3t)$　$(0 \leq t \leq 2\pi)$. C_2 : 折れ線 $(0, 0) \to (-2, 0) \to (-2, 4) \to (2, 4)$.

5B　xy 平面における楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a,\, b > 0)$ を正の向き (反時計回り) に一周する曲線を C とするとき、以下の問に答えなさい。

(1) 線積分 $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C x\,dy - y\,dx$ を計算せよ。

(2) Green の積分公式を述べ、それを用いて I が曲線 C の囲む領域の面積であることを示せ。

3　1995 年度 微分積分学 II・同演習

3.1　本試験

3.1.1　試験問題

1996 年 1 月 29 日
教科書・ノート等持込不可
解答用紙のみ提出すること

1 は必修。**2**〜**7** の 6 問の中から 5 問を選んで解答せよ。

1.　次の各問に答えよ。
(1) $A = [0, 1]$, $f(x) = x^2$ $(x \in A)$ とする。自然数 N に対して A の分割 Δ を $\Delta = \{j/N; j = 0, 1, \cdots, N\}$ で定義する。このとき、 f の Δ に関する上限和、下限和を具体的に計算せよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉方体上の積分の定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合が Jordan 可測であることの定義を記せ。(4) $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合上の積分の定義を記せ。(5) 可積分でない関数の例をあげよ (できれば、上に書いた定義に従って、それが可積分でないことを示せ)。

2. $A=[0,1]$ とし、 $f\colon A\to\mathbf{R}$ を次式で定めるとき、f が A 上可積分 (積分可能) であることを示せ。

$$f(x)=\begin{cases}\sin(1/x) & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

3. $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; x^2+y^2+z^2\le x\}$ のとき、$\displaystyle\iiint_\Omega x\,dxdydz$ を計算せよ。

4. (1) 3 次元極座標変換のヤコビアン (ヤコビ行列式) を求めよ。 (2) $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ が収束するような正定数 α の範囲を求めよ。ただし $\Omega=\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2>1\}$.

5. 極座標による曲線 $r=1+\dfrac{\sin\theta}{2}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ について以下の問に答えよ。
(1) 曲線の概形を描け。 (2) この曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

6. ベクトル場 $\vec{f}$ を

$$\vec{f}(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}\qquad \left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2\setminus\{0\}\right)$$

で定めるとき、以下の問に答えなさい。

(1) xy 平面における円 $x^2+y^2=a^2$ (a は正の定数) を正の向き (反時計回り) に一周する閉曲線を C とするとき、線積分 $\displaystyle\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$ を計算せよ。

(2) $\operatorname{rot}\vec{f}=0$ であることを示せ。

(3) $\vec{f}$ はポテンシャルを持つか、理由をつけて答えよ。

(4) 円 $(x-2)^2+y^2=1$ を正の向きに一周する閉曲線を $\tilde{C}$ とするとき、$\displaystyle\int_{\tilde{C}}\vec{f}\cdot d\vec{s}$ を求めよ。

7. $\vec{f}(\vec{x})=\vec{x}$ $(\vec{x}\in\mathbf{R}^3)$, $S=\{\vec{x}\in\mathbf{R}^3; \|\vec{x}\|=a\}$ (a は正の定数) とするとき、面積分 $\displaystyle\int_S \vec{f}\cdot\vec{n}\,dS$ を以下の二通りの方法で計算せよ。 (1) 面積分を直接計算する。 (2) Gauss の定理を適用する。

4 1996 年度 微分積分学 II・同演習

4.1 本試験

4.1.1 試験問題

担当 桂田 祐史
1997 年 2 月 4 日

教科書・ノート等持込不可
解答用紙のみ提出すること

1〜**6** に解答せよ。時間に余裕があれば**B1**〜 **B3** のうちから選択して解答せよ。

1. 次の各問に答えよ。
(1) $A = [0,1]$, $f(x) = x - x^2$ $(x \in A)$ とする。正の偶数 N に対して A の分割 Δ を $\Delta = \{j/N; j = 0, 1, \cdots, N\}$ で定義する。このとき、 f の Δ に関する上限和、下限和を具体的に計算せよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉方体上の積分の定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合の Jordan 測度の定義を記せ。(4) $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合上の有界関数の積分の定義を記せ。(5) 閉方体の上で定義された定数関数が積分可能であることを、(2) の解答に記した定義に基づいて示せ。

2. $I = \displaystyle\int_0^1 dx \int_0^x \frac{e^y}{\sqrt{(1-x)(x-y)}}\, dy$ について、以下の問に答えよ。
(1) 積分順序を交換せよ。 (2) I の値を求めよ。

3. a, b, c を正の定数とするとき、$\Omega = \left\{(x, y, z); \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} < 1\right\}$ の体積を求めよ。

4. 極座標で $r = 1 + \dfrac{\sin\theta}{2}$ で定義される曲線で囲まれる領域の面積を求めよ。

5. (1) α を正の定数とするとき、$\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha}$ を求めよ。
(2) α を正の定数とするとき、$\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$ の収束・発散を調べよ。

6. $\mathbf{R}^3$ のベクトル場 $\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - z \\ -y \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。
(1) $\mathrm{rot}\,\vec{f}$ を求めよ。 (2) $\vec{f}$ はポテンシャルを持つかどうか調べよ (理由を述べよ)。持つ場合はそれを求めよ。(3) 折れ線 $(1, 1, 1) \to (2, 3, 1) \to (3, 3, 1)$ を C とするとき、$\displaystyle\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ を求めよ。

B1. $A = [0, 1]$ 上の関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x \in (0, 1]) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ で定義するとき、f が A 上可積分であることを、「閉方体上の有界関数について、可積分であるための必要十分条件は、不連続点全体のなす集合が零集合である」という定理を用いずに示せ。

B2. $\mathbf{R}^2$ において、集合 $\Omega = \{(x, 0); x \in [0, 1]\}$ が零集合であることを、定義に基づいて示せ。

B3. $(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4$ に対して、次の式を満たす $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ を 4 次元極座標と呼ぶ:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta_1 \\ y &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ z &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ w &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \in I \overset{\text{def.}}{=} [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi).$$

(1) $\begin{cases} X &= r\cos\theta_1 \\ Y &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ u &= r\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ v &= \theta_3 \end{cases}$ とすると、写像 $\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \\ u \\ v \end{pmatrix}$ のヤコビアンは $r^2\sin\theta_1$ であることを示せ。

(2) $\begin{cases} x &= X \\ y &= Y \\ z &= u\cos v \\ w &= u\sin v \end{cases}$ とするとき、写像 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のヤコビアンを求め、$\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のヤコビアンが $r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2$ であることを示せ。

(3) 4 次元球 $\{(x,y,z,w); x^2+y^2+z^2+w^2 < R^2\}$ (R は正の定数) の 4 次元 Jordan 測度を求めよ。

4.2 特別試験

4.2.1 試験問題

1997 年 2 月　日
担当: 桂田 祐史
教科書・ノート等持込不可
解答用紙のみ提出

1. (1) $\mathbf{R}^n$ の閉方体上の有界関数の積分の定義を述べ、積分可能な例、積分可能でない例をあげよ。(それぞれ積分可能であること、積分可能でないことを示せ。) (2) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合が Jordan 可測であるとはどういうことか、定義を述べて、Jordan 可測である有界部分集合の例、Jordan 可測でない有界部分集合の例をあげよ。(それぞれ Jordan 可測であること、 Jordan 可測でないことを示せ。)

2. 極座標で $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ $(0 \le |\theta| \le \pi/4)$ と表される平面上の曲線 (これはレムニスケートと呼ばれる) の概形を描き、それによって囲まれる領域の面積を求めよ。(ただし a は正の定数とする。)

3. 次の積分の順序を交換せよ (a は正の定数である)。

$$\int_0^{2a}\left\{\int_0^{2ax-x^2} f(x,y)\,dy\right\}dx.$$

4. 柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ および $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ によって切りとられる第 1 象限 ($x>0$, $y>0$, $z>0$ の範囲のこととする) の体積を求めよ。ただし a, b, c は正の定数とする。

5. $A=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leq 1\}$, $B=\mathbf{R}^3\setminus A$ とするとき、次の二つの広義積分を求めよ (α, β は正の定数である)。

$$\begin{aligned} I &= \iiint_A \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}dxdydz, \\ J &= \iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\beta}}dxdydz. \end{aligned}$$

6. (1) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a, b は正の定数) を正の向きに一周する閉曲線 C に対して、線積分 $I=\displaystyle\int_C x\,dy$ の値を求めよ。(2) I が楕円 C の囲む領域の面積であることを Green の定理を用いて説明せよ。(Green の定理をきちんと書いて、それに基づいて説明すること。)

5 2004年度解析概論II, 解析概論演習II

5.1 本試験

5.1.1 試験問題

担当　桂田 祐史
2005年1月24日
教科書・ノート等持込不可
解答用紙のみ提出すること

1〜5 に解答せよ (A と B があるものはどちらか一方を選んで解答せよ)。

1A. 次の各問に答えよ。
(1) $\mathbf{R}^n$ の閉方体 (有界閉区間) 上の有界な関数の積分の定義を述べよ (ただし、閉方体の分割、上限和、下限和の定義や記号は既知として使って良い)。(2) $A=[0,2]$, $f(x)=(x-1)^2$ $(x\in A)$ とする。正の偶数 N に対して A の分割 Δ を $\Delta=\{2j/N;j=0,1,\cdots,N\}$ で定義する。このとき、f の Δ に関する上限和、下限和を具体的に計算せよ。(3) 上で述べた積分の定義に基づき $\displaystyle\int_{[0,2]}(x-1)^2\,dx$ を求めよ。

1B. 次の各問に答えよ。
(1) $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測集合、Jordan 測度の定義を述べよ (閉方体上の積分の定義は既知としてよい)。(2) Jordan 可測でない集合の例をあげ、定義に基づき、Jordan 可測でないことを証明せよ。

2. 積分 $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\int_y^{\pi}\frac{y\sin x}{x}\,dx\right)dy$ について以下の問に答えよ。
(1) 積分順序を交換せよ。(2) I の値を求めよ。

3. $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leq 1\}$, $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}$ (α は正の定数) とするとき、$\displaystyle\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\,dxdydz$ を求めよ。

4. $\mathbf{R}^2$ から原点を除いた集合 Ω で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)^T$ に対して、以下の問に答えよ。(1) 原点中心半径 1 の円を反時計回りに一周する曲線を C とするとき、線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。(2) $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルは存在しないことを示せ。(3) 右半平面 $H=\{(x,y);x>0\}$ に $\boldsymbol{f}$ を制限した $\boldsymbol{f}|_H$ のポテンシャルを求めよ。

5. $U=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $D=(0,\pi)\times(0,2\pi)$, $\boldsymbol{\varphi}\colon U\ni\begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}R\sin\theta\cos\phi\\ R\sin\theta\sin\phi\\ R\cos\theta\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$, $S:=\boldsymbol{\varphi}(D)$ とおく (ただし R は正定数とする)。(1) S は講義で説明した意味で正則パラメーター曲面であることを示せ。(2) $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi}$ を計算せよ。(3) S の曲面積が $4\pi R^2$ であることを示せ。

5.1.2 解答

1A (1) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体, $f\colon A\to\mathbf{R}$ を有界な関数とするとき、f が A で積分可能であるとは、$U(f,A)=L(f,A)$ が成り立つことをいい、このときその共通値を f の A 上の積分といい、$\int_A f(x)\,dx$ で表す。ここで $U(f,A)$, $L(f,A)$ は、それぞれ f の A 上の上積分、下積分である:

$$U(f,A)=\inf\{U(f,A,\Delta);\Delta \text{ は } A \text{ の閉方体への分割}\},$$
$$L(f,A)=\sup\{L(f,A,\Delta);\Delta \text{ は } A \text{ の閉方体への分割}\}.$$

(ただし $U(f,A,\Delta)$, $L(f,A,\Delta)$ はそれぞれ A の閉方体への分割 Δ に関する上限和、下限和を表すとする。)
(2) $x_j:=2j/N$ $(j=0,1,\dots,N)$, $A_j:=[x_{j-1},x_j]$ $(j=1,2,\dots,N)$ とおく。f は $[0,1/2]$ で単調減少、$[1/2,1]$ で単調増加だから、

$$\max_{x\in A_j}f(x)=\begin{cases}f(x_{j-1}) & (j=1,2,\dots,\frac{N}{2})\\ f(x_j) & (j=\frac{N}{2}+1,\dots,N),\end{cases}\qquad \min_{x\in A_j}f(x)=\begin{cases}f(x_j) & (j=1,2,\dots,\frac{N}{2})\\ f(x_{j-1}) & (j=\frac{N}{2}+1,\dots,N)\end{cases}$$

が成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned}U(f,A,\Delta)&=\sum_{j=1}^{N}\max_{x\in A_j}f(x)\mu(A_j)=\sum_{j=1}^{N/2}f(x_{j-1})(x_j-x_{j-1})+\sum_{j=N/2+1}^{N}f(x_j)(x_j-x_{j-1})\\&=2\sum_{j=1}^{N/2}f(x_{j-1})(x_j-x_{j-1})=2\sum_{j=1}^{N/2}\left(\frac{2(j-1)}{N}-1\right)^2\frac{2}{N}\\&=\frac{16}{N^3}\sum_{j=1}^{N/2}\left((j-1)-\frac{N}{2}\right)^2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{3}{N}+\frac{2}{N^2}\right).\end{aligned}$$

(3) $L(f,A,\Delta)\le L(f,A)\le U(f,A)\le U(f,A,\Delta)$ であるが、$N\to\infty$ とするとき、$L(f,A,\Delta)$, $U(f,A,\Delta)\to 2/3$ なので、$L(f,A)=U(f,A)=\dfrac{2}{3}$. ゆえに f は A 上で積分可能で、$\displaystyle\int_A f(x)\,dx=\frac{2}{3}$.

1B　(1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合 Ω に対して、Ω が Jordan 可測であるとは、$\overline{\Omega} \subset A^\circ$ となる $\mathbf{R}^n$ の閉方体 A を取ったとき、χ_Ω が A で積分可能であることをいう (ただし χ_Ω は Ω の特性関数である)。このとき $\displaystyle\int_A \chi_\Omega(x)\,dx$ の値を Ω の Jordan 測度という。

(2) $\Omega = [0,1] \cap \mathbf{Q}$ (Q は有理数体) は R の Jordan 可測でない有界部分集合である。実際、任意の分割 Δ に対して、小閉方体全体を A_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ とすると、

$$\sup_{x \in A_j} \chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & (A_j \cap [0,1] \neq \emptyset) \\ 0 & (A_j \cap [0,1] = \emptyset) \end{cases}$$

であるから、

$$U(\chi_\Omega, A, \Delta) = \sum_{j=1}^N \sup_{x \in A_j} \chi_\Omega(x)\mu(A_j) = \sum_{A_j \cap [0,1] \neq \emptyset} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{A_j \cap [0,1] \neq \emptyset} A_j\right).$$

ゆえに $U(\chi_\Omega, A) = \mu([0,1]) = 1.$

2　(1) $\displaystyle I = \int_0^\pi \left(\int_0^x \frac{y \sin x}{x}\,dy\right) dx.$

(2)

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

3　広義積分であることを理解するのが重要である。$N := \{0\}$ は零集合であり、$K_n := \{(x,y,z); \dfrac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ $(n \in \mathbf{N})$ は $\Omega \setminus N$ の近似列である。被積分関数 $f(x,y,z) = 1/(x^2+y^2+z^2)^\alpha$ は $\Omega \setminus N$ で定義され、符号は一定であるから

$$\iiint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\,dx\,dy\,dz = \lim_{n\to\infty} \iiint_{K_n} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

極座標変換

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta\cos\phi$$

により $dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ であるから、

$$\begin{aligned}\iiint_{K_n} f(x,y,z) dx\,dy\,dz &= \iiint_{\substack{1/n \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi}} \frac{1}{(r^2)^\alpha} \cdot r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \\ &= \int_{1/n}^1 r^{2-2\alpha} dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \int_{1/n}^1 r^{2-2\alpha}\,dr.\end{aligned}$$

($r^{2-2\alpha}$ となるべきところ、$r^{-\alpha}$ とする人が多くて、ちょっとため息。)

$2 - 2\alpha \neq -1$ の場合、$n \to \infty$ のとき

$$\int_{1/n}^1 r^{2-2\alpha}\,dr = \left[\frac{r^{3-2\alpha}}{3-2\alpha}\right]_{1/n}^1 = \frac{1}{3-2\alpha}\left(1 - n^{2\alpha-3}\right) \to \begin{cases} \infty & (3 - 2\alpha < 0) \\ \dfrac{1}{3-2\alpha} & (3 - 2\alpha > 0). \end{cases}$$

一方、$2-2\alpha=-1$ の場合

$$\int_{1/n}^{1} r^{2-2\alpha}\,dr = [\log r]_{1/n}^{1} = -\log\frac{1}{n} = \log n \to \infty \quad (n\to\infty).$$

以上をまとめると

$$I = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-2\alpha} & (\alpha < 3/2) \\ \infty & (\alpha \ge 3/2). \end{cases}$$

(かなり多くの人が $-\infty$ などとしているけれど、正の関数を積分して結果が負になったらおかしいと思わなくてはいけない。あいつはもの凄いかせいだらしいで、負債総額〇兆円みたいな話。記号を操作して計算するだけでなくて、どういう関数か常にイメージを持っているべきである。おかしな例えではない。)

4 (1) 曲線 C のパラメーターづけとして $\boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $(t\in[0,2\pi])$ がとれる。このとき

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

であるから、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-\sin t)^2+(\cos t)^2 = 1.$$

ゆえに

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

(2) もしも $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルが存在すれば、Ω 内の任意の滑らかな閉曲線 γ に対して、$\int_\gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ となるはずだが、(1) より $\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}\neq 0$ となるので、ポテンシャルは存在しない。

(3) (この線積分の正体は授業でばらしてあるので、計算しないで「結果はこれだ」と書いた人もいた。うんうん。きちんとやるのは大変かな。以下参考まで[5]。) $\boldsymbol{f}=(f,g)^T$ とおくとき、

$$f_y = g_x$$

が成り立つことが分かる。H は単連結であるから、$\boldsymbol{f}|_H$ はポテンシャルを持つ。H に属する点 $(1,0)$ をとり、C を $(1,0)$ を始点、(x,y) を終点とする H 内の任意の曲線とするとき

$$F(x,y) := \int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

とおくと、F はポテンシャルとなる。

$(x,y)=(R\cos\theta,R\sin\theta)$ とするとき、C として、$C=C_1+C_2$ を選ぶ。ただし $(x,y)=(r,0)$ $(r\in[1,R])$ を C_1、$(x,y)=(R\cos t,R\sin t)$ $(t\in[0,\theta])$ を C_2 とする。

[5] 一問くらいは「どうだ解けるか」みたいな問題を出してみたく思うわけで、この (3) はそういう問題です。

C_1 上の線積分は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) = \left(\frac{-0}{r^2+0^2}, \frac{r}{r^2+0^2}\right)^T = (0,1)^T, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (1,0)^T$$

より $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0$ となるので、$\displaystyle\int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$

C_2 上の線積分は、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) = \left(\frac{-R\sin t}{R^2}, \frac{R\cos t}{R^2}\right)^T = \frac{1}{R}(-\sin t, \cos t)^T, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-R\sin t, R\cos t)^T$$

より $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 1$ となるので、

$$\int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^\theta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \int_0^\theta dt = \theta = \arctan\frac{y}{x} \quad (\text{主値}).$$

ゆえに

$$F(x,y) = \int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \arctan\frac{y}{x}.$$

(線積分を重積分で計算したりする人もいて…成績は基本的に点を加点していって、合計点でつけるわけで、そういう間違いをしても単位が取れたりするのだが、線積分を誤解したままでは、とにかくマズイ。本当は学生を呼び出して説明したいところだ。)

5 (これは (2) から解く方が答案書き易いね。) (2)

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\phi \\ R\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ R\cos\theta\cos\phi & R\cos\theta\sin\phi & -R\sin\theta \\ -R\sin\theta\sin\phi & R\sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2\sin^2\theta\cos\phi \\ R^2\sin^2\theta\sin\phi \\ R^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= R^2\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

後のために準備しておくと ($0 \le \theta \le \pi$ であるから $\sin\theta \ge 0$ に注意して)

$$\left\| \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi} \right\| = R^2\sqrt{\sin^2\theta} = R^2\sin\theta.$$

(1) φ は D で単射であり[6]、(2) から D で $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta} \times \dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi} \neq \boldsymbol{0}$ であるので ($0 < \theta < \pi$ であるので $\sin\theta > 0$ となることに注意)、$S = \varphi(D)$ は正則パラメーター曲面である。

[6] これは実際に証明を書かなくても良いことにしたが、書いた人の多くが間違っているのには頭かかえました。$(\theta_1, \phi_1) \neq (\theta_2, \phi_2)$ から $\theta_1 \neq \theta_2$ は出て来ないよ。$\theta_1 \neq \theta_2$ または $\phi_1 \neq \phi_2$ ですね。

(3) S の Jordan 測度を $\mu(S)$ と書くと

$$\mu(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} \right\| d\theta\, d\phi = R^2 \iint_{\substack{0<\theta<\pi \\ 0<\phi<2\pi}} \sin\theta\, d\theta\, d\phi = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi R^2.$$

6　2005 年度解析概論 II, 解析概論演習 II

6.1　本試験

6.1.1　試験問題

2005 年度解析概論 II, 解析概論演習 II 試験問題　問題用紙

担当　桂田 祐史
2006 年 1 月 24 日
教科書・ノート等持込不可
解答用紙のみ提出すること

次の **1**〜**5** に解答せよ。

1. $\mathbf{R}^n$ の閉方体 (有界閉区間) 上の有界な関数の積分に関する以下の問に答えよ。
(1) 上限和、下限和、上積分、下積分の定義を述べよ。(2) 積分の定義を述べよ。(3) 積分可能な関数の例を一つあげ、それが積分可能であることを定義にしたがって確認せよ (ただし 2 次元、すなわち $\mathbf{R}^2$ の閉方体上の関数に限る)。

2. 次の積分を求めよ。
(1) $I = \iint_\Omega (x+y)^2\, dx\, dy$, $\Omega = \{(x,y); |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$　(2) $I = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$, $\Omega = \{(x,y,z); 0 \le x \le 1,\ y^2+z^2 \le 1\}$　(3) $I := \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy$

3. $I = \iiint_{\mathbf{R}^3} \dfrac{dx\, dy\, dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$ を求めよ。(ヒント: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x + \frac{x}{x^2+1}\right)$)

4. $\mathbf{R}^3$ から原点を除いた集合 Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)^T$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ であることを示せ。(2) $\boldsymbol{p} = (p,0,0)^T$ を始点, $\boldsymbol{q} = (q,0,0)^T$ を終点とする有向線分を C とするとき (ただし $pq > 0$)、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。(3) 原点を中心とする任意の球面上の任意の C^1-級曲線 γ に対して、$\displaystyle\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ であることを示せ。(4) $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルを求めよ。

5. $U=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $D=(0,\pi)\times(0,2\pi)$, $\boldsymbol{\varphi}\colon U\ni\begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}R\sin\theta\cos\phi\\ R\sin\theta\sin\phi\\ R\cos\theta\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$, $S:=\boldsymbol{\varphi}(D)$ とおくとき (ただし R は正定数とする)、以下の問に答えよ。
(1) S は講義で説明した意味で正則パラメーター曲面であることを示せ。(2) S の「上半分」、すなわち $z>0$ の範囲の曲面積を (積分を計算して) 求めよ。(3) ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}$ で定めるとき、$\displaystyle\int_S \boldsymbol{f}\cdot \boldsymbol{dS}$ を求めよ (方法は何でも良い)。

6.1.2 解答

1 (1), (2) は実質的にレポート課題と同じなので省略する。(3) $A=[0,1]\times[0,1]$, $f(x,y)=1$ $((x,y)\in A)$ とするとき、f は A の上で積分可能で $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=1$ である。Δ を A の任意の分割、$\{A_j\}_{j=1}^{\ell}$ を Δ に属するすべての閉方体とするとき、

$$U(f,A,\Delta)=\sum_{j=1}^{\ell}\sup_{(x,y)\in A_j}f(x,y)\mu(A_j)=\sum_{j=1}^{\ell}1\cdot\mu(A_j)=\sum_{j=1}^{\ell}\mu(A_j)=\mu(A)=1.$$

ゆえに $U(f,A)=\{\inf U(f,A,\Delta);\Delta$ は A の分割 $\}=1.$ 同様にして $L(f,A)=1$ も示せる。$U(f,A)=L(f,A)$ であるから f は A で積分可能で $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=U(f,A)=1.$

2 (1) 単なる Fubini の定理

$$\begin{aligned}\iint_\Omega (x+y)^2\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(y+x)^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{(y+x)^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1}dx\\ &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{(x+1)^3}{3}-\frac{(x-1)^3}{3}\right]dx=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

(2) $D:=\{(y,z);y^2+z^2\le 1\}$ とおくと $\Omega=[0,1]\times D$ であるから、

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz &= \iint_D\left(\int_0^1(x^2+y^2+z^2)dx\right)dy\,dz=\iint_D\left(y^2+z^2+\frac{1}{3}\right)dy\,dz\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(r^2+\frac{1}{3}\right)\cdot r\,dr\right)d\theta=2\pi\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5\pi}{12}.\end{aligned}$$

(3) この累次積分は $\Omega=\{(x,y);0<y<1,\ y<x<1\}$ での重積分に相当するが、$\Omega=\{(x,y);0<x<1,\ 0<y<x\}$ であるから

$$I=\int_0^1\left(\int_0^x e^{x^2}dy\right)dx=\int_0^1 e^{x^2}\,[y]_{y=0}^{y=x}\,dx=\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1=\frac{e^2-1}{2}.\blacksquare$$

3. 各 $n\in\mathbf{N}$ に対して $K_n=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\le n\}$ とおくと、$\{K_n\}$ は $\mathbf{R}^3$ の近似列となる。極座標変換すると、この K_n に対応するのは $D_n=\{(r,\theta,\phi);0\le r\le R,\ 0\le\theta\le$

$\pi, 0 \le \phi \le 2\pi\}$ である。

$$\begin{aligned}\iiint_{K_n} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} &= \iiint_{D_n} \frac{1}{(r^2+1)^2} \cdot r^2 \sin\theta\; dr\, d\theta\, d\phi \\ &= \int_0^\pi \sin\theta\; d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^n \frac{r^2}{(r^2+1)^2} dr = 4\pi \int_0^n \frac{r^2}{(r^2+1)^2} dr.\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{r^2}{(r^2+1)^2} dr &= \int_0^n \frac{r^2+1-1}{(r^2+1)^2} dr = \int_0^n \left(\frac{1}{r^2+1} - \frac{1}{(r^2+1)^2}\right) dr \\ &= \left[\tan^{-1} r - \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} r + \frac{r}{r^2+1}\right)\right]_0^n \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\tan^{-1} r - \frac{r}{r^2+1}\right)\right]_0^n = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} n - \frac{n}{n^2+1}\right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\iiint_{K_n} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} = 2\pi\left(\tan^{-1} n - \frac{n}{n^2+1}\right).$$

被積分関数はつねに正の値を取るので、

$$I = \lim_{n\to\infty} \iiint_{K_n} \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2+1} = 2\pi \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \pi^2.$$

4. (1) 単なる計算である。(2) 定義に従って計算を始めると、あっという間に式が簡単になって、$\int_p^q dt/t^2 = 1/p - 1/q$. (基本的には $\int_p^q \frac{x}{x^2}\,dx = \int_p^q \frac{dx}{x^2}$) (3) γ のパラメーターづけを $\boldsymbol{\varphi}(t)$ とすると、$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|^2 = r^2$ (r は球面の半径) であるから、微分して $\boldsymbol{\varphi}(t)\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t) = 0$ が得られる。これは $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t) = 0$ を示しているので、$\int_\gamma \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dr} = 0$. (3) 定点 $\boldsymbol{e} := (1,0,0)^T$ と任意の点 $\boldsymbol{x} = (x,y,z)^T \in \mathbf{R}^3$ を結ぶ曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ として、$\boldsymbol{e}$ を始点、$(q,0,0)^T$ (ただし $q := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) を終点とする有向線分 Γ_q と、$(q,0,0)$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ原点を中心とする半径 q の球面上の曲線 $\gamma_{q,\boldsymbol{x}}$ を結んだものを取る。

$$\int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dS} = \int_{\Gamma_q} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dS} + \int_{\gamma_{q,\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dS} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{q}\right) + 0 = 1 - \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

ゆえに $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルとして $F(x,y,z) := 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ が得られた (もちろん 1 は除いてもよい)。■

5. (1) 要点は $\boldsymbol{\varphi}|_D$ の単射性を指摘することと、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi} = R^2 \sin\theta\,(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)^T \ne \mathbf{0} \quad (\theta \in (0,\pi))$$

を示すこと。
(2) S の上半分 S' には $D' = (0,\pi/2)\times(0,2\pi)$ が対応する。

$$\int_{S'} dS = \iint_{D'} \left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi}\right\| d\theta\, d\phi = \iint_{D'} R^2 \sin\theta\; d\theta\, d\phi = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\; d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi R^2.$$

(もちろん球の面積 $4\pi R^2$ の半分)
(3) $\boldsymbol{dS} = \boldsymbol{n}\, dS$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} = R\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dS} = R\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = R\, dS$ となるので、

$$\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dS} = \int_S R\, dS = R \int_S dS = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3.$$

あるいは $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$ であるから、Gauss の定理を使って、(S で囲まれる球を Ω として)

$$\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dS} = \iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f} dx\, dy\, dz = 3 \iiint_\Omega dx\, dy\, dz = 3\mu(\Omega) = 3 \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi R^3. \blacksquare$$

6.2 特別試験

6.2.1 試験問題

2005 年度解析概論 II, 解析概論演習 II 特別試験問題　問題用紙

担当　桂田 祐史
2006 年 2 月　日
教科書・ノート等持込不可
解答用紙のみ提出すること

次の **1**〜**5** に解答せよ。

1. (1) $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合上の有界な関数の積分の定義を述べよ。(3) $\mathbf{R}^2$ の有界部分集合で Jordan 可測でないものの例をあげ、それが Jordan 可測でないことを定義にしたがって確認せよ。

2. 次の積分を求めよ。
(1) $I = \displaystyle\iint_\Omega x^2 \cos y \; dx\, dy$, $\Omega = \{(x, y); |x| \le 1,\ |y| \le \pi/2\}$ (2) $I = \displaystyle\iiint_\Omega dx\, dy\, dz$, $\Omega = \{(x, y, z); 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 8\}$ (3) $I := \displaystyle\iint_\Omega \sqrt{x^2 - 4y^2} dx\, dy$, $\Omega = \{(x, y); 0 \le x + 2y \le 1,\ 0 \le x - 2y \le 2\}$

3. $I = \displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$ を求めよ。

4. $\mathbf{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)^T$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ であることを示せ。(2) $\mathbf{R}^3$ が単連結であることを説明せよ。(3) 原点を始点、$\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ を終点とする有向線分を $C_{\boldsymbol{x}}$ とするとき、$\displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr}$ を求めよ。(4) C を $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\cos t, \sin^2 t, t)$ $(t \in [0, \pi])$ で定めるとき、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr}$ を求めよ。

5. $U = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $D = (0,\pi)\times(0,2\pi)$, $\boldsymbol{\psi}\colon U \ni \begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta\cos\phi \\ R\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$, $S := \boldsymbol{\psi}(D)$
とおくとき (ただし R は正定数とする)、以下の問に答えよ。
(1) S は講義で説明した意味で正則パラメーター曲面であることを示せ。(2) S のうち $x \geq 0$ の範囲の曲面積を (積分を計算して) 求めよ。

7 2006 年度 多変数の微分積分学 2, 多変数の微分積分学演習 2

7.1 本試験

7.1.1 試験問題

担当 桂田 祐史
2007 年 1 月 31 日
ノート等持込不可, 解答用紙のみ提出

次の **1**〜**6** に解答せよ。4.(2) は問題から削除しました。

1. $\mathbf{R}^n$ の閉方体 (有界閉区間) 上の有界な関数の積分に関する以下の問に答えよ。
(1) 上限和、下限和、上積分、下積分、積分の定義を述べよ。ただし、閉方体とその Jordan 測度 (記号 $\mu(\cdot)$) については、説明せずに用いてよい。(2) 積分可能でない関数の例を一つあげ、それが積分可能でないことを定義にしたがって確認せよ。

2. (1) $I = \displaystyle\iint_\Omega \frac{\sqrt{x}}{y}\,dx\,dy$ を求めよ。ただし $\Omega = \{(x,y); 0\leq x\leq 1,\ 2\leq y\leq 3\}$
(2) $I = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$ の積分順序を交換せよ。
(3) $\Omega := \left\{(x,y,z); \frac{1}{2}\leq z\leq 1,\ \left(\frac{x}{z}\right)^2 + y^2 \leq 1\right\}$ を平面 $z=a$ $(1/2\leq a\leq 1)$ で切った切口はどんな形か図を描いて説明し、その面積と、Ω の体積を求めよ。

3. (1) $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ とするとき、ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ を計算して求めよ。
(2) $B := \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ の体積を三重積分を計算して求めよ。
(3) $a,\ b,\ c > 0$ とするとき、$E := \left\{(x,y,z); \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\right\}$ の体積を変数変換 $x = au$, $y = bv$, $z = cw$ を利用して求めよ。
(4) $\Omega := \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z\geq 0\}$ とするとき、$I_x := \displaystyle\iiint_\Omega x\ dx\,dy\,dz$, $I_y := \displaystyle\iiint_\Omega y\,dx\,dy\,dz$, $I_z := \displaystyle\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz$ のうち 0 でない値を求めよ (0 である理由は不要)。

4. (1) $D = \{(x,y); x^2+y^2\leq 1\}$ とするとき、$\displaystyle\iint_D \log\sqrt{x^2+y^2}\ dx\,dy$ を求めよ。
(2) $\alpha > 0$ に対して、$I_\alpha = \displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$ を求めよ。

5. $\mathbf{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(2xy+z^2, 2yz+x^2, 2zx+y^2)^T$ について以下の問に答えよ。(1) $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}$ を求めよ。(2) $\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つかどうか調べよ (理由を述べよ)。持つ場合はそれを求めよ。(3) 折れ線 $(1,1,1)\to(2,3,1)\to(3,3,1)\to(3,3,3)$ を C とするとき、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

6. 正定数 R, 実定数 α ,β, γ に対して、S: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(\theta,\phi):=(R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)^T$, $(\theta,\phi)\in D:=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]$, $\boldsymbol{f}(x,y,z):=(\alpha,\beta,\gamma)^T$ $((x,y,z)\in\mathbf{R}^3)$ とおく。以下の (1),(2) に答えよ。
(1) 面積分の定義に基づき $\displaystyle\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$ を計算せよ。(2) Gauss の発散定理を用いて、$\displaystyle\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$ を求めよ。(**注意**: θ の範囲は $0\le\theta\le\pi$ ではない！)

7.1.2　解説

1 の解答　(省略 — 暗記するものでもないし、各自まとめてみること。)

2 の解答　(1)

$$I=\int_0^1\sqrt{x}\,dx\int_2^3\frac{dy}{y}=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1[\log|y|]_2^3=\frac{2}{3}(1-0)\cdot(\log 3-\log 2)=\frac{2}{3}\log\frac{3}{2}.$$

(2) 図を描いてみると、原点中心半径 1 の単位円の上半分での重積分に対応していることが分かる。

$$I=\int_{-1}^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx\right)dy.$$

(3) $z=a$ で切った切口を xy 平面に射影したものは

$$D:=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\left(\frac{x}{a}\right)^2+y^2\le 1\right\}.$$

これは楕円で囲まれた閉領域である。その面積は $\pi\cdot a\cdot 1=\pi a$. これは常識でもあるし[7]、$x=ar\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r\ge 0,\ \theta\in[0,2\pi])$ と変数変換することで

$$\iint_D dx\,dy=\iint_{\substack{0\le r\le 1\\0\le\theta\le 2\pi}}1\cdot ar\,dr\,d\theta=a\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1\cdot 2\pi=\pi a$$

と真面目に計算しても良い。体積はこの断面積を積分して

$$\int_{1/2}^1\pi z\,dz=\pi\left[\frac{z^2}{2}\right]_{1/2}^1=\frac{\pi}{2}(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3\pi}{8}.$$

[7] 楕円 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ で囲まれた領域の面積は、円の面積 πa^2 の $\dfrac{b}{a}$ 倍で πab であることは、高等学校の数学で出て来た。

3 の解答　(1) (途中経過略) $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\theta$. (2) $D := \{(r,\theta,\phi)\in\mathbf{R}^3; 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi\}$ とおくと、

$$\mu_3(B) = \iiint_B dx\,dy\,dz = \iiint_D 1\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi = \int_0^1 r^2\,dr\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi.$$

(3) ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w\\ y_u & y_v & y_w\\ z_u & z_v & z_w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$$

であるから、$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)} = abc$. また E に対応するのは B であるから、

$$\mu_3(E) = \iiint_E dx\,dy\,dz = \iiint_B 1\cdot abc\,du\,dv\,dw = abc\iiint_B du\,dv\,dw = abc\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{4\pi abc}{3}.$$

(4) $D' := \{(r,\theta,\phi); 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le 2\pi\}$ が対応するので、

$$I_z = \iiint_{D'} r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi = \int_0^1 r^3\,dr\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}.$$

4 の解答　(1) $K_n := \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; \dfrac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le 1\right\}$ とおくと、$\{K_n\}$ は $D\setminus\{(0,0)\}$ のコンパクト近似列である。被積分関数 $\log\sqrt{x^2+y^2}$ は、$D\setminus\{(0,0)\}$ で一定の符号であるから、

$$\iint_D \log\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n}\log\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

ここで

$$\begin{aligned}\iint_{K_n}\log\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \iint_{\substack{1/n\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}}\log r\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{1/n}^1 r\log r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta\\ &= 2\pi\left(\left[\frac{r^2}{2}\log r\right]_{1/n}^1 - \int_{1/n}^1\frac{r^2}{2}\cdot\frac{1}{r}\,dr\right) = 2\pi\left(\left[\frac{r^2}{2}\log r\right]_{1/n}^1 - \frac{1}{2}\int_{1/n}^1 r\,dr\right)\\ &= \frac{\pi}{2n^2}\left(2\log n - (n+1)(n-1)\right)\to -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(2) $K_n := \{(x,y); x^2+y^2\le n^2\}$ とおくと、$\{K_n\}$ は、$\Omega := \{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2\ge 1\}$ のコンパクト近似列であり、被積分関数は Ω で正であるから、

$$I_\alpha = \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}.$$

ここで

$$I_{\alpha,n} := \iint_{K_n}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha} = \iint_{D_n}\frac{1}{(1+r^2)^\alpha}\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^n\frac{r}{(1+r^2)^\alpha}dr.$$

$u = r^2$ とおくと、$r\ dr = \dfrac{1}{2}du$.

$$I_{\alpha,n} = 2\pi \int_0^n \frac{dr}{(1+r^2)^\alpha} = \pi \int_0^{n^2} \frac{1}{(1+u)^\alpha}\ du$$

$n \to \infty$ にとき、これが有限の値に収束するには $\alpha > 1$ であることが必要十分で、そのとき

$$I_{\alpha,n} = \pi \left[\frac{(1+u)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^{n^2} \to \frac{-\pi}{1-\alpha} = \frac{\pi}{\alpha-1}.$$

すなわち

$$I_\alpha = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha-1} & (\alpha > 1) \\ \infty & (0 < \alpha \le 1). \end{cases}$$

5 の解答　(1)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & f_1 & \boldsymbol{e}_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & f_2 & \boldsymbol{e}_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & f_3 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial y} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}(2zx+y^2) - \dfrac{\partial}{\partial z}(2yz+x^2) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(2xy+z^2) - \dfrac{\partial}{\partial x}(2zx+y^2) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(2yz+x^2) - \dfrac{\partial}{\partial y}(2xy+z^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2y-2y \\ 2x-2y \\ 2x-2x \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

(2) $\boldsymbol{f}$ の定義域は $\mathbf{R}^3$ と考えられ、これは単連結領域である。また (1) で示したように $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ であるから、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。原点から $\boldsymbol{x} = (x,y,z)^T$ に真っ直ぐ至る曲線を $C_{\boldsymbol{x}}$ とすると、そのパラメーター付けとして $\boldsymbol{\varphi}(t) = t(x,y,z)^T$ が取れる。

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \boldsymbol{f}(tx,ty,tz) = t^2 \begin{pmatrix} 2xy+z^2 \\ 2yz+x^2 \\ 2zx+y^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) = t^2 \left(2x^2y + xz^2 + 2y^2z + x^2y + 2z^2x + y^2z\right) = 3t^2(x^2y + y^2z + z^2x).$$

であるから、$\boldsymbol{f}$ の (1 つの) ポテンシャルとして

$$F(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 3t^2(x^2y+y^2z+z^2x)dt = x^2y + y^2z + z^2x$$

が得られる。実際

$$\operatorname{grad} F(\boldsymbol{x}) = (2xy+z^2, x^2+2yz, y^2+2zx)^T = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

は容易に確認できる。

(3) $\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つので、$\boldsymbol{f}$ の接線線積分は経路によらず、ポテンシャルの終点での値−ポテンシャルの始点での値 となる:

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = F(3,3,3) - F(1,1,1)$$
$$= (3^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 3) - (1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1) = 3^4 - 3 = 81 - 3 = 78.\blacksquare$$

6 の解答 (1)

$$\boldsymbol{n}\,d\sigma = R^2\sin\theta\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix}d\theta\,d\phi$$

であるから、

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma &= \iint_D\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\cdot R^2\sin\theta\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix}d\theta\,d\phi\\ &= R^2\left(\alpha\iint_D\sin^2\theta\cos\phi\;d\,\theta\,d\phi+\beta\iint_D\sin^2\theta\sin\phi\;d\,\theta\,d\phi+\gamma\iint_D\sin\theta\cos\theta\;d\,\theta\,d\phi\right)\\ &= R^2\left(\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\right)=\pi\gamma R^2.\end{aligned}$$

(2) (少し雑な説明だけど…) S は半球 $\Omega := \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; x^2+y^2+z^2<R^2,\ z>0\}$ の境界の一部である。$\partial\Omega$ から S を除いた部分を S' とすると、(S' は半球の底面であり) S' の面積は πR^2, 外向き単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n}_{S'}=(0,0,-1)^T$ (定数ベクトル) である。Gauss の発散定理より

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{f}\;dx\,dy\,dz$$

が成り立つが、

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\int_S\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma,\quad+\int_{S'}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma,\iiint_\Omega\operatorname{div}\boldsymbol{f}\;dx\,dy\,dz=\iiint_\Omega 0\;dx\,dy\,dz=0,$$

$$\int_{S'}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\int_{S'}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}_{S'}\,d\sigma=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}_{S'}\int_{S'}d\sigma=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\times S'\text{ の面積}=-\gamma\pi R^2.$$

ゆえに

$$\int_S\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=-\int_{S'}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\gamma\pi R^2.\blacksquare$$

7.2 特別試験

7.2.1 試験問題

2006 年度多変数の微分積分学 2, 多変数の微分積分学演習 2 特別試験問題

担当 桂田 祐史

2007 年 2 月 日

試験時間 120 分, 解答用紙 2 枚

ノート等持込不可, 解答用紙のみ提出

次の **1**～**7** に解答せよ。

1. $\mathbf{R}^n$ の有界な部分集合に関する以下の問に答えよ。
(1) 有界部分集合の定義を述べよ。(2) Jordan 可測集合と Jordan 測度の定義を述べよ。ただし、閉方体上の有界関数の積分の定義は既知としてよい。

2. (1) $\Omega = \{(x,y); 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le 1\}$ とするとき、$I = \displaystyle\iint_\Omega \frac{\log x}{1+y^2}\,dx\,dy$ を求めよ。
(2) $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy \right) dx$ の積分順序を交換せよ。
(3) $\Omega := \{(x,y,z); 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x+z,\ 0 \le z \le 1\}$ の体積を求めよ。

3. $x = r\sin\theta,\ y = r\cos\theta\cos\phi,\ z = r\cos\theta\sin\phi$ とするとき、ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ を計算して求めよ (**注** ヤコビアンはヤコビ行列の行列式である)。

4. (1) $\Omega := \left\{(x,y,z); \dfrac{1}{4} \le x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\right\}$ の体積を三重積分を計算して求めよ。
(2) $a,\ b,\ c > 0$ とするとき、$E := \left\{(x,y,z); \dfrac{1}{4} \le \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 \le 1,\ z \ge 0\right\}$ の体積を変数変換 $x = au,\ y = bv,\ z = cw$ を利用して求めよ。
(3) $\Omega := \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$ とするとき、$I_1 := \displaystyle\iiint_\Omega xy\ dx\,dy\,dz,\ I_2 := \iiint_\Omega yz\ dx\,dy\,dz,\ I_3 := \iiint_\Omega zx\ dx\,dy\,dz$ のうち 0 でない値を求めよ (0 である理由は不要)。

5. $\Omega := \{(x,y); x^2+y^2 \ge 1\}$ とするとき、$\displaystyle\iint_\Omega \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$ を求めよ。

6. $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; (x,y) \ne (0,0)\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) := \left(\frac{yz(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{zx(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{xy}{x^2+y^2} \right)^T$$

で定義するとき、以下の問に答えよ。
(1) $\boldsymbol{x} = (x,y,z)^T \in \Omega$ に対して、曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ $(t \in [0,1])$ を $\boldsymbol{\varphi}(t) = (x,y,tz)^T$ で定めるとき、$F(x,y,z) := \displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。(2) $\operatorname{grad} F,\ \operatorname{rot} \boldsymbol{f}$ を求めよ。(3) 折れ線 $(1,1,1)^T \to (2,3,1)^T \to (3,3,1)^T \to (3,3,3)^T$ を C とするとき、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

7. 正定数 R に対して、曲面 S: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(\theta,\phi) := (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)^T,\ (\theta,\phi) \in D := \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$ の曲面積を面積分を計算することによって求めよ。

8　2007 年度 多変数の微分積分学 2, 多変数の微分積分学演習 2

8.1　本試験

8.1.1　試験問題

担当　桂田 祐史

2008 年 1 月 29 日 (火曜) 13:00〜15:00
ノート等持込不可, 解答用紙のみ提出

1. (1) $\mathbf{R}^2$ の有界部分集合 X で、Jordan 可測でないものの例をあげよ。また、それが Jordan 可測でないと判断できる理由を簡単に説明せよ。(2) $\mathbf{R}^2$ の有界部分集合 Y で、(i) Y は Jordan 可測、(ii) Y の Jordan 測度 $\mu_2(Y)$ は正、(iii) Y は閉方体でない、という条件を満たすものの例をあげよ。また Y が Jordan 可測であると判断できる理由を簡単に説明せよ。

2. (1) $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ を頂点とする三角形 Ω に対して、$I = \iint_\Omega 3x^2 y\, dx\, dy$ を求めよ。(2) $J = \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_{y/2}^{\sqrt{\pi}/2} \sin\left(x^2\right)\ dx \right) dy$ の値を求めよ。
(3) $z = x^2 + y^2$ と $z = 1 - x^2 - y^2$ で囲まれた範囲 Ω の体積を求めよ。

3. $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形 (内部及び周) を D, $(0,0)$, $(12,11)$, $(14,13)$ を頂点とする三角形 (内部及び周) を Ω とするとき、以下の問に答えよ。
(1) $\iint_D u\, du\, dv$, $\iint_D v\, du\, dv$ を空間図形の体積と解釈して値を求めよ。(2) $\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (a, b, c, d は定数) の形をしている $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ で、$\boldsymbol{\varphi}(D) = \Omega$ を満たすものを 1 つ求めよ。
(3) Ω の面積を求めよ。(4) 変数変換を利用して、$\iint_\Omega x\, dx\, dy$ を求めよ。

4. (1) $\boldsymbol{\varphi}(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)^T$ のヤコビアンを計算して求めよ。
(2) $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ とするとき、$\iiint_\Omega \dfrac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz$ を求めよ。
(3) $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \ge 1\}$ とするとき、$\iiint_\Omega \dfrac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} dx\, dy\, dz$ を求めよ。

5. $\mathbf{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を、

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) := \left(x(x^2+y^2+z^2), y(x^2+y^2+z^2), z(x^2+y^2+z^2)\right)^T$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}$ を定義に従い計算して求めよ。(2) $\mathbf{R}^3$ が単連結であることを説明せよ。(3) 原点を始点、$\boldsymbol{x} = (x,y,z)^T$ を終点とする有向線分を $C_{\boldsymbol{x}}$ とするとき、$\int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。(4) 曲線 $C\colon \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin t, \cos t, \pi^2 - t^2)$ $(t \in [-\pi,\pi])$ に対して、$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

6. パラメーター曲面 $S\colon \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \cos v \\ R\cos u \sin v \\ R\sin u \end{pmatrix}$ $((u,v) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi,\pi])$ について (ただし R は正定数とする)、以下の問に答えよ。

(1) $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}$ と $\left\| \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \right\|$ を求めよ (途中経過をある程度書くこと)。

(2) 上の結果を用いて、S の曲面積を求めよ。

8.1.2 解説 — 出題の狙いと答案への講評

解答の前に解説をということだけど、最初に、雑感

- 昨年度の期末試験問題、授業中の小テスト・宿題は解答まで発表してあるし、100% 理解してほしい。昔だったら理解できなくても、少なくとも類問は「書けた」はずだが…
- 単位をすれすれで落とした人は、自分がどこを失敗したか、特にもう少しで解けた問題、計算ミスして点を損した問題に注意が行きがちだけど、本当はまずい点がたくさんあるはずで、謙虚に反省して下さい。(計算ミスするともちろん満点にはならないけれど、単純なミスはほとんど減点しないもので、それが大勢に影響することはない— 見かけ上、その 2 点が足りなかったように見えても、本当はそれでダメになる位すれすれになっているのがおかしい。)
- 私はもともと自分が面倒な計算がきらいなせいもあって、それなしで解ける問題ばかりを並べる傾向がある。多分数学科の先生は多かれ少なかれそういう性質をもっているのでは。(現実の数学の問題はそう甘くはないが、試験問題で) ただ複雑で面倒なだけの計算問題は出さないはず。面倒になったら、それは出題の意図から外れたのでは？と思って欲しい。
- **2** の (1) が解けるかどうかは、ほぼきれいに単位が取れるかどうか、と合致していた。こちらの気分としても、**2** の (1) は解けて欲しい。解けない人には「もう一回勉強し直して」と言いたくなる。同様に、変数変換でヤコビアンを忘れる人もそう。どちらの場合も、出来なくて単位取れた人がいるけれど、ぜひ復習して出来るようにしておいて欲しい。

まだ 2 年生の段階では、単純な計算の比重の大きい科目が多いためか、どうしても計算問題を解くことに関心が傾きがちである。他学科向けの数学の講義ではこの傾向は顕著で、「解き方」の説明はちゃんと聴いているのに、「なぜそうなるか」の説明に移ると途端に集中力が切れる人が多い (ざわざわし始める)。それと比べると数学科のクラスははるかにましであるが (逃亡したり、眠ってしまうやつはいるが、少なくともうるさくはしない)、理解する努力が十分であるとはとても言えない。

言い古されたことであるが、「(計算) 出来る」だけではダメで、「(なぜそうなるか) 分かる」ことが必要で、さらに「自分が理解したことを相手にきちんと伝えられる」ようになろう。

1. 上のお説教を書いた一つの理由は、この問題を無視する人が非常に多かったからである (一人ずつ呼び出して問い詰めたいくらいである)。話を理解するための第一歩は、使われている言葉をもれなく正確に知って理解することである。数学の場合に具体的に言うと、使われる用語の定義や使われる定理を「覚える」ことから始まる。この講義 (の前半) で頻出した用語は、「有界」、「Jordan 可測」、「積分可能」というあたりであろうか。こういう用語は定義が書けなければならないし、例もあげられないといけないし、実際にそれを元にした議論ができないといけない。今年度は定義を書く練習が出来なかったので、例くらいは言わせてみよう、ということである。

普通に思いつくような大抵の平面図形は Jordan 可測 (面積を持つ) である。だから、(2) の例として、三角形とか、円盤とか、ハート形とか、何でもよい。理由を書くためには、数学的

に図形の定義を述べる必要があるので、「ハート形」では難しいかも知れない (でもそういう例をあげるだけでも点はあげるよ)。

集合 X が Jordan 可測でないためには、無限集合であって、X に属する点と属さない点が「入り組んでいる」必要がある。一番簡単なのは、有理数、無理数を使うことであろう。

例えば時間 10 分の口頭試問で試験をすることになったら、この **1.** と、次の **2.** の (1) を尋ねることにすると思う。

2.

(1) 基本中の基本の「縦線集合上の Fubini の定理」であるが、出来が悪かった。ボーダーライン上の学生が単位を取れたか取れなかったか、この問題が解けるか解けないかで判定しても、そう違いが出ないと思う。諸君の答案を見ると、図を描いていない人が結構いる (出来なくても仕方ない)。よくある間違いが 2 つあって、1 つは

$$\iint_\Omega 3x^2y\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 3x^2y\,dy\right) dx \quad (\text{間違い})$$

とするもの。これでは Ω が長方形 $[0,2]\times[0,1]$ になってしまう。不可になっても仕方がない (もちろん他の問題も採点して、合計点で判定するわけだが…)。もう一つは

$$\iint_\Omega 3x^2y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2y} 3x^2y\,dx\right) dy \quad (\text{間違い})$$

とするもの。x で先に積分する場合は、左側 $x=\psi_1(y)$ と右側 $x=\psi_2(y)$ を探すわけで、この場合は $\psi_1(y)=2y$, $\psi_2(y)=1$, すなわち

$$\iint_\Omega 3x^2y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{2y}^1 3x^2y\,dx\right) dy$$

が正しい。

(2) 計算問題中に重積分でなく重複積分を入れる理由は (90% 以上の確率で)、積分の順序交換である。昨年度の問題もそうだったし、過去にさかのぼっても、積分の順序交換をさせる問題は必ず 1 題は入れてある。そもそも順序交換しないで

$$\int_{y/2}^{\sqrt{\pi/2}} \sin\left(x^2\right)\,dx$$

を計算しようとしても無理である。間違えて計算してしまった人がかなりの数いたが、猛反省して欲しい。

(3) この問題は授業中の演習にしたもので、正解も配布済みである。空間図形をきちんと式で捉えさせるのがねらい。積分範囲が、不等式

$$x^2+y^2 \le 1-x^2-y^2 \quad \text{つまり} \quad x^2+y^2 \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

で定義される円盤であることが分かるかどうかが分かれ目である。一切の説明抜きに $0\le r\le 1$ で積分したり (1 って一体何？)、あろうことか $1\le r<\infty$ で積分したり、そういうのはダメ。

3. 実はこの問題は、「有限要素法」という微分方程式の数値計算法の話を考えていて思いついたもの (ここに出て来る原理で、三角形上の積分計算を、今この瞬間も多くのコンピューターが実行中であることでしょう)。問題自体は、重積分の変数変換の重要な部分に焦点が当った、結構良いものになっていると思う (自画自賛)。それほど数は多くないが、きれいに解けた人がいて嬉しい。

(1) 三角錐の体積と書いてくれた人は存在した (極少数)。計算で解いても良いことにしたが、**2** の (1) と同様に間違える人多数 (こういう人は単位取れない可能性大)。

(2) どうも「こういうのはカンケーない」と思われているのか、出来ない人が多かった。それでは線型代数勉強しても、宝の持ち腐れだと思う。

(3) 中学校数学で解こうとした人も多い (せめてベクトルの内積とか高校数学使ってほしい — 暇があったら、三つの方法で解き比べて下さい)。それが出来ることも重要だが、出題者の意図ではない (それを避けてもらうように、そういう方法を選ぶと、計算が面倒になるように問題を作った)。そのやり方で正しく値を求められた人はほぼ皆無。$|\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})|/2$ という式の簡潔さを、しみじみ感じてください。

(4) 脱線する:

$$I_{\ell,m,n} = \iint_D x^\ell y^m (1-x-y)^n\, dx\, dy$$

を求めておくと (結果は結構きれい)、単純な計算で Ω 上の多項式の重積分が求まる。$\ell = 1$, $m = n = 0$ の場合をやってみた、ということです。

4. この問題で点を稼いだ人が多い。

(1) これはさすがに出来ている人が多かった。

(2) 広義積分の処理は基本的に出来ている人が多くて良かった。でも被積分関数の符号に言及してくれた人は少なかった (減点するのはやめたが…)。それよりも、極座標変換した後、ヤコビアン $r^2 \sin\theta$ を書かない人が少なくなかったのは悲しい (そう間違えても最終結果に余計に π がつくだけで、結果だけ見ると「何か軽微な計算ミスをした」と考えるかもしれないけれど、本当は「変数変換の肝心の部分が分かっていない」可能性が大きい)。何のための (1) なのでしょう。それから、次の (3) でもそうだけど、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^2} = 0$$

のような極限計算が分からないといけない。中には途中で $1/n^2$ を落として、ただの $\log n$ が出て来たのを、極限 0 とした人もいて (もちろん ∞ になるはず)、こういう人は最終結果 (-2π) は合っていても、もちろん×です (まあ、そこまでの中間点がつくので 0 点ではないけれど)。

(3) 大体 (2) と同じことです。

5.　まあまあ得点源となったよう。

(1) 出来ている人多かった。

(2) 「ポテンシャルが存在するので単連結」という迷答がなぜか非常に多かった。「定義域が単連結で、rot が 0 ならば、ポテンシャルを持つ」という定理からの連想ゲーム？仮定と結論を逆にしたら滅茶苦茶である。

(3) (1) ほどではないけれど、出来ている人多かった。

(4) 出題者の意図は、(1), (2), (3) から、(3) の計算結果 ($F(x,y,z)$ とおく) が、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャルであることが分かるので、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = F(\text{終点}) - F(\text{始点})$$

で計算するという手順を思いついてもらうことであった。何度も強調したように「ポテンシャルは原始関数の一般化であって、ポテンシャルを知っていれば、線積分は代入計算だけで求まる」、ということである。あるいは、C が閉曲線であることに気が付けば、(1) と (2) だけで、この線積分の値が 0 であることに気が付く (始点と終点が一致するので、F の値は計算するまでもなく、差は 0 となる)。ここからは笑い話になるが、そのためにも、線積分は定義に従って計算すると大変面倒になるようなものにするつもりだったが、指がすべって、やれば何とか出来るような問題になってしまい、実際に地道に計算して値が 0 となることを示した答案が多かった。そういう人の多くは (3) に手をつけていなかったので、「線積分の定義を知って、それに基づき計算できる」ことの証明になるため、その答案でもフルに点を与えることにした。それにしても少し工夫をしてもらいたいもので、

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\times[(\pi^2-t^2)\ \text{の多項式}]\,dt$$

となるのだが、t について奇関数であることを見破ったり (2,3 秒で結果が 0 になることが分かる)、$u=\pi^2-t^2$ という置換が便利であることを見抜いて (十数秒で結果が 0 になることが分かる) 欲しいものである。t の多項式に展開して計算するのは、まことにご苦労様である。それでは「間違えても仕方ない」でしょう。答が合ったとしてもラッキーに近い (まあ、それでも点はつけました)。

6.　授業で出て来た極座標の式のままで出題すると、覚えてきた内容を「吐き出す」だけで終了してしまうおそれがあるので、少し変えてみた。これは緯度、経度形式 (ちなみに 3 次元極座標の式は、授業でならったもの、ここで出題したもの以外に、色々あるので、出題のネタには困らない — 自分できちんと使いこなせるものを一つ (授業で出て来たものを選ぶのが無難) 身につけて、要求されたらそうでないものも扱える、そういうようになってもらいたい)。

(1) 符号をミスした人多し。そこは甘く採点した (次の (2) に響かないので)。計算結果は、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v} = -R^2\cos u\begin{pmatrix}\cos u\cos v\\ \cos u\sin v\\ \sin u\end{pmatrix}$$

となり、$-$ がついているので、地球だったら、中心に向う、つまり地面に垂直に地中に向って突き刺さる向きのベクトルになる。緯度が増加する方向を親指にして、経度が増加する方向を人指し指にして、中指は…手がひねられて痛くならないように注意。こうやって納得するところまで出来れば、一つの成分だけ符号を間違えるミスはなくせるはずだけど、時間制限のある試験では、そういう厳しいことは言わない。

それから、$\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}$ が実数になった人がいた。ベクトル積はその名の通りベクトルである (採点していてしんどい)。

(2) 結果は当然 $4\pi R^2$. そうなっていない人もいるのは悲しい (さすがに少数派)。

8.1.3 解答

1. (1) $X := K\times K$, $K := \mathbf{Q}\cap[0,1]$. $A := [0,1]\times[0,1]$ とおくとき、$X\subset A$. また A の任意の分割 Δ に対して、有理数の稠密性、無理数の稠密性から $U(A,\chi_X,\Delta)=1$, $L(A,\chi_X,\Delta)=0$ であるので、$U(A,\chi_X)=1$, $L(A,\chi_X)=0$. ゆえに χ_X は A で積分可能でない。すなわち χ は Jordan 可測ではない。(2) $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形 (周および内部) を Y とすると、Y は求める条件を満たす。 特に、Y の境界は有界閉区間上の連続関数のグラフ有限個からなることから、Y が Jordan 可測であることが分かる。 ■

2. (1) $\Omega=\left\{(x,y); 0\le x\le 2,\ 0\le y\le \dfrac{x}{2}\right\}$ であるから、

$$\iint_\Omega 3x^2y\,dx\,dy=\int_0^2\left(\int_0^{x/2}3x^2y\,dy\right)dx=\int_0^2 3x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x/2}dx=\int_0^2\frac{3}{8}x^4\,dx=\left[\frac{3x^5}{40}\right]_0^2$$
$$=\frac{3}{40}\cdot 2^5=\frac{3\cdot 2^2}{5}=\frac{12}{5}.$$

(2)

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}\left(\int_{y/2}^{\sqrt{\pi}/2}\sin\left(x^2\right)dx\right)dy=\int_0^{\sqrt{\pi}/2}\left(\int_0^{2x}\sin\left(x^2\right)dy\right)dx=\int_0^{\sqrt{\pi}/2}2x\sin(x^2)dx$$
$$=\left[-\cos\left(x^2\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}/2}=-\cos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2+1=1-\cos\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(3) ともに $z=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ の形をしているので、回転面である。$y=0$ での切口 $z=x^2$, $z=1-x^2$ を描いてみると、

$$\Omega=\{(x,y,z); x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\}$$

であることが分かる。これは縦線集合である。実際

$$D:=\{(x,y); x^2+y^2\le 1-(x^2+y^2)\}=\left\{(x,y); x^2+y^2\le\frac{1}{2}\right\}.$$

とおくとき、D で $x^2+y^2 \le 1-(x^2+y^2)$ が成り立つ。ゆえに Ω の体積は

$$\begin{aligned}\mu_3(\Omega) &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{1-(x^2+y^2)} dz\right) dx\,dy \\ &= \iint_D \left[1-2(x^2+y^2)\right] dx\,dy = \iint_{\substack{0\le r\le 1/\sqrt{2}\\ 0\le\theta\le 2\pi}} (1-2r^2)\cdot r\;dr\,d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{1/\sqrt{2}} (r-2r^3)dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{2}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.\blacksquare\end{aligned}$$

3. (1) ともに底面積 1/2, 高さ 1 の三角錐の体積なので、$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$. (2) $(1,0)$ を $(12,11)$ に、$(0,1)$ を $(14,13)$ に写す線型写像は、$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix}12 & 14\\ 11 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$. これは D を Ω に写す。(3) $(x,y)^T = \boldsymbol{\varphi}(u,v)$ という変数変換を行うと、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\boldsymbol{\varphi}' = 12\cdot 13 - 14\cdot 11 = 2$ であるから、

$$\mu_2(\Omega) = \iint_\Omega dx\,dy = \iint_D \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = 2\int_D du\,dv = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

(あるいは線型写像は面積を行列式倍するという定理を使っても良い。) (4) 上と同様に

$$\begin{aligned}\iint_\Omega x\;dx\,dy &= \iint_D (12u+14v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = 24\iint_D u\;du\,dv + 28\iint_D v\;du\,dv \\ &= 24\cdot\frac{1}{6} + 28\cdot\frac{1}{6} = 4 + \frac{14}{3} = \frac{26}{3}.\blacksquare\end{aligned}$$

4. (1) 略 (2) $K_n := \{(x,y,z); \frac{1}{n^2} \le x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ とおくと、$\{K_n\}$ は Ω のコンパクト近似列である。被積分関数は Ω 上で符号が一定 (≤ 0) なので、求める広義積分は、K_n 上の積分の $n\to\infty$ での極限となる。

$$\begin{aligned}\iiint_{K_n} \frac{\log(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz &= \iiint_{\substack{1/n\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\pi, 0\le\phi\le 2\pi}} \frac{\log(r^2)}{r}\cdot r^2\sin\theta\;dr\,d\theta\,d\phi \\ &= \int_0^\pi \sin\theta\;d\theta\cdot\int_0^{2\pi} d\phi\cdot 2\int_{1/n}^1 r\log r\;dr,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{1/n}^1 r\log r\;dr &= \left[\frac{r^2}{2}\log r\right]_{1/n}^1 - \int_{1/n}^1 \frac{r^2}{2}\cdot\frac{1}{r}dr = \frac{1^1}{2}\log 1 - \frac{1}{2n^2}\log\frac{1}{n} - \int_{1/n}^1 \frac{r}{2}\;dr \\ &= \frac{1}{2n^2}\log n - \left[\frac{r^2}{4}\right]_{1/n}^1 = \frac{1}{2n^2}\log n - \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2} \to -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

であるから

$$\iiint_\Omega \frac{\log(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz = 2\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -2\pi.$$

(3) $K_n := \{(x,y,z); 1 \le x^2+y^2+z^2 \le n^2\}$ とおくと、$\{K_n\}$ は Ω のコンパクト近似列である。被積分関数は Ω 上で符号が一定 (≥ 0) なので、求める広義積分は、K_n 上の積分の $n \to \infty$ での極限となる。

$$\iiint_{K_n} \frac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\substack{1\le r\le n \\ 0\le\theta\le\pi, 0\le\phi\le 2\pi}} \frac{\log(r^2)}{r^4}\cdot r^2\sin\theta\;dr\,d\theta\,d\phi$$
$$= 8\pi\int_1^n r^{-2}\log r\;dr,$$

$$\int_1^n r^{-2}\log r\;dr = \left[-r^{-1}\log r\right]_1^n + \int_1^n r^{-1}\cdot\frac{1}{r}\,dr = -\frac{\log n}{n} + \frac{\log 1}{1} + \int_1^n r^{-2}\,dr$$
$$= -\frac{\log n}{n} + \left[-r^{-1}\right]_1^n = -\frac{\log n}{n} - \frac{1}{n} + 1 \to 1$$

であるから

$$\iiint_{\Omega} \frac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\,dx\,dy\,dz = 8\pi.\blacksquare$$

5. (1)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(z(x^2+y^2+z^2)\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(y(x^2+y^2+z^2)\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(x(x^2+y^2+z^2)\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(z(x^2+y^2+z^2)\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y(x^2+y^2+z^2)\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x(x^2+y^2+z^2)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2yz-2yz \\ 2zx-2zx \\ 2xy-2xy \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

(2) 略 (3) $\boldsymbol{\varphi}(t) = t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right) = t^3\begin{pmatrix} x(x^2+y^2+z^2) \\ y(y^2+y^2+x^2) \\ z(z^2+y^2+y^2) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t) = t^3\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$ であるから、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 t^3\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\;dt = \frac{1}{4}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2.$$

(4) 上の (1), (2) から、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つことが分かる。C は閉曲線であるから、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$. あるいは、$F(x,y,z) := \left(x^2+y^2+z^2\right)/4$ がポテンシャルであることが分かるので、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot dr = F(\boldsymbol{\varphi}(\pi)) - F(\boldsymbol{\varphi}(-\pi)) = F(0,1,0) - F(0,1,0) = 0.\blacksquare$$

6. (1)

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} -R\sin u\cos v \\ -R\sin u\sin v \\ R\cos u \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -R\cos u\sin v \\ R\cos u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} = \det \begin{pmatrix} -R\sin u\cos v & -R\cos u\sin v & \boldsymbol{e}_1 \\ -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v & \boldsymbol{e}_2 \\ R\cos u & 0 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -R^2\cos^2 u\cos v \\ -R^2\cos^2 u\sin v \\ -R^2\sin u\cos u\cos^2 v - R^2\sin u\cos u\sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\cos^2 u\cos v \\ -R^2\cos^2 u\sin v \\ -R^2\sin u\cos u \end{pmatrix}$$

$$= -R^2\cos u \begin{pmatrix} \cos u\cos v \\ \cos u\sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \right\| = R^2\cos u.$$

(2)

$$\mu_c(S) = \iint_{\substack{-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2 \\ -\pi\leq\phi\leq\pi}} R^2\cos u\, du\, dv = R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos u\, du\int_{-\pi}^{\pi} dv = R^2\cdot 2\cdot 2\pi = 4\pi R^2. \blacksquare$$