多変数の微分積分学 2 演習問題

桂田 祐史

2008 年 1 月 8 日配布, 1 月 11 日訂正

閉方体上の積分

1. 以下の各々について $U(f,A,\Delta)$, $L(f,A,\Delta)$ を求めよ。

(1) $A=[0,1]$, $f(x)=x^2$, $N\in\mathbf{N}$, $\Delta=\left\{\dfrac{j}{N}\right\}_{j=0}^{N}$.

(2) $A=[0,1]\times[0,1]$, $f(x,y)=x^2y^2$, $N\in\mathbf{N}$, $\Delta=(\Delta_1,\Delta_2)$, $\Delta_1=\Delta_2=\left\{\dfrac{j}{N}\right\}_{j=0}^{N}$.

2. 講義ノート p.20 の命題 1.1.1 (1) を Riemann 和や Darboux の定理を用いずに証明せよ。 — 自力で解けたらレポートして下さい。

3. 次の二重積分を計算せよ。

(1) $A=[0,1]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ とするとき、$\displaystyle\iint_A x\sin y\,dx\,dy$

(2) $A=[0,1]\times[0,1]$ とするとき、$\displaystyle\iint_A \frac{x^3}{1+y^2}\,dx\,dy$

(3) $\displaystyle\iint_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2}} (y-x)^2\,dx\,dy$

(4) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,2]} \sqrt{x+y}\,dx\,dy$

(5) $A=\{(x,y);|x|\le 1,\ |y|\le 1\}$ とするとき、$\displaystyle\iint_A \frac{dx\,dy}{(x+y+4)^2}$

(6) $\displaystyle\iint_{[-1,1]\times[0,1]} xye^{-xy^2}\,dx\,dy$

(7) $\displaystyle\iint_{[0,\pi/2]\times[0,2]} x^2y\sin(xy^2)\,dx\,dy$

(8) $\displaystyle\iint_{\left[\frac{3}{2},2\right]\times[0,\sqrt{2}/4]} \frac{\sqrt{(2x+1)(2x-3)}}{\sqrt{1-4y^2}}\,dx\,dy$

答 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{\pi}{16}$ (3) $\dfrac{4}{3}$ (4) $\dfrac{4}{15}\left(9\sqrt{3}-4\sqrt{2}-1\right)$ (5) $\log\dfrac{4}{3}$ (6) $1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e}-e\right)$ (7) $\dfrac{\pi^2}{16}$ (8) $\dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{4}+\log 2-\log\left(3+\sqrt{5}\right)\right)$

ヒント (6), (7) のように x と y が非対称の場合、どちらの変数で先に積分するかが問題となる。これはやってみないと分からない (一つの方法でやってダメならば、もう一方もやってみること)。

複雑な式の場合、見通しをつけるには、片方の変数を「見ない」のが有効なことがある。例えば (6) の場合、

- x で先に積分する場合の見通しをつけるには、$y=1$ とした xe^{-x} を考える (これは部分積分すればできる)
- y で先に積分する場合の見通しをつけるには、$x=1$ とした ye^{-y^2} を考える (これは置換積分すればできる)

Jordan 可測集合上の積分 (1)

4. (**縦線集合**) 例にならって閉領域 Ω を二通りに表示せよ。

例. x 軸および半円周 $x^2+y^2=1,\ y>0$ によって囲まれる閉領域

$$\Omega=\left\{(x,y);-1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\right\}=\left\{(x,y);0\leq y\leq 1,\ -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq\sqrt{1-y^2}\right\}$$

(1) 直線 $y=x,\ y=0,\ x=1$ によって囲まれる閉領域

(2) 直線 $y=2x,\ y=2,\ x=0$ によって囲まれる閉領域

(3) 直線 $y=2-x,\ y=0$ および曲線 $y=x^2$ によって囲まれる閉領域

(4) 直線 $y=2,\ x=0$ および曲線 $y=\sqrt{x}$ によって囲まれる閉領域

5. 次の二重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_\Omega(2+x-y)\,dx\,dy$, Ω は 3 直線 $y=2-x,\ y=0,\ x=0$ で囲まれる三角形 (周及び内部)。

(2) $\displaystyle\iint_\Omega y^2\sqrt{y-x}\,dx\,dy$, Ω は 3 直線 $y=x,\ y=1,\ x=0$ で囲まれる三角形 (周及び内部)。

(3) $\displaystyle\iint_\Omega x^3\,dx\,dy$, $\Omega=\{(x,y);x^2+y^2\leq a^2\}$. ただし a は正定数。

(4) $\displaystyle\iint_\Omega e^{x+y}\,dx\,dy$, Ω は 3 曲線 $y=0,\ y=\log x,\ x=2$ で囲まれる閉領域。

(5) $\displaystyle\iint_\Omega xy^2\,dx\,dy$, Ω は 2 曲線 $x=y^2,\ y=x^2$ で囲まれる閉領域。

(6) $\displaystyle\iint_\Omega\sqrt{ax-y^2}\,dx\,dy$, $\Omega=\{(x,y);y^2\leq ax,\ x\leq b,\ y\geq 0\}$. ただし $a,\ b$ は正定数。

(7) $\displaystyle\iint_\Omega\sqrt{xy}\,dx\,dy$, $\Omega=\{(x,y);x\geq 0,\ y\geq 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 1\}$.

(8) $\displaystyle\iint_\Omega(x+y)\,dx\,dy$, Ω は 3 直線 $y=2x,\ y=\dfrac{x}{2},\ x+y=2$ で囲まれる三角形 (周及び内部)。

(9) $\displaystyle\iint_\Omega(x^2+y^2)\,dx\,dy$, Ω は 3 曲線 $y=0,\ x=2a,\ 2ay=x^2$ で囲まれる閉領域。 ただし a は正定数。

(多変数の微分積分学 2　2007 年 10 月 18 日)

5 の答 (結果のみ)　(1) 4　(2) $\dfrac{4}{27}$　(3) 0　(4) e　(5) $\dfrac{3}{56}$　(6) $\dfrac{\pi}{8}ab^2$　(7) $\dfrac{1}{45}$　(8) $\dfrac{8}{9}$　(9) $\dfrac{416}{105}a^4$

6.

(1) 柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ および $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ によって切りとられる第 1 象限 ($x>0,\ y>0,\ z>0$ の範囲のこととする) の体積を求めよ。

(2) 柱面 $x^2+y^2=4$ と二平面 $z=y+1,\ z=0$ とで囲まれる立体の体積を求めよ。

(3) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ および $z=k-\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}$ で囲まれる立体の体積を求めよ。ただし, $k>0$.

(4) 曲面 $kz=x^2+y^2$ と平面 $x+z=1$ とで囲まれる立体の体積を求めよ。ただし, $k>0$.

答 (結果のみ)　(1) $\dfrac{2}{3}abc$　(2) $6\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$　(3) $\dfrac{\pi}{2}k^2\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$　(4) $\dfrac{\pi}{2}k\left(1+\dfrac{k}{4}\right)^2$

Jordan 可測集合上の積分 (2)

7. (変数変換のヤコビアン)　つぎの変換のヤコビアンを求めよ。また与えられた xy 平面上の図形 Ω に対して、閉領域 D をどう取れば[1] D の像が Ω になるか ($a,\ b$ は正定数とする)。

(1) $x=u+v,\ y=u-v;\ \Omega=(0,1),\ (-1,0),\ (0,-1),\ (1,0)$ を頂点とする四辺形の内部および周。

(2) $x=a+r\cos\theta,\ y=r\sin\theta;\ \Omega=\{(x,y);(x-a)^2+y^2\le a^2,\ y\ge 0\}$.

(3) $x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta;\ \Omega=\left\{(x,y);\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$.

8. (重積分)　次の二重積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy,\quad \Omega=\{(x,y);1\le x\le 3,\ 1\le y\le 3\}$.

(2) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x-2y}{(2x+y)^3}\,dx\,dy,\quad \Omega$ は $(0,2),\ (1,0),\ (3,1),\ (2,3)$ を頂点とする四辺形の内部および周。

(3) $\displaystyle\iint_\Omega y(x+y)\,dx\,dy,\quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2\le a^2\}$.

(4) $\displaystyle\iint_\Omega x\,dx\,dy,\quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

(5) $\displaystyle\iint_\Omega xy^2\,dx\,dy,\quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

(6) $\displaystyle\iint_\Omega e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,\quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2\le a^2\}$.

(7) $\displaystyle\iint_\Omega y\,dx\,dy,\quad \Omega=\{(x,y);\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

(8) $\displaystyle\iint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy,\quad \Omega=\{(x,y);\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$.

[1]答は一通りとは限らない。とにかく一つ選べ。

答（結果のみ） (1) 0　(2) $-\dfrac{3^3\cdot 5}{2^4\cdot 7^2}=-\dfrac{135}{784}$　(3) $\dfrac{\pi}{4}a^4$　(4) $\dfrac{a^3}{3}$　(5) $\dfrac{1}{15}$　(6) $\pi(1-e^{-a^2})$
(7) $\dfrac{ab^2}{3}$　(8) $\dfrac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$

9.（体積）

(1) 2 つの曲面 $kz=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, $x^2+y^2=c^2$, および平面 $z=0$ によって囲まれる立体の体積を求めよ。ただし, $a,\ b,\ c,\ k\geq 0$.

(2) 曲面 $z=xye^{-(x^2+y^2)}$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$, 柱面 $x^2+y^2=1$ および $z=0$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

解答（結果のみ） (1) $\dfrac{\pi c^4}{4k}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$　(2) $\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{2}{e}\right)$

10.（重積分）　つぎの三重積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$, $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$.

(2) $\displaystyle\iiint_\Omega (1-x^2-y^2-z^2)\,dx\,dy\,dz$, $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leq 1\}$.

(3) $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}\,dx\,dy\,dz$, $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$.

(4) $\displaystyle\iiint_\Omega dx\,dy\,dz$, Ω は平面 $y=0$, $x\sin\beta-y\cos\beta=0$ $(y\geq 0)$ および球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ で囲まれる楔形の領域。

解答（結果のみ） (1) $\dfrac{\pi}{16}$　(2) $\dfrac{8}{15}\pi$　(3) $\dfrac{\pi}{6}$　(4) $\dfrac{2}{3}\beta a^3$

11.（体積）　つぎの図形の体積を求めよ。$a,\ b,\ c$ は正の定数とする。

(1) $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2\leq 1,\ x\leq z\leq 2x+1\}$

(2) $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2\leq z^2,\ 0\leq z\leq a\}$

(3) $\Omega=\{(x,y,z);0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ 0\leq z\leq x+y\}$

(4) $\Omega=\{(x,y,z);\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1,\ x\leq z\leq a\}$

(5) $\Omega=\{(x,y,z);\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1-z,\ 0\leq z\leq 1\}$

(6) $\Omega=\{(x,y,z);\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1,\ z\geq\dfrac{c}{2}\}$

解答（結果のみ） (1) π　(2) $\dfrac{\pi}{3}a^3$　(3) 1　(4) $\dfrac{3}{4}\pi a^2 b$　(5) $\dfrac{\pi}{2}ab$　(6) $\dfrac{5}{24}\pi abc$

重積分の応用 (付録 B)

12.　次の各物体が密度一様としたときの，その物体の重心を求めよ.

(1) 半球 $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le a^2, \quad z \ge 0\}$

(2) 1/8 球 $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le a^2, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0\}$

(3) 半円板 $\{(x,y); x^2+y^2 \le a^2, \quad x \ge 0\}$

(4) 1/4 円板 $\{(x,y); x^2+y^2 \le a^2, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0\}$

(5) 3 点 $(-a,0)$, $(a,0)$, (b,c) を頂点とする三角形 (ただし a, b, $c>0$)

解答　(1) $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(0, 0, \dfrac{3a}{8}\right)$　(2) $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(\dfrac{3a}{8}, \dfrac{3a}{8}, \dfrac{3a}{8}\right)$　(3) $(\overline{x},\overline{y}) = \left(0, \dfrac{4a}{3\pi}\right)$　(4) $(\overline{x},\overline{y}) = \left(\dfrac{4a}{3\pi}, \dfrac{4a}{3\pi}\right)$　(5) $(\overline{x},\overline{y}) = \left(\dfrac{b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$

13.　慣性モーメントを求めよ．ただし，密度 ρ は一様とする.
(1) 質量 m, 長さ 2ℓ, 半径 a の円柱: 中心を通って主軸に垂直な軸のまわり
(2) 半楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \le 1$, $z \ge 0$: z 軸のまわり

解答　(1) $2\pi\rho\ell a^2\left(\dfrac{\ell^2}{3}+\dfrac{a^2}{4}\right)$　(2) $\dfrac{2\pi}{15}\rho abc\left(a^2+b^2\right)$

14.　慣性モーメントと回転半径を求めよ.
(1) 球; 直径のまわり　(2) 内半径 α, 外半径 β の中空円柱; 円柱の主軸のまわり　(3) 高さ h, 底面の半径 a の円錐; 主軸のまわり

解答　(1) $\dfrac{8}{15}\pi\rho a^5$, $\sqrt{\dfrac{2}{5}}a$　(2) $\dfrac{\pi}{2}\rho h\left(\beta^4-\alpha^4\right)$, $\sqrt{\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{2}}$　(3) $\dfrac{\pi}{10}\rho h a^4$, $\sqrt{\dfrac{3}{10}}a$

広義積分

15.　次の広義積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_\Omega \log(x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad \Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}.$

(2) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{x^2y^3}\,dx\,dy, \quad \Omega = \{(x,y); x \ge 1,\ y \ge 1\}.$

(3) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \quad \Omega = \left\{(x,y); 0 \le x \le 2,\ x \le y \le \sqrt{2}x\right\}.$

(4) $\displaystyle\iint_\Omega e^{-x}\cos xy\,dx\,dy, \quad \Omega = \{(x,y); x \ge 0,\ 0 \le y \le 1\}.$

(5) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \quad \Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$

(6) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\log(x^2+y^2)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\,dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y); x^2+y^2\geq 1\}.$

解答 (結果のみ) (1) $-\pi$ (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) $2\left[\log\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$ (4) $\pi/4$ (5) $-\pi$ (6) 4π (実は (4) だけは、完答が少し難しい。)

16. (広義積分) つぎの広義積分の収束、発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dx\,dy}{\log(1+x^2+y^2)}, \quad \Omega=\{(x,y); x^2+y^2\leq 1\}.$

(2) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\sin x}{y^2}dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y); 0\leq x\leq y\leq \pi\}.$

(3) $\displaystyle\iint_\Omega x^2e^{-xy}\,dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y); 0\leq x\leq 1,\ y\geq x\}.$

(4) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y); x\geq 0,\ y\geq 0\}.$

(5) $\displaystyle\iint_\Omega e^{-(x+y)}dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y); x\leq 0,\ y\geq 0\}.$

(6) $\displaystyle\iint_\Omega e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y); x+y\geq 0,\ y\geq 0\}.$

解答 (結果のみ) (1) 発散 (2) 収束 (3) 収束 (4) 発散 (5) 発散 (6) 収束

17.

(1) α を正の定数とする時、広義積分 $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$ の収束発散を調べよ。

(2) β を正の定数とする時、広義積分 $\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2\geq 1}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\beta/2}}$ の収束発散を調べよ。

18. $m\in\mathbf{R}$, $\sigma>0$ を与えられた定数とするとき、

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x\in\mathbf{R})$$

で $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を定義すれば (正規分布の確率密度関数)、

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx=1, \quad \int_{\mathbf{R}} xf(x)\,dx=m, \quad \int_{\mathbf{R}}(x-m)^2f(x)\,dx=\sigma^2$$

が成り立つことを示せ (全確率は 1, 平均は m, 分散は σ^2)。

ベクトル場の微分演算

(要するに $\mathrm{grad} = \nabla$, $\mathrm{div} = \nabla\cdot$, $\mathrm{rot} = \nabla\times$, $\triangle = \nabla\cdot\nabla$ の定義を覚えて、計算が出来ればよい。全部解こうとする必要はない。**23** の結果は知っておいた方が吉。)

19. (1) $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1$ を求めよ。(2) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を満たさない $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の例をあげよ。

19 の解答 (1) $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ (2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_2$ とすればよい (後は略)。

20. 3 次元空間内の 3 点 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に対して、$\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$ は、三角形 $\boldsymbol{abc}$ の面積ベクトルであることを示せ。

21. 次の関数 F に対して、∇F $(= \mathrm{grad}\, F)$, $\triangle F$ を計算せよ。(1) $F(x,y,z) = x^2y^3z^4$ (2) $F(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (3) $F(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$

21 の解答 (1 月 8 日配布したものには誤植あり) (1) $\mathrm{grad}\, F = (2xy^3z^4, 3x^2y^2z^4, 4x^2y^3z^3)^T$, $\triangle F = 2yz^2(y^2z^2 + 3x^2z^2 + 6x^2y^2)$ (2) $\mathrm{grad}\, F = -\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)^T$, $\triangle F = 0$ (3) $\mathrm{grad}\, F = \dfrac{1}{x^2+y^2}(x,y)^T$, $\triangle F = 0$

22. 次の各 $\boldsymbol{f}$ に対して、$\mathrm{div}\, \boldsymbol{f}$, $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}$ を求めよ。
(1) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x,y,z)^T$ (2) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x+y+z, \cos(x+y+z), x^2\sin^{-1}(yz))^T$
(3) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x\cos y, x\sin y, z)^T$ (4) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r}\right)^T$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

22 の解答 (1) $\mathrm{div}\, \boldsymbol{f} = 3$, $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ (2) $\mathrm{div}\, \boldsymbol{f} = 1 - \sin(x+y+z) + \dfrac{x^2y}{\sqrt{1-y^2z^2}}$,

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} = \left(\frac{x^2z}{\sqrt{1-y^2z^2} + \sin(x+y+z)}, 1 - 2x\sin^{-1}(yz), -\sin(x+y+z) - 1\right)^T$$

(3) $\mathrm{div}\, \boldsymbol{f} = (x+1)\cos y + 1$, $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} = (0, 0, (1+x)\sin y)^T$ (4) $\mathrm{div}\, \boldsymbol{f} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$

23. 次の (1)–(4) を証明せよ。ただし現れる関数とベクトル場は十分滑らかと仮定する。

(1) $\nabla \cdot \nabla F = \triangle F$. すなわち $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, F) = \triangle F$.

(2) $\nabla \times \nabla F = \boldsymbol{0}$. すなわち $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, F) = \boldsymbol{0}$.

(3) $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{0}$. すなわち $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}) = 0$.

(4) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) - \triangle \boldsymbol{f}$. すなわち $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{f}) - \triangle \boldsymbol{f}$.

24. 次の (1)–(4) が成り立つことを示せ。ただし現れる関数とベクトル場は十分滑らかと仮定する。
(1) n 変数関数 F, G に対して、$\mathrm{grad}(FG) = F\,\mathrm{grad}\, G + G\,\mathrm{grad}\, F$.
(2) n 変数関数 F および n 次元ベクトル場 $\boldsymbol{g}$ に対して、$\mathrm{div}(F\boldsymbol{g}) = F\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{g} + (\mathrm{grad}\, F) \cdot \boldsymbol{g}$.
(3) 3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ に対して、$\mathrm{div}(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{g}$.
(4) n 変数関数 F, G に対して、$\mathrm{div}(F\,\mathrm{grad}\, G) = F \triangle G + (\mathrm{grad}\, F) \cdot (\mathrm{grad}\, G)$.

25.　3 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ が弾性波の方程式

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu \triangle \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})$$

を満たすとき (ここで ρ, μ, λ は正定数)、$p := \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{s} := \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ はそれぞれ

$$\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \triangle p \quad \text{(P 波の方程式)},$$

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} = \mu \triangle \boldsymbol{s} \quad \text{(S 波の方程式)}$$

を満たすことを示せ。(波動方程式を知っている人向け: P 波と S 波の速さはいくらか？)

曲線の長さ

(この講義では曲線の長さは範囲外扱いとする。次の **26**, **27** 番は参考まで。)

26.　次の曲線の長さを求めよ。

(1) $a > 0$ とするとき、$\boldsymbol{r} = (a\cos t, a\sin t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$

(2) $a > 0$ とするとき、$\boldsymbol{r} = \left(t, \frac{a}{2}\left(e^{t/a} + e^{-t/a}\right)\right)$ $(t_1 \le t \le t_2)$

(3) $\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t, t)$ $(0 \le t \le 1)$

(4) $\boldsymbol{r} = (\cos 2t, \sin 2t, 3t)$ $(1 \le t \le 3)$

(5) $\boldsymbol{r} = \left(e^{3t}, e^{-3t}, 3\sqrt{2}t\right)$ $(0 \le t \le 1/3)$

(6) $\boldsymbol{r} = (t, \log t)$ $(\frac{1}{2} \le t \le 2)$

(7) $\boldsymbol{r} = (t, \log\cos t)$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{3})$

(8) $\boldsymbol{r} = \left(t, \log(1 - t^2)\right)$ $(0 \le t \le \frac{3}{4})$

(9) $\boldsymbol{r} = (t, \cosh t)$ $(-1 \le t \le 1)$

(10) $\boldsymbol{r} = \left(e^t \cos t, e^t \sin t\right)$ $(0 \le t \le 2)$

26 の解答　(1) $2\pi a$　(2) $a\left(\sinh\frac{t_2}{a} - \sinh\frac{t_1}{a}\right)$　(3) $\sqrt{2}$　(4) $2\sqrt{13}$　(5) $e - 1/e$　(6) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$
(7) $\log\left(2 + \sqrt{3}\right)$　(8) $-\frac{3}{4} + \log 7$　(9) $2\sinh 1$　(10) $\sqrt{2}(e^2 - 1)$

27.　$a > 0$ とするとき、曲線 $y = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}$ $(0 \le x \le a)$ の長さを求めよ。

27 の解答　$\frac{3}{2}a$

線積分の定義と基本的性質

(ここの線積分の計算は出来ないといけない。)

28. 次のベクトル場 $\boldsymbol{f}$, 曲線 C に対して、線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{f}(x,y)=\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1-y^2}}, \sqrt{1-x^2}\right)^T$, C: $\boldsymbol{r}=(t,t^2)^T$ $(t\in[0,1])$

(2) $\boldsymbol{f}(x,y)=(-y,x)^T$, C: $\boldsymbol{r}=(a\cos\theta, b\sin\theta)^T$ $(\theta\in[0,\pi/2])$ ただし a, b は正定数とする.

(3) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(x,y,-z)^T$, C: $\boldsymbol{r}=(4\cos\theta, 2\sin\theta, 4\cos\theta+1)^T$ $(\theta\in[0,\pi/2])$

28 の解答 (1) $\dfrac{7}{6}$ (2) $\dfrac{\pi ab}{2}$ (3) 6

29. $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^2+y^2, 2xy)^T$ とするとき、次の各曲線 C に対して線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

(1) C: $\boldsymbol{r}=(\cos t, \sin t)^T$ $(t\in[0,\pi])$

(2) C: $\boldsymbol{r}=\begin{cases}(1,t)^T & (t\in[0,1])\\ (2-t,1)^T & (t\in[1,3])\\ (-1,4-t)^T & (t\in[3,4])\end{cases}$

(3) C: $\boldsymbol{r}=(-t, t^2-1)^T$ $(t\in[-1,1])$

29 の解答 (1) $-\dfrac{2}{3}$ (2) $-\dfrac{2}{3}$ (3) $-\dfrac{2}{3}$

30. $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(z,x,y)^T$ とするとき、次の各曲線 C に対して、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。ただし，α, β, γ は実定数とする。
(1) C: $\boldsymbol{r}=(\alpha t, \beta t, \gamma t)^T$ $(t\in[0,1])$ (2) C: $\boldsymbol{r}=(\alpha t, \beta t^2, \gamma t^3)^T$ $(t\in[0,1])$

30 の解答 (1) $(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)/2$ (2) $\dfrac{3}{5}\beta\gamma+\dfrac{1}{4}\gamma\alpha+\dfrac{2}{3}\alpha\beta$

線積分とグリーンの定理

(2007 年度は範囲外かも…)

31. なめらかなジョルダン閉曲線 C によって囲まれた領域 D の面積は、$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C x\,dy-y\,dx$ に等しいことを用いて、次の曲線が囲む図形の面積を求めよ。

(1) 楕円 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

(2) アステロイド $x=a\,(\cos\theta)^3$, $y=b(\sin\theta)^3$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

(3) $x=a\cos 2\theta$, $y=a\sin 3\theta$ $(-\dfrac{2}{3}\pi\le\theta\le\dfrac{2}{3}\pi)$

(4) $x = \theta(\theta^2 - 1)$, $y = 1 - \theta^4$ $(-1 \leq \theta \leq 1)$

(5) $x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta$, $y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

(6) $x = (1 + \cos^2\theta)\sin\theta$, $y = -\sin^2\theta\cos\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$

(7) $x = a\cos\theta$, $y = b\sin 2\theta$ $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

31 の解答　(1) πab　(2) $\frac{3}{8}\pi ab$　(3) $\frac{6\sqrt{3}}{5}a^2$　(4) $\frac{16}{35}$　(5) $6\pi a^2$　(6) $\frac{\pi}{16}$　(7) $\frac{4}{3}ab$

32.　次の各ベクトル場 $\boldsymbol{f}$, 曲線 C に対して、線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{f}(x, y) = (y^3 - x^2y, 4xy^2)^T$, C は、2 つの円 $x^2 + y^2 = 4$ と $x^2 + y^2 = 9$ とによって囲まれる領域の境界を正の向きに一周する曲線とする。

(2) $\boldsymbol{f}(x, y) = (b^2x^2 + a^2y^2, 2axy^2)^T$, C は 2 つの楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ および $\dfrac{4x^2}{a^2} + \dfrac{4y^2}{b^2} = 1$ で囲まれる領域の境界を正の向きに一周する曲線とする.

(3) $\boldsymbol{f}(x, y) = (-y^2, x^2)^T$, C は、$(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 1)$ を頂点とする四辺形の境界を正の向きに一周する曲線とする。

32 の解答　(1) $\frac{65}{2}\pi$　(2) $\frac{15}{32}\pi a^2b^3$　(3) 3

33.　なめらかなジョルダン閉曲線 C で囲まれた領域を D とするとき、

$$\int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 2\pi & (D \text{ が原点を含むとき}) \\ 0 & (\overline{D} \text{ が原点を含まないとき}) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ.

線積分とポテンシャル

(重要。次の問題 **34** は定番の問題。**35**~**38** はいわゆる過去問です (総合問題的)。)

34.　次のベクトル場はポテンシャルを持つことを示し、それを求めよ。

(1) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)^T$.

(2) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (2xy, x^2 - z, -y)^T$.

(3) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (2xy\cos z, x^2\cos z, -x^2y\sin z)^T$.

(4) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (x, y, z)^T/r^3$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

34 の解答　(結果のみ) (1) $xy + yz + zx$　(2) $x^2y - yz$　(3) $x^2y\cos z$　(4) $-1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

35. $\mathbf{R}^2$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y + 2xy \\ x^3 + x^2 + 2y \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。
(1) $\boldsymbol{f}$ がポテンシャル持つことを示せ。(2) $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルを (一つ) 求めよ。(3) 次の各曲線 C_i にそった線積分 $\displaystyle\int_{C_i} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。
C_1: $(\cos 2t, \sin 3t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$, $\quad C_2$: 折れ線 $(0,0) \to (-2,0) \to (-2,4) \to (2,4)$.

35 の略解 (1) $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ で、$\boldsymbol{f}$ の定義域 $\mathbf{R}^2$ は単連結領域なので、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。(2) $x^3 + x^2y + y^2 =: F(x,y)$ (3) $\displaystyle\int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = F(1,0) - F(1,0) = 0$, $\displaystyle\int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = F(2,4) - F(0,0) = 64$

36. ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{f}(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ で定めるとき、以下の問に答えよ。

(1) xy 平面における円 $x^2 + y^2 = a^2$ (a は正の定数) を正の向き (反時計回り) に一周する閉曲線を C とするとき、線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ を計算せよ。

(2) $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = 0$ であることを示せ。

(3) $\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つか、理由をつけて答えよ。

(4) 円 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ を正の向きに一周する閉曲線を $\widetilde{C}$ とするとき、$\displaystyle\int_{\widetilde{C}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

36 の略解 (1) 2π (2) (略) (3) 閉曲線 C 上の線積分が 0 でないので、ポテンシャルを持たない。(4) 0 (これは $\widetilde{C}$ が、単連結領域 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x > 0\}$ に含まれることから、計算せずに分かる。

37. $\mathbf{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (2xy, x^2 - z, -y)^T$ について以下の問に答えよ。
(1) $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}$ を求めよ。(2) $\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つかどうか調べよ (理由を述べよ)。持つ場合はそれを求めよ。(3) 折れ線 $(1,1,1) \to (2,3,1) \to (3,3,1)$ を C とするとき、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

37 の解答 (これは宿題にしようかと考えているので、後で解答を説明します。)

38. $\mathbf{R}^2$ から原点を除いた集合 Ω で定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)^T$$

に対して，以下の問に答えよ.
(1) 原点中心半径 1 の円を反時計回りに一周する曲線を C とするとき、線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。
(2) $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルは存在しないことを示せ。(3) 右半平面 $H = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x > 0\}$ に $\boldsymbol{f}$ を制限した $\boldsymbol{f}|_H$ のポテンシャルを求めよ。

38 の略解. (1) 2π (2) 閉曲線 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ が 0 でないからポテンシャルは存在しない。
(3) $\tan^{-1} \dfrac{y}{x}$ ($\tan^{-1}$ は主値とする。)

曲面積

(ここは 2007 年度もパスか…)

39.　次の図形の全表面積を求めよ。ただし $a > 0$.

(1) $D = \{(x, y, z); 0 \le z \le 1 - x - y,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

(2) $D = \left\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge \dfrac{1}{2},\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$

(3) $D = \left\{(x, y, z); x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le a\right\}$

(4) $D = \left\{(x, y, z); x^2 + y^2 \le 1 - z,\ 0 \le z \le 1\right\}$

39 の解答（結果のみ）　(1) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ (2) $\dfrac{37}{48}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (3) $\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2$ (4) $\dfrac{5\left(\sqrt{5}+1\right)}{6}\pi$

40.　曲面 $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 2uv$ $(u^2 + v^2 \le 1)$ の面積を求めよ。

40 の解答（結果のみ）　$\dfrac{2}{3}\pi\left(3\sqrt{3} - 1\right)$

41.　球面 $r = a$ が錐面 $\theta = \alpha$ によって切り取られる部分の面積を求めよ。

41 の解答（結果のみ）　$2\pi a^2 (1 - \cos\alpha)$

42.　錐体 $z^2 = a(x^2 + y^2)$, $a > 0$ の中にある球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2bz$ の面積を求めよ。

42 の解答（結果のみ）　$\dfrac{4\pi ab^2}{1+a}$

43.　円錐面 $z^2 = 2xy$ の、平面 $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$ によってかぎられた部分の面積を求めよ。ただし $a > 0$.

43 の解答（結果のみ）　$\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$

44.　次の曲線を x 軸のまわりに回転して生ずる曲面の面積を求めよ。

(1) $z = 0$, $y = x^2$ $(0 \le x \le 1)$

(2) $z = 0$, $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$

(3) $z = 0$, $y = \sqrt{x}$ $(0 \le x \le 1)$

44 の解答（結果のみ）　(1) $\dfrac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$ (2) $2\pi\left(\sqrt{2} + \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$ (3) $\dfrac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$

45.　半径 a の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ のうちで平面 $x = x_0$ および $x = x_0 + h$, $h > 0$ の間にある部分の面積を求めよ。

45 の解答 (結果のみ) $2\pi ah$

46. 輪環面 (トーラス) $z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2 = z^2$, $0 < a < b$ の全表面積を求めよ。

46 の解答 (結果のみ) $4\pi^2 ab$

面積分

(**49**, **50**, **51** などを解いておこう。)

47. 正則パラメーター曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(u, v)$ があるとき

$$E := \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\right), \quad F := \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right), \quad G := \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right)$$

とおくと

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right\| = \sqrt{EG - F^2}$$

であることを示せ。

48. S は球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $r > 0$ とするとき、面積分

$$\int_S \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}$$

を、次の各場合に求めよ。
(1) $0 \le a \le r$ のとき　(2) $a > r$ のとき

48 の解答 (結果のみ) (1) $4\pi r$　(2) $\dfrac{4\pi r^2}{a}$

49. 曲面 S が

$$\boldsymbol{r} = (u\cos v, u\sin v, u^2)^T, \quad (u, v) \in [0, a] \times [0, \pi]$$

で与えられるとき、$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)^T$ に対して、面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$ を求めよ。

49 の解答 (結果のみ) $\dfrac{\pi}{4}a^4 - \dfrac{4}{15}a^5 - \dfrac{4}{7}a^7$

50. 球面

$$S\colon \boldsymbol{r} = (a + R\sin\theta\cos\phi, b + R\sin\theta\sin\phi, c + R\cos\theta)^T, \quad (\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

上での、$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (x, y, z)^T$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$ を求めよ。

50 の解答 (結果のみ) $4\pi R^3$

51. $a > b > 0$ とするとき、輪環面 (トーラス)

$$S\colon \boldsymbol{r} = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)^T, \quad (u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

上での、$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x,y,z)^T$ の面積分

$$I = \int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \quad (\boldsymbol{n} \text{ は } S \text{ の標準的単位法線ベクトル})$$

を求めよ。また、S が囲む図形の体積 V と I との関係を求めよ。

51 の解答 (結果のみ) $I = 6\pi^2 ab^2$, $I = 3V$

ガウスの発散定理

(**54**, **55** が解けると良いですね。)

52. (**グリーンの積分公式**) Ω をガウスの発散定理が成立する領域で、S をその境界、$\boldsymbol{n}$ を外向き単位法線ベクトルとするとき、次の (1)-(4) を示せ。ただし関数 f に対して、$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ とする。

(1) $$\iiint_\Omega (f \triangle g + \nabla f \cdot \nabla g)dx\,dy\,dz = \int_S f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} d\sigma.$$

(2) $$\iiint_\Omega (f \triangle g - g \triangle f)dx\,dy\,dz = \int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right) d\sigma.$$

(3) $$\iiint_\Omega (f \triangle f + \|\nabla f\|^2)dx\,dy\,dz = \int_S f\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} d\sigma.$$

(4) $$\iiint_\Omega \triangle f\; dx\,dy\,dz = \int_S \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} d\sigma.$$

53. 問題 50, 51 をガウスの定理を用いて解け。

54. S は半径 a, 高さ h の直円柱の境界、$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x,y,z)^T$ とするとき、$\displaystyle\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$ を求めよ。

54 の解答 (結果のみ) $3\pi a^2 h$

55. 正定数 R, 実定数 α, β, γ に対して、

$$S\colon \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(\theta,\phi) := \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\phi \\ R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \quad ((\theta,\phi) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]),$$
$$\boldsymbol{f}(x,y,z) := (\alpha, \beta, \gamma) \quad ((x,y,z) \in \mathbf{R}^3)$$

とおくとき、$\displaystyle\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$ を求めよ。ただし $\boldsymbol{n}$ は S の標準的単位法線ベクトルとする。

55 の解答 (結果のみ) $\gamma\pi R^2$

56.　任意の四面体の各面の面積ベクトル (ただし向きは外側とする) の和は $\mathbf{0}$ であることを示せ。

ストークスの定理

57.　$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ とするとき、$\boldsymbol{f}(x,y,z) := (\alpha,\beta,\gamma)^T$ とおく (定数ベクトル場)。
(1) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (0, f(x), g(y) - h(x))^T$ (f, g, h は C^1 級の関数) とするとき、$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ を f, g, h で表せ。　(2) $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}$ を満たすベクトル場 $\boldsymbol{v}$ を 1 つ求めよ (ヒント: たくさんあるが、簡単なものを 1 つだけ選べばよい)。　(3) パラメーター曲面 S と、曲線 C を, S: $\boldsymbol{r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)^T$ ($(\theta,\phi) \in [0,\pi/2] \times [0,2\pi]$), C: $\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t, 0)^T$ ($t \in [0,2\pi]$) で定めるとき、C^2 級の $\boldsymbol{v}$ に対して、一般に $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$ が成り立つことが知られている (Stokes の定理)。このことを利用して、$\displaystyle\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$ を求めよ。

注意　この「演習問題」のプリント (特に以前に配られたもの) が欲しければ、`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/tahensuu2/exercise-2007-koukai.pdf` にアクセスせよ。