2007 年度多変数の微分積分学 2, 多変数の微分積分学演習 2 試験問題

担当　桂田 祐史

2008 年 1 月 29 日 (火曜) 13:00〜15:00

ノート等持込不可, 解答用紙のみ提出

1. (1) $\mathbf{R}^2$ の有界部分集合 X で、Jordan 可測でないものの例をあげよ。また、それが Jordan 可測でないと判断できる理由を簡単に説明せよ。(2) $\mathbf{R}^2$ の有界部分集合 Y で、(i) Y は Jordan 可測、(ii) Y の Jordan 測度 $\mu_2(Y)$ は正、(iii) Y は閉方体でない、という条件を満たすものの例をあげよ。また Y が Jordan 可測であると判断できる理由を簡単に説明せよ。

2. (1) $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ を頂点とする三角形 Ω に対して、$I=\iint_\Omega 3x^2y\,dx\,dy$ を求めよ。(2) $J=\int_0^{\sqrt{\pi}}\left(\int_{y/2}^{\sqrt{\pi}/2}\sin\left(x^2\right)\ dx\right)dy$ の値を求めよ。
(3) $z=x^2+y^2$ と $z=1-x^2-y^2$ で囲まれた範囲 Ω の体積を求めよ。

3. $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形 (内部及び周) を D, $(0,0)$, $(12,11)$, $(14,13)$ を頂点とする三角形 (内部及び周) を Ω とするとき、以下の問に答えよ。
(1) $\iint_D u\,du\,dv$, $\iint_D v\,du\,dv$ を空間図形の体積と解釈して値を求めよ。(2) $\boldsymbol{\varphi}(u,v)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ (a, b, c, d は定数) の形をしている $\boldsymbol{\varphi}\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ で、$\boldsymbol{\varphi}(D)=\Omega$ を満たすものを 1 つ求めよ。
(3) Ω の面積を求めよ。(4) 変数変換を利用して、$\iint_\Omega x\,dx\,dy$ を求めよ。

4. (1) $\boldsymbol{\varphi}(r,\theta,\phi)=(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)^T$ のヤコビアンを計算して求めよ。
(2) $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\le 1\}$ とするとき、$\iiint_\Omega\dfrac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$ を求めよ。
(3) $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\ge 1\}$ とするとき、$\iiint_\Omega\dfrac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}dx\,dy\,dz$ を求めよ。

5. $\mathbf{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を、

$$\boldsymbol{f}(x,y,z):=\left(x(x^2+y^2+z^2), y(x^2+y^2+z^2), z(x^2+y^2+z^2)\right)^T$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}$ を定義に従い計算して求めよ。(2) $\mathbf{R}^3$ が単連結であることを説明せよ。(3) 原点を始点、$\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$ を終点とする有向線分を $C_{\boldsymbol{x}}$ とするとき、$\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。(4) 曲線 $C\colon\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(t)=(\sin t,\cos t,\pi^2-t^2)$ $(t\in[-\pi,\pi])$ に対して、$\int_C\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

6. パラメーター曲面 $S\colon\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(u,v)=\begin{pmatrix}R\cos u\cos v\\ R\cos u\sin v\\ R\sin u\end{pmatrix}$ $((u,v)\in[-\pi/2,\pi/2]\times[-\pi,\pi])$ について (ただし R は正定数とする)、以下の問に答えよ。

(1) $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}$ と $\left\|\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right\|$ を求めよ (途中経過をある程度書くこと)。

(2) 上の結果を用いて、S の曲面積を求めよ。

解説 — 出題の狙いと答案への講評

解答の前に解説をということだけど、最初に、雑感

- 昨年度の期末試験問題、授業中の小テスト・宿題は解答まで発表してあるし、100% 理解してほしい。昔だったら理解できなくても、少なくとも類問は「書けた」はずだが…
- 単位をすれすれで落とした人は、自分がどこを失敗したか、特にもう少しで解けた問題、計算ミスして点を損した問題に注意が行きがちだけど、本当はまずい点がたくさんあるはずで、謙虚に反省して下さい。(計算ミスするともちろん満点にはならないけれど、単純なミスはほとんど減点しないもので、それが大勢に影響することはない— 見かけ上、その 2 点が足りなかったように見えても、本当はそれでダメになる位すれすれになっているのがおかしい。)
- 私はもともと自分が面倒な計算がきらいなせいもあって、それなしで解ける問題ばかりを並べる傾向がある。多分数学科の先生は多かれ少なかれそういう性質をもっているのでは。(現実の数学の問題はそう甘くはないが、試験問題で) ただ複雑で面倒なだけの計算問題は出さないはず。面倒になったら、それは出題の意図から外れたのでは？と思って欲しい。
- **2** の (1) が解けるかどうかは、ほぼきれいに単位が取れるかどうか、と合致していた。こちらの気分としても、**2** の (1) は解けて欲しい。解けない人には「もう一回勉強し直して」と言いたくなる。同様に、変数変換でヤコビアンを忘れる人もそう。どちらの場合も、出来なくて単位取れた人がいるけれど、ぜひ復習して出来るようにしておいて欲しい。

まだ 2 年生の段階では、単純な計算の比重の大きい科目が多いためか、どうしても計算問題を解くことに関心が傾きがちである。他学科向けの数学の講義ではこの傾向は顕著で、「解き方」の説明はちゃんと聴いているのに、「なぜそうなるか」の説明に移ると途端に集中力が切れる人が多い (ざわざわし始める)。それと比べると数学科のクラスははるかにましであるが (逃亡したり、眠ってしまうやつはいるが、少なくともうるさくはしない)、理解する努力が十分であるとはとても言えない。

言い古されたことであるが、「(計算) 出来る」だけではダメで、「(なぜそうなるか) 分かる」ことが必要で、さらに「自分が理解したことを相手にきちんと伝えられる」ようになろう。

1. 上のお説教を書いた一つの理由は、この問題を無視する人が非常に多かったからである (一人ずつ呼び出して問い詰めたいくらいである)。話を理解するための第一歩は、使われている言葉をもれなく正確に知って理解することである。数学の場合に具体的に言うと、使われる用語の定義や使われる定理を「覚える」ことから始まる。この講義 (の前半) で頻出した用語は、「有界」、「Jordan 可測」、「積分可能」というあたりであろうか。こういう用語は定義が書けなければならないし、例もあげられないといけないし、実際にそれを元にした議論ができないといけない。今年度は定義を書く練習が出来なかったので、例くらいは言わせてみよう、ということである。

普通に思いつくような大抵の平面図形は Jordan 可測 (面積を持つ) である。だから、(2) の例として、三角形とか、円盤とか、ハート形とか、何でもよい。理由を書くためには、数学的

に図形の定義を述べる必要があるので、「ハート形」では難しいかも知れない (でもそういう例をあげるだけでも点はあげるよ)。

集合 X が Jordan 可測でないためには、無限集合であって、X に属する点と属さない点が「入り組んでいる」必要がある。一番簡単なのは、有理数、無理数を使うことであろう。

例えば時間 10 分の口頭試問で試験をすることになったら、この **1.** と、次の **2.** の (1) を尋ねることにすると思う。

2.

(1) 基本中の基本の「縦線集合上の Fubini の定理」であるが、出来が悪かった。ボーダーライン上の学生が単位を取れたか取れなかったか、この問題が解けるか解けないかで判定しても、そう違いが出ないと思う。諸君の答案を見ると、図を描いていない人が結構いる (出来なくても仕方ない)。よくある間違いが 2 つあって、1 つは

$$\iint_\Omega 3x^2y\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 3x^2y\,dy\right) dx \quad \text{(間違い)}$$

とするもの。これでは Ω が長方形 $[0,2]\times[0,1]$ になってしまう。不可になっても仕方がない (もちろん他の問題も採点して、合計点で判定するわけだが…)。もう一つは

$$\iint_\Omega 3x^2y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2y} 3x^2y\,dx\right) dy \quad \text{(間違い)}$$

とするもの。x で先に積分する場合は、左側 $x=\psi_1(y)$ と右側 $x=\psi_2(y)$ を探すわけで、この場合は $\psi_1(y)=2y$, $\psi_2(y)=1$, すなわち

$$\iint_\Omega 3x^2y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{2y}^1 3x^2y\,dx\right) dy$$

が正しい。

(2) 計算問題中に重積分でなく重複積分を入れる理由は (90% 以上の確率で)、積分の順序交換である。昨年度の問題もそうだったし、過去にさかのぼっても、積分の順序交換をさせる問題は必ず 1 題は入れてある。そもそも順序交換しないで

$$\int_{y/2}^{\sqrt{\pi/2}} \sin\left(x^2\right)\,dx$$

を計算しようとしても無理である。間違えて計算してしまった人がかなりの数いたが、猛反省して欲しい。

(3) この問題は授業中の演習にしたもので、正解も配布済みである。空間図形をきちんと式で捉えさせるのがねらい。積分範囲が、不等式

$$x^2+y^2 \le 1-x^2-y^2 \quad \text{つまり} \quad x^2+y^2 \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

で定義される円盤であることが分かるかどうかが分かれ目である。一切の説明抜きに $0\le r\le 1$ で積分したり (1 って一体何？)、あろうことか $1\le r<\infty$ で積分したり、そういうのはダメ。

3. 実はこの問題は、「有限要素法」という微分方程式の数値計算法の話を考えていて思いついたもの (ここに出て来る原理で、三角形上の積分計算を、今この瞬間も多くのコンピューターが実行中であることでしょう)。問題自体は、重積分の変数変換の重要な部分に焦点が当った、結構良いものになっていると思う (自画自賛)。それほど数は多くないが、きれいに解けた人がいて嬉しい。

(1) 三角錐の体積と書いてくれた人は存在した (極少数)。計算で解いても良いことにしたが、**2** の (1) と同様に間違える人多数 (こういう人は単位取れない可能性大)。

(2) どうも「こういうのはカンケーない」と思われているのか、出来ない人が多かった。それでは線型代数勉強しても、宝の持ち腐れだと思う。

(3) 中学校数学で解こうとした人も多い (せめてベクトルの内積とか高校数学使ってほしい — 暇があったら、三つの方法で解き比べて下さい)。それが出来ることも重要だが、出題者の意図ではない (それを避けてもらうように、そういう方法を選ぶと、計算が面倒になるように問題を作った)。そのやり方で正しく値を求められた人はほぼ皆無。$|\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})|/2$ という式の簡潔さを、しみじみ感じてください。

(4) 脱線する:

$$I_{\ell,m,n} = \iint_D x^\ell y^m (1-x-y)^n \, dx \, dy$$

を求めておくと (結果は結構きれい)、単純な計算で Ω 上の多項式の重積分が求まる。$\ell = 1$, $m = n = 0$ の場合をやってみた、ということです。

4. この問題で点を稼いだ人が多い。

(1) これはさすがに出来ている人が多かった。

(2) 広義積分の処理は基本的に出来ている人が多くて良かった。でも被積分関数の符号に言及してくれた人は少なかった (減点するのはやめたが…)。それよりも、極座標変換した後、ヤコビアン $r^2 \sin\theta$ を書かない人が少なくなかったのは悲しい (そう間違えても最終結果に余計に π がつくだけで、結果だけ見ると「何か軽微な計算ミスをした」と考えるかもしれないけれど、本当は「変数変換の肝心の部分が分かっていない」可能性が大きい)。何のための (1) なのでしょう。それから、次の (3) でもそうだけど、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^2} = 0$$

のような極限計算が分からないといけない。中には途中で $1/n^2$ を落として、ただの $\log n$ が出て来たのを、極限 0 とした人もいて (もちろん ∞ になるはず)、こういう人は最終結果 (-2π) は合っていても、もちろん×です (まあ、そこまでの中間点がつくので 0 点ではないけれど)。

(3) 大体 (2) と同じことです。

5. まあまあ得点源となったよう。

(1) 出来ている人多かった。

(2) 「ポテンシャルが存在するので単連結」という迷答がなぜか非常に多かった。「定義域が単連結で、rot が 0 ならば、ポテンシャルを持つ」という定理からの連想ゲーム？仮定と結論を逆にしたら滅茶苦茶である。

(3) (1) ほどではないけれど、出来ている人多かった。

(4) 出題者の意図は、(1), (2), (3) から、(3) の計算結果 ($F(x,y,z)$ とおく) が、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャルであることが分かるので、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = F(\text{終点}) - F(\text{始点})$$

で計算するという手順を思いついてもらうことであった。何度も強調したように「ポテンシャルは原始関数の一般化であって、ポテンシャルを知っていれば、線積分は代入計算だけで求まる」、ということである。あるいは、C が閉曲線であることに気が付けば、(1) と (2) だけで、この線積分の値が 0 であることに気が付く (始点と終点が一致するので、F の値は計算するまでもなく、差は 0 となる)。ここからは笑い話になるが、そのためにも、線積分は定義に従って計算すると大変面倒になるようなものにするつもりだったが、指がすべって、やれば何とか出来るような問題になってしまい、実際に地道に計算して値が 0 となることを示した答案が多かった。そういう人の多くは (3) に手をつけていなかったので、「線積分の定義を知って、それに基づき計算できる」ことの証明になるため、その答案でもフルに点を与えることにした。それにしても少し工夫をしてもらいたいもので、

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\times [(\pi^2-t^2)\ \text{の多項式}]\,dt$$

となるのだが、t について奇関数であることを見破ったり (2,3 秒で結果が 0 になることが分かる)、$u=\pi^2-t^2$ という置換が便利であることを見抜いて (十数秒で結果が 0 になることが分かる) 欲しいものである。t の多項式に展開して計算するのは、まことにご苦労様である。それでは「間違えても仕方ない」でしょう。答が合ったとしてもラッキーに近い (まあ、それでも点はつけました)。

6. 授業で出て来た極座標の式のままで出題すると、覚えてきた内容を「吐き出す」だけで終了してしまうおそれがあるので、少し変えてみた。これは緯度、経度形式 (ちなみに 3 次元極座標の式は、授業でならったもの、ここで出題したもの以外に、色々あるので、出題のネタには困らない — 自分できちんと使いこなせるものを一つ (授業で出て来たものを選ぶのが無難) 身につけて、要求されたらそうでないものも扱える、そういうようになってもらいたい)。

(1) 符号をミスした人多し。そこは甘く採点した (次の (2) に響かないので)。計算結果は、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v} = -R^2\cos u\begin{pmatrix}\cos u\cos v\\ \cos u\sin v\\ \sin u\end{pmatrix}$$

となり、$-$ がついているので、地球だったら、中心に向う、つまり地面に垂直に地中に向って突き刺さる向きのベクトルになる。緯度が増加する方向を親指にして、経度が増加する方向を人指し指にして、中指は…手がひねられて痛くならないように注意。こうやって納得するところまで出来れば、一つの成分だけ符号を間違えるミスはなくせるはずだけど、時間制限のある試験では、そういう厳しいことは言わない。

それから、$\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ が実数になった人がいた。ベクトル積はその名の通りベクトルである (採点していてしんどい)。

(2) 結果は当然 $4\pi R^2$. そうなっていない人もいるのは悲しい (さすがに少数派)。

解答

1. (1) $X := K\times K$, $K := \mathbf{Q}\cap[0,1]$. $A := [0,1]\times[0,1]$ とおくとき、$X\subset A$. また A の任意の分割 Δ に対して、有理数の稠密性、無理数の稠密性から $U(A,\chi_X,\Delta)=1$, $L(A,\chi_X,\Delta)=0$ であるので、$U(A,\chi_X)=1$, $L(A,\chi_X)=0$. ゆえに χ_X は A で積分可能でない。すなわち χ は Jordan 可測ではない。(2) $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形 (周および内部) を Y とすると、Y は求める条件を満たす。 特に、Y の境界は有界閉区間上の連続関数のグラフ有限個からなることから、Y が Jordan 可測であることが分かる。 ■

2. (1) $\Omega=\left\{(x,y);0\le x\le 2,\ 0\le y\le\dfrac{x}{2}\right\}$ であるから、

$$\iint_\Omega 3x^2y\,dx\,dy=\int_0^2\left(\int_0^{x/2}3x^2y\,dy\right)dx=\int_0^2 3x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x/2}dx=\int_0^2\frac{3}{8}x^4\,dx=\left[\frac{3x^5}{40}\right]_0^2$$
$$=\frac{3}{40}\cdot 2^5=\frac{3\cdot 2^2}{5}=\frac{12}{5}.$$

(2)

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}\left(\int_{y/2}^{\sqrt{\pi}/2}\sin\left(x^2\right)dx\right)dy=\int_0^{\sqrt{\pi}/2}\left(\int_0^{2x}\sin\left(x^2\right)dy\right)dx=\int_0^{\sqrt{\pi}/2}2x\sin(x^2)dx$$
$$=\left[-\cos\left(x^2\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}/2}=-\cos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2+1=1-\cos\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(3) ともに $z=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ の形をしているので、回転面である。$y=0$ での切口 $z=x^2$, $z=1-x^2$ を描いてみると、

$$\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\}$$

であることが分かる。これは縦線集合である。実際

$$D:=\{(x,y);x^2+y^2\le 1-(x^2+y^2)\}=\left\{(x,y);x^2+y^2\le\frac{1}{2}\right\}.$$

とおくとき、D で $x^2+y^2 \le 1-(x^2+y^2)$ が成り立つ。ゆえに Ω の体積は

$$\begin{aligned}
\mu_3(\Omega) &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{1-(x^2+y^2)} dz\right) dx\,dy \\
&= \iint_D \left[1-2(x^2+y^2)\right] dx\,dy = \iint_{\substack{0\le r\le 1/\sqrt{2} \\ 0\le\theta\le 2\pi}} (1-2r^2)\cdot r\;dr\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{1/\sqrt{2}} (r-2r^3)dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{2}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}. \blacksquare
\end{aligned}$$

3. (1) ともに底面積 1/2, 高さ 1 の三角錐の体積なので、$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{1}{6}$. (2) $(1,0)$ を $(12,11)$ に、$(0,1)$ を $(14,13)$ に写す線型写像は、$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. これは D を Ω に写す。(3) $(x,y)^T = \boldsymbol{\varphi}(u,v)$ という変数変換を行うと、$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\boldsymbol{\varphi}' = 12\cdot 13 - 14\cdot 11 = 2$ であるから、

$$\mu_2(\Omega) = \iint_\Omega dx\,dy = \iint_D \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = 2\int_D du\,dv = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

(あるいは線型写像は面積を行列式倍するという定理を使っても良い。) (4) 上と同様に

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega x\;dx\,dy &= \iint_D (12u+14v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = 24\iint_D u\;du\,dv + 28\iint_D v\;du\,dv \\
&= 24\cdot\frac{1}{6} + 28\cdot\frac{1}{6} = 4+\frac{14}{3} = \frac{26}{3}. \blacksquare
\end{aligned}$$

4. (1) 略 (2) $K_n := \{(x,y,z); \dfrac{1}{n^2} \le x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ とおくと、$\{K_n\}$ は Ω のコンパクト近似列である。被積分関数は Ω 上で符号が一定 (≤ 0) なので、求める広義積分は、K_n 上の積分の $n\to\infty$ での極限となる。

$$\begin{aligned}
\iiint_{K_n} \frac{\log(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz &= \iiint_{\substack{1/n\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le\pi, 0\le\phi\le 2\pi}} \frac{\log(r^2)}{r}\cdot r^2\sin\theta\;dr\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^\pi \sin\theta\;d\theta\cdot\int_0^{2\pi} d\phi\cdot 2\int_{1/n}^1 r\log r\;dr,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{1/n}^1 r\log r\;dr &= \left[\frac{r^2}{2}\log r\right]_{1/n}^1 - \int_{1/n}^1 \frac{r^2}{2}\cdot\frac{1}{r}dr = \frac{1^1}{2}\log 1 - \frac{1}{2n^2}\log\frac{1}{n} - \int_{1/n}^1 \frac{r}{2}\;dr \\
&= \frac{1}{2n^2}\log n - \left[\frac{r^2}{4}\right]_{1/n}^1 = \frac{1}{2n^2}\log n - \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2} \to -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

であるから

$$\iiint_\Omega \frac{\log(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz = 2\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -2\pi.$$

(3) $K_n := \{(x,y,z); 1 \le x^2+y^2+z^2 \le n^2\}$ とおくと、$\{K_n\}$ は Ω のコンパクト近似列である。被積分関数は Ω 上で符号が一定 (≥ 0) なので、求める広義積分は、K_n 上の積分の $n \to \infty$ での極限となる。

$$\iiint_{K_n} \frac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\substack{1\le r\le n\\ 0\le\theta\le\pi,0\le\phi\le 2\pi}} \frac{\log(r^2)}{r^4}\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$
$$= 8\pi\int_1^n r^{-2}\log r\,dr,$$

$$\int_1^n r^{-2}\log r\,dr = \left[-r^{-1}\log r\right]_1^n + \int_1^n r^{-1}\cdot\frac{1}{r}\,dr = -\frac{\log n}{n} + \frac{\log 1}{1} + \int_1^n r^{-2}\,dr$$
$$= -\frac{\log n}{n} + \left[-r^{-1}\right]_1^n = -\frac{\log n}{n} - \frac{1}{n} + 1 \to 1$$

であるから

$$\iiint_{\Omega} \frac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\,dx\,dy\,dz = 8\pi.\blacksquare$$

5. (1)

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(z(x^2+y^2+z^2)\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(y(x^2+y^2+z^2)\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(x(x^2+y^2+z^2)\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(z(x^2+y^2+z^2)\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y(x^2+y^2+z^2)\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x(x^2+y^2+z^2)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2yz-2yz \\ 2zx-2zx \\ 2xy-2xy \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

(2) 略 (3) $\boldsymbol{\varphi}(t) = t\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right) = t^3\begin{pmatrix} x(x^2+y^2+z^2)\\ y(y^2+y^2+x^2)\\ z(z^2+y^2+y^2)\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t) = t^3\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$ であるから、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 t^3\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\,dt = \frac{1}{4}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2.$$

(4) 上の (1), (2) から、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つことが分かる。C は閉曲線であるから、$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0.$ あるいは、$F(x,y,z) := \left(x^2+y^2+z^2\right)/4$ がポテンシャルであることが分かるので、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot dr = F(\boldsymbol{\varphi}(\pi)) - F(\boldsymbol{\varphi}(-\pi)) = F(0,1,0) - F(0,1,0) = 0.\blacksquare$$

6. (1)

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} -R\sin u\cos v\\ -R\sin u\sin v\\ R\cos u\end{pmatrix},\quad \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -R\cos u\sin v\\ R\cos u\cos v\\ 0\end{pmatrix}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} &= \det \begin{pmatrix} -R\sin u\cos v & -R\cos u\sin v & \boldsymbol{e}_1 \\ -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v & \boldsymbol{e}_2 \\ R\cos u & 0 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -R^2\cos^2 u\cos v \\ -R^2\cos^2 u\sin v \\ -R^2\sin u\cos u\cos^2 v - R^2\sin u\cos u\sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\cos^2 u\cos v \\ -R^2\cos^2 u\sin v \\ -R^2\sin u\cos u \end{pmatrix} \\
&= -R^2\cos u \begin{pmatrix} \cos u\cos v \\ \cos u\sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \right\| = R^2\cos u.$$

(2)

$$\mu_c(S) = \iint_{\substack{-\pi/2\le\theta\le\pi/2 \\ -\pi\le\phi\le\pi}} R^2\cos u\,du\,dv = R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos u\,du\int_{-\pi}^{\pi}dv = R^2\cdot 2\cdot 2\pi = 4\pi R^2. \blacksquare$$

この文書は

`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/tahensuu2/tahensuu2-2007-exam.pdf`

で入手可能である。