(2013 年 8 月 14 日 19 時 6 分)

2013 年度 多変数の微分積分学1・同演習 期末試験問題

2013 年 7 月 27 日 (土) 13:00〜15:00 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

次の **1** から **6** に解答せよ。**3A** と **3B** はいずれか一方のみを選べ (**3B** は **3A** の 1.5 倍の配点)。

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の開集合、閉集合、有界集合の定義を述べよ。　(2) 「$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ が連続、$a \in \mathbf{R}$ とするとき、$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である」という定理を用いて、$A := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 1 < x^2+y^2 < 4\}$ が $\mathbf{R}^2$ の開集合であることを示せ。他の定理を用いる場合はそれを記すこと。　(3) (2) の A は有界であるかどうか、根拠をつけて答えよ。

2. $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ について、(a) f は Ω で各変数につき偏微分可能, (b) f は Ω で連続, (c) f は Ω で全微分可能, (d) f は Ω で C^1 級, という 4 つの条件を考える。

(1) 条件 (d) が成り立つとはどういうことか定義を述べよ。　(2) 条件 (a), (b), (c), (d) 間の関係を説明せよ。

(3) 次式で定義される $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が条件 (a), (b), (c), (d) を満たすかどうか調べよ (もちろん $\Omega = \mathbf{R}^2$ とする)。

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y} & (x+y \neq 0) \\ 0 & (x+y=0). \end{cases}$$

3A. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ($r \geq 0$, $\theta \in [0,2\pi)$) とするとき、以下の問に答えよ。
(1) 写像 $\varphi\colon \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のヤコビ行列を求めよ。(2) $f = f(x,y)$ を C^2 級の関数として、$g := f \circ \varphi$, すなわち $g(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で関数 g を定める。このとき g_r, g_{rr}, $g_{\theta\theta}$ を f の偏微分係数 (f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} 等) を用いて表し、$f_{xx}+f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r}g_r + \dfrac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$ が成り立つことを示せ。

3B. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ($r \geq 0$, $\theta \in [0,2\pi)$) とするとき、以下の問に答えよ。
(1) 写像 $\varphi\colon \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のヤコビ行列を求めよ。(2) $r \neq 0$ であれば、φ は逆関数定理の仮定を満たすことを示せ。(3) 逆関数 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$ (定義域は適当に定める) の偏微分係数 r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。(4) $f = f(x,y)$ を C^2 級の関数として、$g := f \circ \varphi$, すなわち $g(r,\theta) = f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} を g の偏微分係数 (g_r, g_θ, g_{rr}, $g_{r\theta}$, $g_{\theta\theta}$ 等) を用いて表し、$f_{xx}+f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r}g_r + \dfrac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$ が成り立つことを示せ。

4. $f(x,y) := xy(x^2+y^2-1)$ について、以下の問に答えよ。

(1) f のヤコビ行列 $f'(x,y)$ と Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。

(2) f の極値を求めよ。

(3) f のグラフ $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (1, 1)$ での接平面の方程式を求めよ。

5. $F(x, y) := (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ とおく。

(1) 点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ の十分小さな開近傍において、$F(x, y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを陰関数定理を用いて示せ。

(2) $F(a, b) = 0$ を満たす点 (a, b) のうちで、陰関数定理の仮定の成立しない点を求めよ。ただし、陰関数としては $y = \varphi(x)$ の形のもののみを考える ($x = \psi(y)$ の形のものは考えない)。

(3) 曲線 $F(x, y) = 0$ 上で、(2) で求めた点を除いて、その点における接線の傾きが 0 となる点を求めよ。

6. Lagrange の未定乗数法を用いて、条件 $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ のもとで、関数 $f(x, y, z) := x^2y^2z^2$ の最大値、最小値を求めよ。またその結果から、任意の正数 a, b, c について、$\dfrac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを示せ。

当たり前のことのようで書くのも気が引けるけれど、数学だから筋の通った話をすることが大切です。比較するのは変だけれど、部分的な計算結果が正しいことよりも大事だと考えて下さい。

良く定義を尋ねる問題を出すけれど、本当はそんなのを問題にしたくはない。でも定義が身についていないと、筋の通った話をすることは無理だから、強制的に頭に叩き込んでもらおうと考えてやっている。定義を知ることは、授業を理解するためにも必要である。だから定義を尋ねる問題を一夜漬けでやろうと考えるのはおかしい。

論理が通っていれば、少々の計算ミスは大目に見るし、逆に結果だけ合っていても説明がデタラメならばとても点をあげる気にはならない。

略解

1.

(1) $A \subset \mathbf{R}^N$ とする。(a) A が $\mathbf{R}^N$ の開集合であるとは、$\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0, B(a;\varepsilon) \subset A$ が成り立つことをいう。(b) A が閉集合であるとは、A の補集合 $A^c = \mathbf{R}^N \setminus A$ が $\mathbf{R}^N$ の開集合であることをいう。(c) A が有界であるとは、$\exists R \in \mathbf{R}$ s.t. $A \subset \overline{B}(0;R)$ が成り立つことをいう ($A \subset \overline{B}(0;R)$ とは、$\forall x \in A\ \|x\| \le R$ ということ)。

(2) $f_1(x,y) := x^2+y^2-1$, $a_1 := 0$, $f_2(x,y) := 4-x^2-y^2$, $a_2 := 0$, $A_1 = \{x \in \mathbf{R}^2; f_1(x,y) > a_1\}$, $A_2 = \{x \in \mathbf{R}^2; f_2(x,y) > a_2\}$ とおくと、$f_1(x,y)$ と $f_2(x,y)$ は x, y の多項式なので, $f_1\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ と $f_2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ はともに連続で、A_1 と A_2 は $\mathbf{R}^2$ の開集合である。

$$A = A_1 \cap A_2$$

であるから、A は $\mathbf{R}^2$ の開集合である。ここで「A と B が $\mathbf{R}^n$ の開集合であれば、$A \cap B$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である」という定理を用いた。

(3) $1 < x^2 + y^2 < 4$ ならば $\|(x,y)\| < 2$ であるから、$R := 2$ とおくと $A \subset \overline{B}(0;R)$ が成り立つ。ゆえに A は有界である。 ■

(1) で主語を書かない人がいるけれど、それは改めよう (極端な話、閉集合の定義のところで主語を省いたら変ですよね?「開集合であるとは、閉集合であること」— さすがにこうした人はいないけれど、「開集合であるとは、A^c が閉集合であること」とした人は結構いる。やはり「A が開集合であるとは、A^c が閉集合であること」と書くべきだ。)。

それと ε が正数であることを書かない人が複数いたが、それは非常にまずい。

それから、有界のところで、$R \in \mathbf{R}$ でなく、$R \in \mathbf{R}^n$ とした人がいたけれど、球の半径は実数で、ベクトルではないですよ。

$\exists R \in \mathbf{R}, \forall x \in A$ とすべきを $\forall x \in A, \exists R \in \mathbf{R}$ と間違えた人がとても多かった。だれか変な答えを教えているのかなあ…

(2) で $\cap$ を $\cup$ と書いたり、「開集合の和は」なんて書いたりする人がいた。まずいです。「可算個の」なんて書いた人もいた。何か (実は深刻な) 勘違いをしているような気がする。

(3) は (1) に書いた条件のチェックをしてもらいたい。$\exists R$ とあるのだから、R をこう取れば良い、という話の流れになる (高校数学で、命題が成り立たないことを証明するには、1 つで良いから反例を示せば良い、というのに似たところがある)。$R = 2$ で良いのだけど、5 とか 4 とか 3 とか $2\sqrt{2}$ とか色々あった。こういうのは証明を書かせるべきなのかな…

2. (1) f が Ω で C^1 級であるとは、f が任意の変数 x_j に対して Ω で偏微分可能であり、その偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ が Ω で連続であることをいう。(2) (d) ならば (c), (c) ならば (b), (c) ならば (a). もちろん、それから導かれる (d) ならば (b), (d) ならば (a) も成り立つ。それ以外は一般には成立しない。(3) $A := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x+y=0\}$ とおく。$f(x,y)$ は有理式 (多項式 ÷ 多項式) であるから、分母が 0 になるところを除いて、つまり $\mathbf{R}^2 \setminus A$ で C^∞ 級である。$x+y=0$ となるところを調べるわけであるが、まずは原点から考えてみよう。k を -1 でない実数として、$y=kx$ に沿って $(x,y) \to (0,0)$ とするときの極限は

$$\lim_{\substack{y=kx\\(x,y)\to(0,0)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x\cdot kx + (kx)^2}{x+kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+k+k^2)}{(1+k)} = 0.$$

これから極限の候補は 0 であるが、$x = r\cos\theta$, $r = \sin\theta$ として、

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{(r\cos\theta)^2 + r\cos\theta \cdot r\sin\theta + (r\sin\theta)^2}{r\cos\theta + r\sin\theta} \right| = \frac{r(1+\cos\theta\sin\theta)}{\cos\theta + \sin\theta} = r\frac{1+\cos\theta\sin\theta}{\sin(\theta+\pi/4)}.$$

θ を $-\pi/4$ に近づけると、分母はいくらでも 0 に近づけることができ、一方で分子は $1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{2}$ に近づく。ゆえに分数の値の絶対値はいくらでも大きく出来る。ゆえに $(x,y) \to (0,0)$ のとき極限は存在しない。ゆえに f は $(0,0)$ で連続ではない。従って、全微分可能でも C^1 級でもない。偏微分可能性を調べる。

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2+h\cdot 0+0^2}{h+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^2+0\cdot h+h^2}{0+h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

ゆえに f は $(0,0)$ で x, y の両方について偏微分可能である。($f_x(0,0) = f_y(0,0) = 1$ である)。

追加: 直線 $x+y=0$ 上の、原点 $(0,0)$ 以外の点　まず $(t,-t)$ において偏微分可能であるかどうか考える。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h,-t) - f(t,-t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(t+h)^2 + (t+h)(-t) + (-t)^2}{(t+h)+(-t)} - 0 \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{t^2+th+h^2}{h^2} = \begin{cases} \text{極限なし} & (t \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (t = 0 \text{ のとき}). \end{cases}\end{aligned}$$

($t \neq 0$ のとき、分母 $\to 0$, 分子 $\to t^2 \neq 0$ に注意する。) ゆえに f は直線 $x+y=0$ 上の原点以外の点では、x について偏微分可能ではない。同様に y についても偏微分可能ではない (x と y について対称なのですぐ分かる)。次に $(t,-t)$ において連続であるかどうか考える。

$$f(t+h,-t+k) - f(t,-t) = \begin{cases} \frac{(t+h)^2+(t+h)(-t+k)+(-t+k)^2}{(t+h)+(-t+k)} = \frac{t^2+(h-k)t+kh+k^2+h^2}{h+k} & (h+k \neq 0) \\ 0 - 0 = 0 & (h+k = 0) \end{cases}$$

$h+k \neq 0$ の場合、$(h,k) \to (0,0)$ のとき、分母 $\to 0$, 分子 $\to t^2$ であるから、$t \neq 0$ であれば収束しないことが分る。ゆえに直線 $x+y=0$ 上、原点でない点においても連続ではない。

まとめると、$x+y=0$ 上のすべての点で f は不連続、$x+y=0$ 上の原点以外の点では x と y の双方について偏微分可能でないが、原点においては x と y の双方について偏微分可能である。■

(1) で、「f が微分可能で、f' が連続」と書いた人がちらほらいたが、行列値関数 $f'\colon \Omega \to M(m,n;\mathbf{R})$ が連続とはどういうことだろうか。それを定義できなくもないが、2 年生相手にそういうことをするのは大変なので、微積分の 99% のテキストはそうしていない。1 階偏導関数がすべて存在して、それらが Ω で連続、とするのが相場である。

例年 (2) で、偏微分係数を計算して、無事極限が求まってから、あろうことか、「ゆえに偏微分可能 ではない」と書く人が 2,3 人いるんですけど。(気を取り直して) 微分係数があるとき偏微分可能で、微分係数がないとき偏微分可能でない、です。(とても悲しい⋯)

3A. 授業で重要性を強調した Laplacian の極座標表示。過去の出題率 30% になるんじゃないか、という問題。

(1) $\varphi'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$

(2) chain rule から

$$g_r = f_x x_r + f_y y_r = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta.$$

$x_{rr} = y_{rr} = 0$ であるので、

$$\begin{aligned} g_{rr} &= (f_{xx}x_r + f_{xy}y_r)x_r + f_x x_{rr} + (f_{yx}x_r + f_{yy}y_r)y_r + f_y y_{rr} \\ &= f_{xx}(x_r)^2 + 2f_{xy}x_r y_r + f_{yy}(y_r)^2 + f_x x_{rr} + f_y y_{rr} \\ &= f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta. \end{aligned}$$

同様に

$$g_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta.$$

$x_{\theta\theta} = -r\cos\theta$, $y_{\theta\theta} = -r\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= (f_{xx}x_\theta + f_{xy}y_\theta)\,x_\theta + f_x x_{\theta\theta} + (f_{yx}x_\theta + f_{yy}y_\theta)\,y_\theta + f_y y_{\theta\theta} \\ &= f_{xx}(x_\theta)^2 + 2f_{xy}x_\theta y_\theta + f_{yy}(y_\theta)^2 + f_x x_{\theta\theta} + f_y y_{\theta\theta} \\ &= f_{xx}r^2\sin^2\theta + 2f_{xy}(-r^2\cos\theta\sin\theta) + f_{yy}r^2\cos^2\theta + f_x(-r\cos\theta) + f_y(-r\sin\theta) \\ &= r^2\left(f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\cos^2\theta\right) - r(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta} &= f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta + \frac{1}{r}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \\ &\quad + \left(f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\cos^2\theta\right) - \frac{1}{r}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \\ &= f_{xx} + f_{yy}.\blacksquare \end{aligned}$$

問題の $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r}g_r + \dfrac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$ が間違っているのでは？という質問が 2 回あった。この問題は重要なので間違えたりはしません。多分 $g_{\theta\theta}$ の $f_x x_{\theta\theta} + f_y y_{\theta\theta}$ という項を落としたのだと思う。

(1) 今年はヤコビ行列を書けない人が続出してびっくり。ここでは 2 次正方行列になるけれど、横ベクトルにしたり、転置した行列にしたり⋯(2) は $g_{\theta\theta}$ を間違えた人が多い。

3B. (1) は上と同じ。(2) $\det\varphi'(r,\theta) = r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r$ であるから、$r \neq 0$ であれば $\det\varphi'(r,\theta) \neq 0$. ゆえに逆関数定理の仮定が成り立ち、考えている点 (r,θ) の近傍で、C^1 級の逆関数が存在する。(3) 逆関数の微分法より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} &= \left(\varphi^{-1}\right)'(x,y) = \left(\varphi'(r,\theta)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(4)

$$f_x = g_r r_x + g_\theta \theta_x = g_r\cos\theta - \frac{g_\theta \sin\theta}{r},$$
$$f_y = g_r r_y + g_\theta \theta_y = g_r\sin\theta + \frac{g_\theta \cos\theta}{r}.$$

これから

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial x}f_x + \frac{\partial}{\partial y}f_y \\ &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(g_r\cos\theta - \frac{g_\theta\sin\theta}{r}\right) \\ &\quad + \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(g_r\sin\theta + \frac{g_\theta\cos\theta}{r}\right) \\ &= \cdots\text{中略}\cdots \\ &= g_{rr}\cos^2\theta - \frac{2g_{r\theta}\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{g_{\theta\theta}\sin^2\theta}{r^2} + \frac{g_r\sin^2\theta}{r} + \frac{2g_\theta\sin\theta\cos\theta}{r^2} \\ &\quad + g_{rr}\sin^2\theta + \frac{2g_{r\theta}\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{g_{\theta\theta}\cos^2\theta}{r^2} + \frac{g_r\cos^2\theta}{r} - \frac{2g_\theta\sin\theta\cos\theta}{r^2} \\ &= g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}. \blacksquare \end{aligned}$$

3B を解くと言って、途中から 3A に切り替える人がいる。3A, 3B どちらか点が高くなるように採点してやったけれども、そういうのはルール違反だよね。本当は。それから 3B ほとんど出来ていたけれど、途中で係数の 2 が落ちていて、単なるケアレス・ミスだとは思うけれど、途中経過がなくて、どこでどう間違ったのか分からない、というような人も。こういうのも中間点出しづらい。

4.

(1) $f(x,y) = xy(x^2+y^2-1)$ であるから、

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(3x^2+y^2-1) & x(3y^2+x^2-1) \end{pmatrix},$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy & 3(x^2+y^2)-1 \\ 3(x^2+y^2)-1 & 6xy \end{pmatrix}.$$

(2) $f'(x,y)=0$ を解くと、

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1),(0,0).$$

各点での Hesse 行列を計算し、その符号を調べる。

$$\begin{aligned}
&H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=H\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}3/2 & 1/2\\ 1/2 & 3/2\end{pmatrix} \quad (\text{正値}),\\
&H\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=H\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}-3/2 & 1/2\\ 1/2 & -3/2\end{pmatrix} \quad (\text{負値}),\\
&H(1,0)=H(-1,0)=H(0,1)=H(0,-1)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} \quad (\text{不定符号}),\\
&H(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad (\text{不定符号}).
\end{aligned}$$

ゆえに

- $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ で狭義の極小で、極小値は $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}$.
- $(x,y)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ で狭義の極大で、極大値は $f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}$.

(不定符号である点では極値とならない。)

(3)

$$f(1,1)=1\cdot 1\left(1^2+1^2-1\right)=1,\quad f'(1,1)=(1\cdot(3+1-1)\ 1\cdot(3+1-1))=(3\ 3).$$

ゆえに $(1,1)$ における接平面の方程式は $z=1+(3\ 3)\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}$. 整理して $z=3x+3y-5$.

■

連立方程式解けない人が多かった。計算ミスというよりも、論理が変という人がいて、猛反省してもらいたい。授業では、複雑ではあるけれど、論理の分配律でばらせば機械的に計算できる、と解説した。

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} y(3x^2+y^2-1)=0\\ x(3y^2+x^2-1)=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\left(y=0\vee 3x^2+y^2-1=0\right)\wedge(x=0\vee 3y^2+x^2-1=0).
\end{aligned}$$

これを $(P\vee Q)\wedge(R\vee S)$ と見て、$(P\wedge R)\vee(P\wedge S)\vee(Q\wedge R)\vee(Q\wedge S)$ と展開する。具体的には、

$$\begin{cases} y=0\\ x=0\end{cases}\vee\begin{cases} y=0\\ 3y^2+x^2-1=0\end{cases}\vee\begin{cases} 3x^2+y^2-1=0\\ x=0\end{cases}\vee\begin{cases} 3x^2+y^2-1=0\\ 3y^2+x^2-1=0.\end{cases}$$

後は省略する。

計算は計算用紙にやったということか、途中経過を大幅に省略した人がいた。そういう人は結果が正しくても満点あげ辛いし (間違えた議論で同じ結果に到達することもあるから、議論

不十分で減点)、間違っていると中間点もあげづらい (もったいない)。具体的には、Hesse 行列を書いて、それが正値、負値、不定符号のどれであるか簡単な根拠つきで書こう。連立方程式を解き損ねても、そういうところをきちんと出来ることを示せば点をつけても構わない。

$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ は不定符号と気軽に書くのだけど、$a \neq 0$ という条件を忘れてます。$a = 0$ のときは零行列で、これは正値でも負値でも不定符号でもありません。

5. $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$.

(1) $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$, $F_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+1)$, $F_y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 4 \neq 0$ であるから、陰関数定理によって、$F(x,y) = 0$ は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の十分小さな近傍で、$y = \varphi(x)$ の形に解ける。

(2) $F(a,b) = 0$, $F_y(a,b) = 0$ を連立方程式として解くと、$(a,b) = (0,0), (-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$.

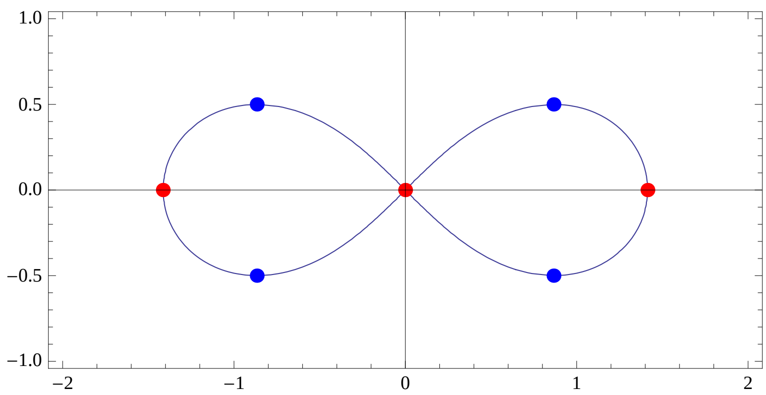
(3) (2) で見つけた点を除けば、($y \neq 0$ であるから)

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))} = -\frac{x(x^2+y^2-1)}{y(x^2+y^2+1)} \qquad (\text{ただし } y = \varphi(x)).$$

これが 0 になるには、$x(x^2+y^2-1) = 0$. $x = 0$ とすると $y = 0$ で、除外すべき点となるので、$x \neq 0$. ゆえに $x^2+y^2-1 = 0$. $F(x,y) = 0$ と $x^2+y^2 = 1$ を連立して解くと、

$$(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right). \blacksquare$$

$F(x,y) = 0$ は授業で紹介したレムニスケートである。



この図を見て、陰関数定理の仮定の成り立たない 3 つの点、微分係数が 0 になる 4 つの点が見えるだろうか。

```
F[x_, y_, z_] := (x^2 + y^2)^2 - 2 (x^2 - y^2)
g = ContourPlot[F[x, y, z] == 0, {x, -2, 2}, {y, -1, 1}, Axes -> True,
    AspectRatio -> Automatic];
g2 = Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[{-Sqrt[2], 0}],
    Point[{0, 0}], Point[{Sqrt[2], 0}]}];
g3 = Graphics[{Blue, PointSize[0.02],
    Point[{Sqrt[3]/2, 1/2}], Point[{Sqrt[3]/2, -1/2}],
    Point[{-Sqrt[3]/2, 1/2}], Point[{-Sqrt[3]/2, -1/2}]
    }];
g=Show[g, g2, g3]
Export["lemniscate.eps", g]
```

6. 対称性を使って、$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ として議論しても良い。また、変数のうち一つでも 0 であると、$f(x, y, z) = 0$ で、これが最小値であることはすぐ分るので，$x > 0, y > 0, z > 0$ で最大値を探すことに話が絞れる。ではあるけれど、以下はストレートに解く。

$g(x, y, z)$ は x, y, z に関する多項式であるから、$g \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ は連続である。ゆえに $N_g := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; g(x, y, z) = 0\}$ は $\mathbf{R}^3$ の閉集合である。また明らかに $N_g \subset \overline{B}(0; 1)$ であるから (N_g は単位円だから)、N_g は有界である。f は $\mathbf{R}^3$ で連続であるから、当然 N_g でも連続である。「$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合定義された実数値連続関数は最大値と最小値を取る」という定理から、f は N_g 上で最大値、最小値を取る。

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy^2z^2 \\ 2x^2yz^2 \\ 2x^2y^2z \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

N_g 上に $\nabla g(x, y, z) = 0$ を満たす点はない ($\nabla g(x, y, z) = 0$ とすると、$(x, y, z) = (0, 0, 0)$ であり、$(0, 0, 0) \notin N_g$)。ゆえに f の N_g 上での最大値、最小値を与える点は、Lagrange の未定乗数法で見つかる。

$(x, y, z) \in N_g$ で f が最大または最小になったとすると、

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z).$$

$\lambda \neq 0$ であれば、$x^2 = y^2 = z^2$ であることはすぐ分かり、$x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{1}{3}$. ゆえに

$$(x, y, z, \lambda) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{9}\right) \quad \text{(複号は任意で } 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ 個の点を表す)}.$$

いずれの場合も $f(x, y, z) = \left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^3 = \dfrac{1}{27}$.

$\lambda = 0$ であれば、$x = 0$ or $y = 0$ or $z = 0$ で、球面上の 3 本の大円を表す。いずれも $f(x, y, z) = 0$.

以上から、f の最大値は $\dfrac{1}{27}$, 最小値は 0 (最小値の方は気づいてしまえば、いつでも $f \geq 0$ で、$f = 0 \Leftrightarrow x = 0$ or $y = 0$ or $z = 0$ が成り立つことからも分る)。

ゆえに

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2y^2z^2 \leq \frac{1}{27}.$$

これから

$$(X, Y, Z) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X^2Y^2Z^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^3} \leq \frac{1}{27}.$$

($x := X/\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, $y := Y/\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, $z := Z/\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ とおくと、上の主張に帰着できる。— 分母分子がともに 6 次同次式で、分数自体は 0 次同次なので、単位球面上での値ですべて決まってしまう、ということである) 分母を払って

$$\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{3} \geq \left(X^2Y^2Z^2\right)^{1/3}.$$

これは $(X, Y, Z) = 0$ でも成立する。

ゆえに $x := X^2$, $y := Y^2$, $z := Z^2$ とおくことで

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}. \blacksquare$$

Lagrange の未定乗数法は、最後に時間が乏しい中で勉強するのは強行軍で大変だけれど、非常に有名 (経済学科の学生の試験でも定番なくらい)、きちんと議論するのはきちんとした理解が必要で理解度を測るのに好適、色々面白い結果が出せる、というわけで、頑張りどころである (その理論的背景に陰関数定理が必要というところもイイ)。話の筋が長く、講義を通して学んだ多くのことが使われる。「○○なんてやって一体どういうことの役に立つのか？」という素朴な疑問に対して、一つの答えになってくれると思う。