

多変数の微分積分学1 第13回

桂田 祐史

2013年7月15日

目次

1	メモ	1
1.1	連立方程式の解き方	2
10	陰関数定理と逆関数定理 — 存在定理	2
10.1	逆関数定理超特急	2
10.2	陰関数についてのイントロ (2変数関数版)	4
10.3	定理の陳述	7
10.4	単純な例	8
10.5	陰関数、逆関数の高階数導関数	11
10.6	陰関数定理の応用について	12
10.7	関数のレベル・セット	13
10.8	陰関数定理と逆関数定理の証明	13
11	条件付き極値問題 (Lagrange の未定乗数法)	17
11.1	2変数の場合	17
11.2	n 変数, d 個の制約条件の場合	21
11.3	例題	22
12	問の答&ヒント	24

この授業用の WWW ページは

<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/>

1 メモ

問 連立方程式 $\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$ を解け。

問 連立方程式 $\begin{cases} 1 + 2xy - 2x^2 = 0 \\ 1 + 2xy - 2y^2 = 0. \end{cases}$ を解け。

1.1 連立方程式の解き方

少し問題を解いて練習して下さい。

「未知数の消去」が基本だけれど、対称性に目をつけて、辺々加えたり、引いてみたりするとうまく行く場合がある。例として、問11に現れた

$$\begin{aligned}2x^3 + 3xy^2 - x &= 0, \\2y^3 + 3x^2y - y &= 0.\end{aligned}$$

辺々引き算して $(x - y)(x^2 - 2xy + y^2 - 1) = 0$. さらに

$$(x - y)(x - y + 1)(x - y - 1) = 0.$$

これから $x - y = 0, 1, -1$.

10 陰関数定理と逆関数定理 — 存在定理

兄弟の関係にある「陰関数定理」と「逆関数定理」を駆け足で説明する。
どちらも

「指定された点の近くで (局所的に) 関数 (それぞれ陰関数、逆関数) が存在する」

という存在定理である。

存在定理というと、2年生にはなじみが薄いかも知れないが、まったくの初めてというわけではなくて、

1. 中間値の定理 「連続関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ が $f(a)f(b) < 0$ を満たすならば、 $f(c) = 0$ を満たす $c \in (a, b)$ が存在する」
2. 代数学の基本定理 「複素係数の n 次多項式 $a_0z^n + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ は複素数の範囲に少なくとも一つの根を持つ」
3. Weierstrass の最大値定理 「コンパクト集合 K 上の実数値連続関数は、最大値を持つ」

という例 (どれも非常に重要) がある。

陰関数定理も逆関数定理も「関数の存在」を主張している。証明においては、 x が与えられたときに $F(x, y) = 0$ を y について解く、 y が与えられたときに $f(x) = y$ を x について解く、と方程式の解の存在をするのが関門である。

10.1 逆関数定理超特急

逆関数については、

「写像 f が逆写像 f^{-1} を持つためには、 f が全単射であることが必要十分」

というのが基本中の基本である。

与えられた関数 f そのものが全単射でなくても、それを適当に制限したものが全単射になり、その逆写像 (逆関数) が便利、というのが良くある話である。

例 10.1 (高校数学からの例) $f: \mathbf{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbf{R}$ は全射でも単射でもないが、その制限

$$\tilde{f}: [0, \infty) \ni x \mapsto x^2 \in [0, \infty)$$

は全単射で、その逆関数 f^{-1} はいわゆるルートである。

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad (y \in [0, \infty)).$$

似たようなことは、 \exp と \log , 各種逆三角関数であった。■

1変数関数に対する逆関数の定理は簡単であるので、概略を述べてみよう。

例 10.2 (1変数の逆関数の定理) I が \mathbf{R} の开区間、 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ は C^1 級、 $a \in I$, $f'(a) \neq 0$ ならば、

($\exists U \subset I : a$ を含む开区間) ($\exists V : b := f(a)$ を含む开区間)

$$\tilde{f}: U \ni x \mapsto f(x) \in V \quad \text{は全単射で逆関数も } C^1 \text{ 級}$$

が成り立つ。実際 $f'(a) \neq 0$ であるから、 $f'(a) > 0$ or $f'(a) < 0$. $f'(a) > 0$ の場合、 f' の連続性から、 $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $f' > 0$ on $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$. このとき f は $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ で狭義単調増加である。このとき、 $U := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $V = (f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon))$ とすると、 \tilde{f} は明らかに定義できて、単射である。また中間値の定理を用いて全射であることが分かる。ゆえに \tilde{f} は全単射であるから逆関数が存在する。少し頑張ると \tilde{f}^{-1} の連続性と、微分可能性、 \tilde{f}^{-1} の連続性が証明できる (詳しくは桂田 [?] の付録 H.2 「1変数の逆関数の定理」)。■

逆関数の定理は、この例の素直な多次元化であるが、その前に線形代数の復習をしておく。

例 10.3 (線型写像が全単射となる条件) 有限次元線型空間の間の線型写像を考える。一般形は、 $n, m \in \mathbf{N}$, $A \in M(m, n; \mathbf{R})$ として、

$$f: \mathbf{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbf{R}^m$$

である。このとき、有名な次元定理

$$\text{rank } f = n - \dim \ker f$$

が成り立つ。

- f が全射 $\iff \text{rank } f = m$
- f が単射 $\iff \dim \ker f = 0$

であるから、

$$\begin{aligned} f \text{ が全単射} &\implies (\text{rank } f = m \quad \text{and} \quad \dim \ker f = 0) \\ &\implies m = n. \end{aligned}$$

ゆえに全単射であるためには、 $m = n$ が必要である。そこで以下 $m = n$ を前提条件とする。このとき

$$\begin{aligned} f \text{ が全射} &\iff \text{rank } f = m (= n) \\ &\iff \dim \ker f = 0 \\ &\iff f \text{ は単射} \\ &\iff f \text{ は全単射} \\ &\iff f^{-1} \text{ が存在} \\ &\iff A^{-1} \text{ が存在} \\ &\iff \det A \neq 0. \end{aligned}$$

後のために次のように覚えておこう。「全単射が存在するために、定義域と終域の空間次元が等しいことが必要で、それが成り立つという前提のもとで、全単射であるためには行列式が0でないことが必要十分である」 ■

定理 10.4 (逆関数定理) Ω は \mathbf{R}^n の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ は C^1 級、 $a \in \Omega$, $\det f'(a) \neq 0$ とするとき、 $(\exists U: a$ を含む開集合) $(\exists V: b = f(a)$ を含む開集合) s.t. $\tilde{f} := f|_U: U \ni x \mapsto f(x) \in V$ は全単射で、逆関数 $\tilde{f}^{-1}: V \rightarrow U$ も C^1 級である。

時間の関係で、証明は涙を飲んで省略するが(苦笑)、逆関数の導関数については、既に学んだ逆関数の微分法が成立することを注意(「思い出せ!」)しておく。

10.2 陰関数についてのイントロ (2変数関数版)

直観的には、方程式 $F(x, y) = 0$ は、(例外的な状況を除けば) 平面曲線を定め、適当に範囲を限定すると、変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ を定めることがある(このとき、その関数 $y = \varphi(x)$ を $F(x, y) = 0$ の定める陰関数と呼ぶ)。

いくつか実例を並べてみよう。

- (1) $F(x, y) = y - \varphi(x)$ のとき、 $y = \varphi(x)$. $F(x, y) = 0$ の定める曲線は、関数 φ のグラフである。
- (2) $F(x, y) = ax + by + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$) のとき、 $F(x, y) = 0$ の定める曲線は直線である。 $b \neq 0$ であれば、 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ と解ける。
- (3) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ のとき、 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. $F(x, y) = 0$ の定める曲線は、原点を中心とする半径 1 の円周である。(一般に、 $F(x, y)$ が x と y の 2 次多項式であるならば、 $F(x, y) = 0$ の定める曲線は、いわゆる 2 次曲線で、具体的には、空集合、1 点、2 直線、楕円、放物線、双曲線である — 線形代数のテキストを見よ)。
- (4) $F(x, y) = y^2 - x^2(x - a)$ (a は実定数) のとき、 $F(x, y) = 0$ は、 $y = 0$ ($x = 0$ のとき)、または $y = \pm x\sqrt{x - a}$ ($x \geq a$ のとき) と解ける¹。 $F(x, y) = 0$ の定める曲線は、
 - (a) $a < 0$ のときは原点で自己交差する曲線(原点を結節点と呼ぶ)
 - (b) $a = 0$ のときは原点で尖っている曲線(原点を尖点と呼ぶ)
 - (c) $a > 0$ のときは原点と、 $x \geq a$ の範囲にある曲線(原点を孤立点と呼ぶ)

```
g0=ListPlot[{{0,0}}]
myg[a_]:=ContourPlot[y^2-(x-a)x^2==0,{x,-2,2},{y,-2,2},ContourStyle->Red]
g=Show[myg[1],g0]
```

- (5) (ヤコブ・ベルヌーイのレムニスケート, 1694 年) $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ のとき、いわゆるヤコブ・ベルヌーイのレムニスケート(連珠形) $F(x, y) = 0$ は y についての 4 次方程式であるが、2 次方程式を解くことを 2 回行って、 y について解ける。

¹ $y^2 = x^2(x - a)$ としたとき、実数の範囲で解ける $\Leftrightarrow x^2(x - a) \geq 0 \Leftrightarrow [x = 0 \text{ または } x \geq a]$ であることに注意せよ。 $x = 0$ のときは $y = 0$, $x \geq a$ のときは、 $y = \pm\sqrt{x^2(x - a)} = \pm|x|\sqrt{x - a} = \pm x\sqrt{x - a}$.

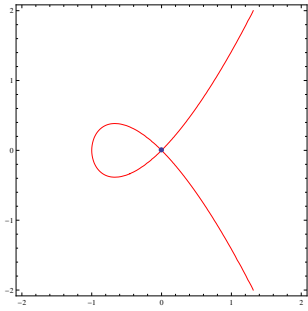


図 1: $a = -1$

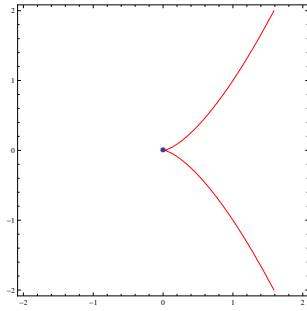


図 2: $a = 0$

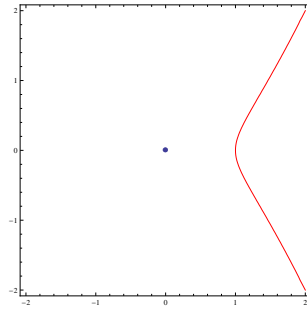


図 3: $a = 1$

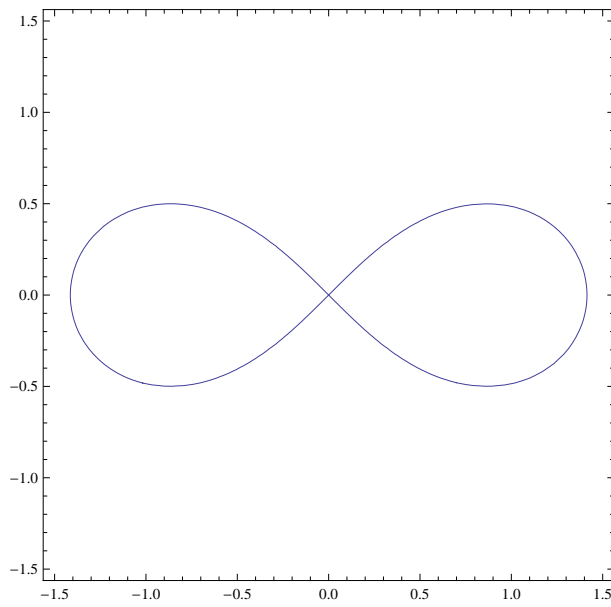


図 4: レムニスケート $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$

- (6) (デカルトの葉線, folium cartesii, 1638年) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ のとき、 $F(x, y) = 0$ の定める曲線は、いわゆるデカルトの葉線で、原点において自分自身と交差する曲線である (例 10.8, p.8)。 $F(x, y) = 0$ は y についての 3 次方程式である。これは y について簡単に解くことは…? 出来ないと思ったら、Mathematica は答を返して来た。あ、そうか。でも使いにくそう。

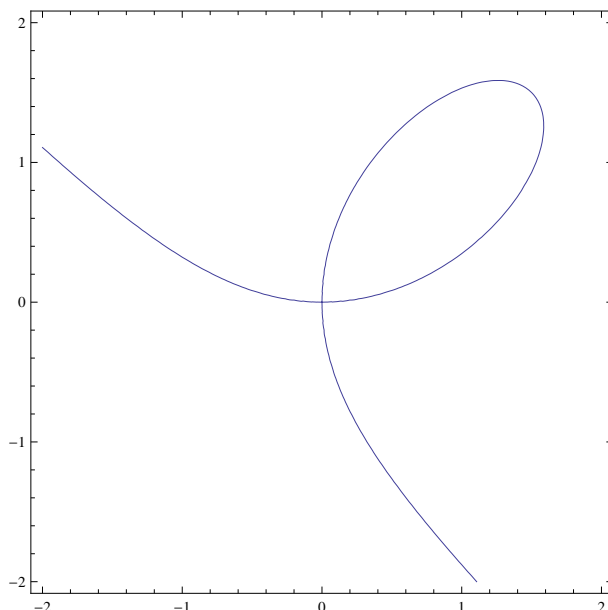


図 5: Decartes の葉線 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

余談 10.1 (Decartes の葉線の伝統的な描き方) 極座標を使うと、

$$r = \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$$

という極方程式がすぐに得られる。あるいは $y = tx$ として、

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

という有理パラメータ表示も得られる。 $x + y = -1$ が漸近線になっている。■

次のことが分かる。

- F によっては、 $F(x, y) = 0$ を式変形で、 y について具体的に解くことは不可能である。
→ 抽象的な「存在定理²」が望み得るゴール。
- 1つの x に 2 つ以上の y が対応したり、逆に 1 つも y がなかったりする。
→ 最初に $F(a, b) = 0$ を満たす点 (a, b) があったとして、その点の「近傍」で考えることにする。とっかかりは要求することにする。
- 1つの x に複数の y が対応する場合も、注目している点を中心とした十分小さい範囲に限れば、1つの x に 1 つの y が対応するようになることもある。
→ a を含む開集合 U , b を含む開集合 V をとり、 $U \times V$ (イメージとしてはウィンドウ) に考察を限定する、という方針で行く。

²アナロジーとして、中間値の定理を思い出させる。

もっとも、どんなに小さい範囲にしばってもダメなこともある(その点で曲線が自己交差していたり、 x について片側にしか対応する y がない)。うまく行くための十分条件はないか？

→ 実は $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ という条件が満たされれば OK.

- 陰関数の導関数は(そもそも存在するかはすぐには分からないことであるが、存在するならば)、合成関数の微分法で計算するのは簡単である。

例: $x^2 + y^2 = 1$ より、 $2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ だから、 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

一般には、 $F(x, \varphi(x)) = 0$ より、

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \quad \text{より} \quad \varphi'(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)).$$

10.3 定理の陳述

以下 $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ が登場する。これはもちろん

$$\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \left\{ (x, y); x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \right\}$$

であるから、

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+n} \end{pmatrix} \quad (z_j \in \mathbf{R}, j = 1, 2, \dots, m+n)$$

全体の集合である \mathbf{R}^{m+n} と同一視できる。そこで例えば $\Omega \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ が開集合と言った場合はこの同一視によって Ω が \mathbf{R}^{m+n} の開集合であることを意味する。単に (x, y) が $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ の要素であると言った場合は、特に断りがなければ $x \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^n$ であるとする。

さて、 $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ があるとき、

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

と書けば、

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

となるわけだが、 m 列、 n 列とブロックわけして、それぞれ $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ と書く。すなわち

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

以下しばらくこの記号を使おう。

定理 10.5 (陰関数定理, implicit function theorem) Ω は $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ の開集合、 $F: \Omega \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbf{R}^n$ は C^1 級、 $(a, b) \in \Omega$, $F(a, b) = 0$, $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ が成り立つとする。このとき、 a を含む \mathbf{R}^m の開集合 U , b を含む \mathbf{R}^n の開集合 V , C^1 級の関数 $\varphi: U \rightarrow V$ で、以下の (0), (i), (ii), (iii) を満たすものが存在する。

(0) $U \times V \subset \Omega$.

(i) $\varphi(a) = b$.

(ii) $\forall (x, y) \in U \times V$ について、 $F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$.

(iii) $\forall x \in U$ について、 $\varphi'(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))$.

注意 10.6 (覚え方のヒント) 上の定理は、大事なことをひとまとめにしたものだが、最低限必要なことと、それから導かれることに分けた方が覚えやすいかも知れない。

短縮版陰関数定理

Ω は $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ の開集合、 $F: \Omega \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbf{R}^n$ は C^1 級、 $(a, b) \in \Omega$, $F(a, b) = 0$, $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ が成り立つならば、 $\exists U, \exists V, \exists \varphi \in C^1(U; V)$ s.t.

(a) U は a の開近傍、 V は b の開近傍で、 $U \times V \subset \Omega$.

(b) $\forall (x, y) \in U \times V$ について、 $F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$.

上の定理 10.5 に書いてあって、この短縮版に書いてないことを導こう。まず $F(a, b) = 0$ と (b) から $\varphi(a) = b$ が導かれる。また (b) から $F(x, \varphi(x)) = 0$ が得られるが、 F と φ が C^1 級であるから、 $F_x(x, \varphi(x)) + F_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$. $\det F_y(a, b) \neq 0$ であるから、 (a, b) の十分小さな近傍で $F_y(x, y)^{-1}$ が存在するので、 $\varphi'(x) = - (F_y(x, \varphi(x)))^{-1} F_x(x, \varphi(x))$. ■

注意 10.7 (陰関数定理の条件 (ii) の言い換え「零点集合がグラフになる」) 定理 10.5 の (ii) は、「方程式が解ける」といういわば解析的な表現であるが、幾何学的な表現である次の (ii)' で置き換えることも出来る。

(ii)' $U \times V$ において、 F の零点集合は φ のグラフに一致する: $N_F \cap (U \times V) = \text{graph } \varphi$.

ここで $N_F, \text{graph } \varphi$ はこれまでも登場した記号で、

$$N_F := \{(x, y) \in \Omega; F(x, y) = 0\}, \quad \text{graph } \varphi := \{(x, \varphi(x)); x \in U\}. \blacksquare$$

10.4 単純な例

既に述べたように、陰関数定理は広範な応用を持つが、ここではなるべく単純な例を紹介する。

例 10.8 [デカルトの葉線 (folium of Descartes, folium cartesii, 1694)] $a > 0$ とするとき、 $F(x, y) := x^3 + y^3 - 3axy$, $P = \left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ とおく。点 P の十分小さな開近傍において、 $F(x, y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを示し、その点における微分係数を求めよ。

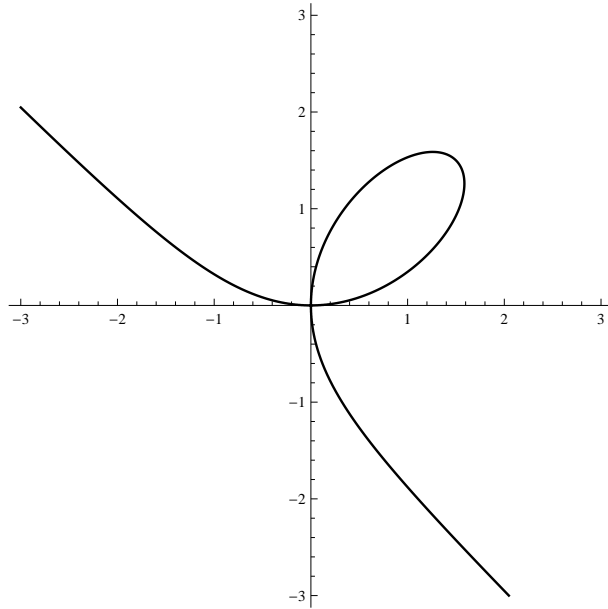


図 6: Mathematica による $F(x, y) := x^3 + y^3 - 3axy$ の零点集合 ($a = 2/3$ の場合)

```
ContourPlot[x^3+y^3-2 x y==0, {x, -2, 2}, Axes->True]
```

```
g = ContourPlot[x^3 + y^3 - 3 x y, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
Frame -> None, Contours -> {0}, ContourShading -> None,
ContourStyle -> Thickness[0.004], PlotPoints -> 100, Axes -> True]
```

解答 $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ は C^1 級で、

$$F\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{3a}{2}\right)^3 + \left(\frac{3a}{2}\right)^3 - 3a\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \left(\frac{27}{8} + \frac{27}{8} - \frac{27}{4}\right)a^3 = 0,$$

$$F_y(x, y) = 3y^2 - 3ax, \quad F_y\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right) = 3\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - 3a\frac{3a}{2} = \frac{9a^2}{4} \neq 0$$

であるから、 $\frac{3a}{2}$ の十分小さな開近傍 U と V が存在して、 $U \times V$ で $F(x, y) = 0$ は $y = \varphi(x)$ と解けて、 $\varphi: U \rightarrow V$ は C^1 級となる。 $F(x, \varphi(x)) = 0$ より、 $F_x(x, \varphi(x)) + F_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$ となるので、 $\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$ 。 $F_x(x, y) = 3x^2 - 3ay$, $F_x\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right) = \frac{9a^2}{4}$ であるから、

$$\varphi'\left(\frac{3a}{2}\right) = -\frac{F_x(3a/2, 3a/2)}{F_y(3a/2, 3a/2)} = -\frac{9a^2/4}{9a^2/4} = -1. \blacksquare$$

注意 10.9 (陰関数の存在しない点) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ であれば、 (x_0, y_0) の近傍で、 $y = \varphi(x)$ の形の陰関数が存在することが保証されるので、その形の陰関数の存在しない可能性がある点は、連立方程式 $F(x, y) = 0$, $F_y(x, y) = 0$ の解として得られる。実際に解くと、 $(x, y) = (0, 0)$, $(2^{2/3}a, 2^{1/3}a)$ 。この後者は、円 $x^2 + y^2 = a^2$ の場合の $(\pm a, 0)$ のような点であるが、原点 $(0, 0)$ の方は、少し様子が違って、どんなに小さな開近傍を取っても、1つの x に対して $F(x, y) = 0$ を満たす y が3つ存在したりする。いずれにせよ、 $(0, 0)$, $(2^{2/3}a, 2^{1/3}a)$ とも、そのいかなる近傍でも、 $y = \varphi(x)$ の形の $(F(x, y) = 0)$ の陰関数は存在しない。■

問 10.10 $F(x, y) := (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ とおく。

- (1) 点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の十分小さな開近傍において、 $F(x, y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを陰関数定理を用いて示せ。(本当は、定理を使わないでも、2次方程式を解けば陰関数が具体的に求まる。そういう単純な場合で、定理を使う練習をしましょう、ということである。)
- (2) $F(a, b) = 0$ を満たす点 (a, b) のうちで、陰関数定理の仮定の成立しない点³を求めよ。
- (3) 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の点で、その点における接線の傾きが 0 となる点を求めよ。

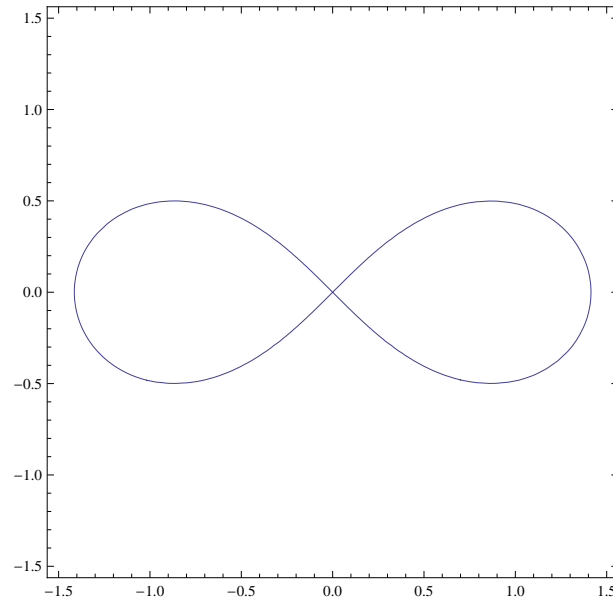


図 7: ヤコブ・ベルヌーイのレムニスケート, $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$

(p.24 を見よ。)

例 10.11 連立方程式 $x + y + z + w = 0$, $e^x + e^{2y} + e^z + e^w = 4$ は、0 の十分小さな開近傍で x, y について解けることを証明せよ。

解答

$$X := \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$F_1(X, Y) := x + y + z + w, \quad F_2(X, Y) := e^x + e^{2y} + e^z + e^w - 4,$$

$$F(X, Y) := \begin{pmatrix} F_1(X, Y) \\ F_2(X, Y) \end{pmatrix}$$

とおくと、 $F: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \ni (X, Y) \mapsto F(X, Y) \in \mathbf{R}^2$ は C^1 級で、

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^x & 2e^y \end{pmatrix}.$$

³ただし、陰関数としては $y = \varphi(x)$ の形のものを考える ($x = \psi(y)$ の形のものは考えない)。

これから

$$\det \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

ゆえに $F(X,Y) = 0$ は 0 の近傍で Y について解ける。いいかえると (x,y) について解ける。ついでに

$$\varphi'(X) = - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial X} = - \frac{1}{2e^{2y} - e^x} \begin{pmatrix} 2e^{2y} & -1 \\ -e^x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^z & e^w \end{pmatrix}$$

が得られる。■

10.5 陰関数、逆関数の高階数導関数

陰関数、逆関数の高階導関数については、次の命題が成り立つ。

命題 10.12 (陰関数、逆関数の微分可能性) (1) 陰関数定理で F が C^k 級 ($k \geq 2$) であれば φ も C^k 級。

(2) 逆関数定理で f が C^k 級 ($k \geq 2$) であれば f^{-1} も C^k 級。

証明 陰関数定理、逆関数定理における (1 階の) 導関数の公式を眺めると明らかである (以下の例を見よ)。■

高階導関数を実際に計算するには、合成関数の微分法を用いれば良い。陰関数の場合に $k = 2$ に対して調べてみよう。まず陰関数定理から、陰関数 φ は C^1 級で

$$(1) \quad \varphi'(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)).$$

ここで F が C^2 級という仮定から $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ は C^1 級である。また φ は C^1 級であるから、(1) の右辺は C^1 級関数の合成関数として C^1 級である。ゆえに φ' が C^1 級となるから φ は C^2 級である。一般の場合もこれと同じことである。

その気になれば、合成関数の微分法に関する定理を用いて、実際に (1) の右辺を微分して、 φ の 2 階導関数を表す公式を具体的に求められる。 $m = n = 1$ の場合に実行してみよう。

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= - \frac{F_y(x, \varphi(x)) \frac{d}{dx} F_x(x, \varphi(x)) - \frac{d}{dx} F_y(x, \varphi(x)) F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))^2} \\ &= - \left\{ F_y(x, \varphi(x)) [F_{xx}(x, \varphi(x)) + F_{xy}(x, \varphi(x)) \varphi'(x)] \right. \\ &\quad \left. - [F_{yx}(x, \varphi(x)) + F_{yy}(x, \varphi(x)) \varphi'(x)] F_x(x, \varphi(x)) \right\} \times \frac{1}{F_y(x, \varphi(x))^2} \\ &= - \frac{F_y F_{xx} + F_y F_{xy} (-F_x / F_y) - F_{yx} F_x - F_{yy} (-F_x / F_y) F_x}{F_y^2} \\ &= - \frac{F_y^2 F_{xx} - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{F_y^3}. \end{aligned}$$

なかなか面倒なようだが、例えば極値の判定をするときは $\varphi'(x) = 0$, すなわち $F_x(x, \varphi(x)) = 0$ となる点 x における値のみ興味があるわけで、そういう点では

$$(2) \quad \varphi''(x) = - \frac{F_y^2 F_{xx}}{F_y^3} = - \frac{F_{xx}}{F_y}$$

とかなりシンプルになる。

例題 10.1 方程式

$$xy^2 - x^2y - 2 = 0$$

によって定められる陰関数 y の極値を求めよ。

解 まず与式を微分して

$$(3) \quad y^2 + 2xyy' - 2xy - x^2y' = 0.$$

これから

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow y(y - 2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 2x \quad (y = 0 \text{ は元の式を満たさない}) \\ &\Leftrightarrow x = 1, \quad y = 2. \end{aligned}$$

ところで (3) から

$$2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'' - 2y - 2xy' - 2xy' - x^2y'' = 0.$$

よって

$$y'(4y + 2xy' - 4x) + (2xy - x^2)y'' - 2y = 0.$$

ここで $x = 1, y = 2, y' = 0$ を代入すると $3y'' - 4 = 0$ となるので、

$$y'' = 4/3 > 0.$$

よって極小値である。 ■

10.6 陰関数定理の応用について

陰関数定理は、初めて学ぶ人にとっては、きちんと述べるだけでも大変な定理である。その本質は、いわゆる存在定理であって、ご利益が^{りやく}分かりづらいところがある。しかし陰関数定理は多くの重要な応用を持つ。ここでは、多様体、条件付き極値問題、分岐理論⁴を紹介する。

多様体 幾何学の諸理論を展開する場である^{たようたい}多様体 (manifold) は (狭い見方をすれば) 曲線や曲面の概念を一般化したものであるが、現代の数学にとって基本的な言語である。その理論の基礎固めをするときに陰関数定理が必要になる。(例えば、局所的に $F = 0$ という方程式の解集合として定義されるものと、 $\text{graph } \varphi$ として定義されるものが同等であることを保証するために使われる。この種の応用のごく簡単な場合を、次項「関数のレベル・セット」で説明する。)

条件つき極値問題 次の 11 節で詳しく説明する。

分岐理論 パラメーター λ を含む方程式

$$F(x, \lambda) = 0$$

の解 $x = x(\lambda)$ のパラメーター依存性 (特に解の一意性がなくなる場合) を研究するのが^{ぶんきりろん}分岐理論 (bifurcation theory) である。陰関数定理が適用できる場合であれば、解の一意性が成立するので、分岐が起るためには、陰関数定理の条件が成立しないことが必要と分かる。

⁴非線形数学の重要なテーマである。

10.7 関数のレベル・セット

内点 a が f の極値点 $\implies a$ は f の停留点 i.e. $\nabla f(a) = 0$.

という定理の図形的な解釈を、既に ?? で与えておいたが、ここでは、 f のレベル・セットとからめた意味付けを補足しておく。

簡単のため、 Ω を \mathbf{R}^2 の開集合とし、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ を C^1 級の関数とする。 $c \in \mathbf{R}$ に対して

$$L_c := \{(x, y) \in \Omega; f(x, y) = c\}$$

を f の高さ c の**レベル・セット** (level set) あるいは**等高線** (contour) という。特に $c = 0$ の場合、 L_c を f の**零点集合**とも呼び、 N_f という記号で表したこともあった。

今 $(a, b) \in \Omega$ を任意に取って、 $c := f(a, b)$ とおく ($(a, b) \in L_c$ なので $L_c \neq \emptyset$ が成り立つ)。既に

(a, b) から $\nabla f(a, b)$ の方向に移動すると標高が高くなり、 $-\nabla f(a, b)$ の方向に移動すると標高が低くなる

ということは分かっている。

「 ∇f が 0 でなければ、レベル・セット L_c は曲線」 $F(x, y) := f(x, y) - c$ とおき、 F について陰関数定理を適用することによって、 $\nabla f(a, b) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ならば、 (a, b) の十分小さな開近傍 $U \times V$ で、 $f(x, y) = c$ は、以下示すように、1つの変数について解くことができる。

(1) $f_y(a, b) \neq 0$ の場合。 y について解ける。すなわち \mathbf{R} の開集合 U, V と C^1 級の関数 $\varphi: U \rightarrow V$ が存在して、 $b = \varphi(a)$,

$$N_F \cap (U \times V) = \text{graph } \varphi := \{(x, \varphi(x)); x \in U\}.$$

(2) $f_x(a, b) \neq 0$ の場合。 x について解ける。すなわち \mathbf{R} の開集合 U, V と C^1 級の関数 $\psi: V \rightarrow U$ が存在して、 $a = \psi(b)$,

$$N_F \cap (U \times V) = \text{graph } \psi \equiv \{(\psi(y), y); y \in V\}.$$

$N_F = L_c$ であることに注意すると、レベル・セット L_c は、 (a, b) の十分小さな開近傍で1変数関数のグラフ、従って曲線になることが分かる。■

「 $\nabla f = 0$ の場合は…」 狭義の極値点 (山や谷) の近傍におけるレベル・セット L_c は「点」である。ちなみに峠点の近傍におけるレベル・セットは、峠点で交わる2曲線である⁵。■

同様にして、 f が \mathbf{R}^3 の開集合 Ω で定義された C^1 級の関数で、 $\nabla f \neq 0$ を満たす場合は、 f のレベル・セット L_c は、局所的に2変数関数のグラフとして表され、特に曲面であることが分かる。

10.8 陰関数定理と逆関数定理の証明

ここでは逆関数の定理を証明し、それを利用して陰関数の定理を証明することにする。後者は簡単なので、先に片付けよう。

⁵この事実は、Morse の補題という定理から簡単に証明できる。Morse の補題については、例えば服部晶夫、「いろいろな幾何 II」、岩波書店 (1993) の命題 3.1 や横田一郎、「多様体とモース理論」、現代数学社 (1991) を参照するとよい。

逆関数定理を認めた上での陰関数定理の証明 $f: \mathbf{R}^{m+n} \supset \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{m+n}$ を、 $f(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix}$

で定義すると、これは C^1 級で、 $f(a, b) = \begin{pmatrix} a \\ F(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$f'(a, b) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}.$$

これから

$$\det f'(a, b) = \det I \cdot \det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = \det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

ゆえに逆関数定理が適用できて、点 (a, b) を含む開集合 $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ と、点 $f(a, b) = (a, 0)$ を含む開集合 W が存在して、 $f|_{\tilde{\Omega}}: \tilde{\Omega} \rightarrow W$ は C^1 級の逆関数 g を持つ。

$\forall (x, y) \in \tilde{\Omega}$ に対して $g(x, y) = (x, \psi(x, y))$ と書ける。(実際、 $(\eta(x, y), \psi(x, y)) := g(x, y)$ とおくと、 $(x, y) = f(\eta(x, y), \psi(x, y)) = (\eta(x, y), F(\eta(x, y), \psi(x, y)))$. ゆえに $x = \eta(x, y)$ であるから、 $g(x, y) = (x, \psi(x, y))$.)

射影 $\pi: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ を $\pi(x, y) = y$ で定めると、 $\psi = \pi \circ g$ と表現できる。これから ψ は C^1 級であることが分かる。

一方 $\pi \circ f = F$ ゆえ、 $\forall (x, y) \in W$ に対して

$$F(x, \psi(x, y)) = F(g(x, y)) = (\pi \circ f) \circ g(x, y) = \pi \circ (f \circ g)(x, y) = \pi(x, y) = y.$$

さて a を含む開集合 \tilde{U} , b を含む開集合 V を十分小さく取って

$$\tilde{U} \times V \subset \tilde{\Omega}, \quad \tilde{U} \times \{0\} \subset W$$

が成り立つようにする。そして $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \mathbf{R}^m$ を $\tilde{\varphi}(x) = \psi(x, 0)$ で定める ($x \in \tilde{U}$ の時 $(x, 0) \in \tilde{U} \times \{0\} \subset W = \psi$ の定義域 であることに注意)。 ψ が C^1 級ゆえ $\tilde{\varphi}$ も C^1 級である。そして $\tilde{\varphi}(a) = b$. 実際 $\varphi(a) = \psi(a, 0) = \pi \circ g(a, 0) = \pi(a, b) = b$.

$U = \tilde{U} \cap \tilde{\varphi}^{-1}(V)$ とおくと U は a を含む開集合で $\varphi(U) \subset V$.

そして $x \in U$ とすると $\varphi(x) \in \varphi(U) \subset V$. よって $(x, \varphi(x)) \in U \times V \subset \tilde{U} \times V \subset \tilde{\Omega}$. ゆえに $F(x, \varphi(x)) = F(x, \psi(x, 0)) = 0$.

逆に $F(x, y_1) = 0$ となったとすると、

$$f(x, y_1) = (x, F(x, y_1)) = (x, 0) = (x, F(x, \varphi(x))) = f(x, \varphi(x)).$$

$f|_{\tilde{\Omega}}$ は 1 対 1 ゆえ、 $y_1 = \varphi(x)$. ■

この逆に、陰関数定理から逆関数を導く論法も紹介しておく (我々の話の筋「逆関数定理を証明し、それから陰関数定理を導く」には必要がないわけだが)。

陰関数定理を認めた上での逆関数定理の証明 講義の話の流れからは必要ないので、アイデアだけ。 $F(x, y) := f(x) - y$ により F を定義すると、 $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x)$ であるから、

$$\det \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = \det f'(a) \neq 0.$$

これから F について陰関数定理が適用できて、 (a, b) の近傍で $F(x, y) = 0$ が x について解けることが分かる。 ■

それでは逆関数の定理の証明を始めよう。証明には色々な方法があり、解析学の常套手段である「逐次近似法」を使う証明は捨てがたいが、準備に手間がかかるので、ここでは「コンパクト集合上の連続関数は最小値を持つ」という定理に持ち込む方法を採用する。

逆関数の定理の証明

1° $A := f'(a)$, $\tilde{f} := A^{-1} \circ f$ とおくと、 $(\tilde{f})'(a) = I$ (I は単位行列) となる。 \tilde{f} について定理を証明すれば $f = A \circ \tilde{f}$ について示せたことになる。そこで以下 $f'(a) = I$ と仮定する。

2° **主張 A:** $\exists U: a$ を内点として含む閉区間 $\subset \mathbf{R}^n$ s.t.

$$(4) \quad \forall x \in U \setminus \{a\} \quad f(x) \neq f(a).$$

$$(5) \quad \forall x \in U \quad \det f'(x) \neq 0.$$

$$(6) \quad \forall x \in U \quad \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{1}{2}.$$

主張 A の証明 f' の連続性により、 U を十分小さく取れば (6) は成り立つ。同様に $\det f'(a) = \det I = 1 \neq 0$ に注意すれば、 U を十分小さく取れば (5) も成り立つ。(4) については、まず f が a で微分可能であることから

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0.$$

特に $\exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$0 < \|x-a\| < \varepsilon \implies \frac{\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} < \frac{1}{2}.$$

ところが $f(x) = f(a)$ とすると

$$\frac{\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = \frac{\|0 - I(x-a)\|}{\|x-a\|} = \frac{\|x-a\|}{\|x-a\|} = 1.$$

ゆえに $0 < \|x-a\| < \varepsilon$ ならば $f(x) \neq f(a)$ が成り立つ。■

3° **主張 B:**

$$(7) \quad \forall x_1, x_2 \in U \quad \|x_1 - x_2\| \leq 2 \|f(x_1) - f(x_2)\|.$$

(これから $f|_U$ の単射性はすぐ分かるし、後述の逆写像が連続であることの証明の鍵となる。)

主張 B の証明 $g(x) := f(x) - x$ とおくと

$$g'(x) = f'(x) - I = f'(x) - f'(a)$$

であるから

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \sup_{\xi \in U} \|g'(\xi)\| \|x_1 - x_2\| = \sup_{\xi \in U} \|f'(\xi) - f'(a)\| \|x_1 - x_2\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}.$$

すなわち

$$\|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

ゆえに

$$\|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

移項して両辺を 2 倍すれば、(7) を得る。■

4° $B := U^b$ (U の境界), $d := \inf_{y \in f(B)} \|y - f(a)\|$ とおくと $d > 0$. 実際

- (4) より $f(a) \notin f(B)$.
- B は \mathbf{R}^n の有界閉集合で、コンパクトであるから、連続写像 f による像 $f(B)$ もコンパクトで、特に $f(B)$ は閉集合である。
- 「閉集合とそれに属さない点との距離は正である」

であるから⁶。さて $W := B(f(a); d/2)$ とおくと

$$(8) \quad y \in W, \quad x \in B \implies \|y - f(a)\| < \|y - f(x)\|.$$

(図を描くことを勧める) 実際、まず W の定義から

$$\|y - f(a)\| < \frac{d}{2},$$

一方 $x \in B$ より

$$\|f(x) - f(a)\| \geq \inf_{y \in f(B)} \|y - f(a)\| = d$$

であるから

$$\begin{aligned} \|f(x) - y\| &= \|f(x) - f(a) + f(a) - y\| \geq \|f(x) - f(a)\| - \|f(a) - y\| \\ &> d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > \|y - f(a)\|. \end{aligned}$$

5° **主張 C:**

$$\forall y \in W \quad \exists! \bar{x} \in U \setminus B \quad \text{s.t.} \quad f(\bar{x}) = y.$$

主張の C 証明 関数 $h: U \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$h(x) := \|y - f(x)\|^2 \equiv (y - f(x), y - f(x))$$

で定義する。これはコンパクト集合 U 上の連続関数であるから、最小値 $h(\bar{x})$, $\bar{x} \in U$ を取る。ところで (8) より

$$x \in B \implies h(a) < h(x).$$

ゆえに $\bar{x} \notin B$ i.e. $\bar{x} \in U^\circ$. ゆえに h は内点 \bar{x} で最小値を取ることになり、 $\nabla h(\bar{x}) = 0$. $\nabla h(\bar{x}) = f'(\bar{x})^T (f(\bar{x}) - y)$ であり、(5) より $f'(\bar{x})$ は正則ゆえ $f(\bar{x}) - y = 0$. すなわち $f(\bar{x}) = y$. \bar{x} の一意性は (7) から分かる。

6° ここで

$$V := (U \setminus B) \cap f^{-1}(W)$$

とおくと V は a の開近傍である。(実際 W は開球であるから開集合であり、連続写像 f による逆像 $f^{-1}(W)$ は開集合である。 $U \setminus B$ は U の内部であるから、もちろん開集合である。2つの開集合の交わりであるから、 V は開集合である。

一方、 $a \in U$, $a \notin B$ は明らかで、 $f(a) \in W = B(f(a); d/2)$ より $a \in f^{-1}(W)$ であるから、 $a \in V$.) 前項から

$$f|_V: V \longrightarrow W$$

は逆関数 $f^{-1}: W \rightarrow V$ を持つ(本当は f_V^{-1} と書くべきであるが、繁雑になるので、以下この証明中では単に f^{-1} と書く)。

⁶(初等的な証明) $d = 0$ とすると、 $\exists \{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ s.t. (i) $\forall n \in \mathbf{N} \quad y_n \in f(B)$, (ii) $\|y_n - f(a)\| \rightarrow 0$. $f(B)$ が閉集合であるから、 $f(a) \in f(B)$ だが、これは $f(a) \notin f(B)$ に矛盾する。

7° f^{-1} は連続である。実際 (7) より $y_1, y_2 \in W$ とするとき

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|$$

であるから。

8° **主張 D:** $\forall x \in V$ に対して、 f^{-1} は $y := f(x)$ で微分可能で

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}.$$

主張 D の証明 $x_0 \in V$ に対して、 $A := f'(x_0)$ とおく。微分可能性の定義から

$$(9) \quad f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \varepsilon(x)$$

とおくと

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\varepsilon(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

さて $\forall y \in W$ に対して $x := f^{-1}(y)$ とおくと $x \in V$ で $f(x) = y$ 。それで (9) の両辺に A^{-1} をかけ、 y_0, y で書き直すと

$$A^{-1}(y - y_0) = f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) + A^{-1}\varepsilon(f^{-1}(y)).$$

ゆえに

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - A^{-1}\varepsilon(f^{-1}(y)).$$

そこで次のことを示せばよい。

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\|A^{-1}\varepsilon(f^{-1}(y))\|}{\|y - y_0\|} = 0.$$

これを示すには

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\|\varepsilon(f^{-1}(y))\|}{\|y - y_0\|} = 0$$

を示せばよい。

$$\frac{\|\varepsilon(f^{-1}(y))\|}{\|y - y_0\|} = \frac{\|\varepsilon(f^{-1}(y))\|}{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\|} \cdot \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\|}{\|y - y_0\|}.$$

f^{-1} の連続性より、 $y \rightarrow y_0$ のとき $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(y_0)$ 。よって右辺の第 1 因子 $\rightarrow 0$ 。一方第 2 因子は、第 6° より 2 で押さえられる。

9° f^{-1} が C^1 級であること。 f^{-1} のヤコビ行列 $(f^{-1})'(y)$ は $f'(x)$ の逆行列であり、成分は Cramer の公式から、分母が $\det f'(x)$ 、分子は $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ の多項式として表現できる。これは y の関数として見て連続である。ゆえに f^{-1} は C^1 級である。■

11 条件付き極値問題 (Lagrange の未定乗数法)

11.1 2 変数の場合

まず 2 変数関数の場合に説明する。

これまで扱った極値問題では、定義域が基本的には開集合であった。すると

$$\text{内点 } a \text{ が } f \text{ の極値点} \implies a \text{ は } f \text{ の停留点, i.e. } \nabla f(a) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix} = 0.$$

という命題が成り立ち、極値点を探すことは比較的簡単であった。以下では、関数 f の極値を条件

$$(10) \quad g(x, y) = 0$$

の下で求めることを考える。すなわち g の零点集合

$$N_g := \{(x, y); g(x, y) = 0\}$$

に f を制限して考える。これは普通、開集合にはならない。よって、 f の停留点 ($f'(a) = 0$ となる点 a のこと) を探しても意味がない。

例 11.1 条件 $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で

$$f(x, y) := x^2 + 3xy + y^2$$

の最大値、最小値を求めよ。

解答の方針 条件 $g(x, y) = 0$ を $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ と y について解いて代入して、 x のみの関数についての最大最小問題に直せば解ける。ここで陰関数が出て来ていることに気がつくだろうか? (余談: これは2次形式なので、2次形式の取り扱いに詳しくれば、微積分を一切使わないで解くことも可能である。また、 $g = 0$ は単位円周で、三角関数を使ってパラメーター付けできるから、それを使って1変数関数の最大最小問題にすることも出来る。) ■

例 11.2 平面 \mathbf{R}^2 内の曲線 $y = x^2$ 上の点と点 $(0, 1)$ との距離の極値を求めよ。これは

$$\begin{cases} f(x, y) := \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\ g(x, y) := x^2 - y \end{cases}$$

とする条件付き極値問題である。

この場合、 $g(x, y) = 0$ は $y = x^2$ と解ける。これを f に代入して出来る

$$h(x) := f(x, x^2) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1)^2}$$

についての普通の極値問題に帰着できる。 ■

陰関数定理の節で述べたように、すべての方程式 $g(x, y) = 0$ から陰関数 $y = \varphi(x)$ が具体的に求まるとは限らないので、上の2つの例のような解き方は、運が良くない限り出来ないわけである。そこで、次の定理の出番となる。

定理 11.3 (条件つき極値問題に対する Lagrange の未定乗数法 2 変数版, Lagrange (1788 年))

Ω を \mathbf{R}^2 の開集合、 f と g を Ω で定義され \mathbf{R} に値を持つ C^1 級の関数として、

$$N_g := \{(x, y) \in \Omega; g(x, y) = 0\}$$

とおいたとき

$$\nabla g \neq 0 \quad \text{on } N_g$$

が成り立つとする。また条件 $g(x, y) = 0$ の下で、 f は $a = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in N_g$ で極値を取るとする (すなわち、 $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $f(a) = \max\{f(x); x \in B(a; \varepsilon) \cap N_g\}$ または $f(a) = \min\{f(x); x \in B(a; \varepsilon) \cap N_g\}$)。このとき $\exists \lambda \in \mathbf{R}$ s.t.

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a). \end{aligned}$$

注意 11.4 (1) λ のことを **Lagrange の未定乗数 (Lagrange multiplier)** という。

(2) 極値点の座標 α, β , 未定乗数 λ は、連立方程式

$$\begin{cases} g(\alpha, \beta) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(\alpha, \beta) \end{cases}$$

の解であり、これから具体的に求まる場合が多い (未知数 3 個、方程式 3 個)。この場合は条件付き極値問題が解けるわけである。この方法を **Lagrange の未定乗数法** と呼ぶ。この条件は

$$F(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

とおくと

$$F_\lambda = F_x = F_y = 0 \quad \text{i.e. } \nabla F = 0$$

と書ける。ここで ∇ は (x, y, λ) に関する勾配 (gradient) を表す。この形で定理を述べている本も多い。■

証明 仮定

$$\nabla g(a) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) \neq 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(a) \neq 0.$$

(i) $\frac{\partial g}{\partial y}(a) \neq 0$ の場合. 陰関数の定理から、点 a の近傍で

$$g(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

と y について解けて

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

となる。そこで

$$h(x) := f(x, \varphi(x))$$

とおくと

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \right). \end{aligned}$$

h は α で極値となるから $h'(\alpha) = 0$. $(\alpha, \varphi(\alpha)) = (\alpha, \beta) = a$ に注意して

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(a) = 0.$$

ここで λ を

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a)} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a) = 0$$

とおくと

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a) = 0.$$

まとめると

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

(ii) $\frac{\partial g}{\partial x}(a) \neq 0$ の場合. 今度は $g(x, y) = 0$ を x について解けばよい。後は同様である。■

問 11.5 上の定理は 2 変数関数に関するものだが、 n 変数関数に一般化して、証明せよ。

極値の条件の図形的な解釈 $c = f(a)$ に対して、 f のレベル・セット $L_c = \{(x, y) \in \Omega; f(x, y) = c\}$ を考える。条件

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$$

は、 $N_g = \{(x, y); g(x, y) = 0\}$ と L_c が接することを意味する ($\nabla f(a)$ は L_c の法線ベクトル、 $\nabla g(a)$ は N_g の法線ベクトルだから)。こうなることは次のように考えても納得できる。

点 (x, y) が N_g に沿って、 $a = (\alpha, \beta)$ から動くとき、 $g(x, y) = g(\alpha, \beta) = 0$ であるから

$$0 = g(x, y) - g(\alpha, \beta) \doteq \left(\nabla g(a), \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \right).$$

f は $a = (\alpha, \beta)$ で極値を取るのので、 $(x, y) \in N_g$ が (α, β) に近いとき、 $f(x, y)$ は $f(\alpha, \beta)$ に非常に近いと考えられる。ゆえに

$$0 \doteq f(x, y) - f(\alpha, \beta) \doteq (\nabla f(a), \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix}).$$

よって $\nabla f(\alpha, \beta)$ と $\nabla g(\alpha, \beta)$ は、ともに $\begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix}$ に直交する。これから

$$\nabla g(\alpha, \beta) \parallel \nabla f(\alpha, \beta).$$

ゆえに f の等高線 L_c と N_g は接している。■

11.2 n 変数, d 個の制約条件の場合

一般の n 変数関数で、制約条件も複数の場合に拡張した定理を (証明抜きで) 掲げておこう。

定理 11.6 (Lagrange の未定乗数法, n 変数で制約条件 d 個の場合) Ω を \mathbf{R}^n の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ を C^1 級の関数、 d を $1 \leq d < n$ なる自然数、

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$$

を C^1 級の関数で

$$\text{rank } \mathbf{g}'(x) = d \quad (\forall x \in \Omega)$$

を満たすもの、 $a \in \Omega$ で $\mathbf{g}(a) = 0$ 、 f は条件 $\mathbf{g} = 0$ の下で a で極値を取る、とすると

$$\exists \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^d \text{ s.t.}$$

$$(11) \quad \nabla f(a) = \sum_{j=1}^d \lambda_j \nabla g_j(a), \quad \text{また (もちろん) } \mathbf{g}(a) = 0.$$

注意 11.7 やはり

$$F(x, \boldsymbol{\lambda}) := f(x) - \sum_{j=1}^d \lambda_j g_j(x)$$

とおくと、方程式は (11) は次と同値になる:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i}(a, \boldsymbol{\lambda}) = 0 & (i = 1, \dots, n) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}(a, \boldsymbol{\lambda}) = 0 & (j = 1, \dots, d). \end{cases}$$

(これは、 F のすべての変数についての gradient が 0 と書けることに注意。) ■

11.3 例題

Lagrange の未定乗数法の例を二つほどあげる。いずれも意味が明らかな (高校数学でも答が出る) 問題である。

例題 11.1 方程式 $ax + by + c = 0$ ($(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, $c \in \mathbf{R}$) で表される平面内の曲線を L とする。点 (x, y) が直線 L 上を動くときの、関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。

解答 (求めるものは原点と直線 L との距離の平方になることは (直観的にすぐ) 分かるだろうから、微分法を用いなくても「解ける」問題であるが、Lagrange の未定乗数法で求めてみる。)

1. 最小値が存在することの証明 (この問題の場合は、図形的な意味が分かるので「明らか」であるが、そうでない場合もあるので、きちんと書くとうなるか、紹介する意味で以下に示す。実は良く出て来る論法である。) L 上の点 (x_0, y_0) を一つ取り (存在することは自明)、正数 R を $R^2 = x_0^2 + y_0^2$ で定め、 $D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq R^2\}$ とおく。 L を

$$L = L \cap \mathbf{R}^2 = L \cap (D \cup D^c) = (L \cap D) \cup (L \cap D^c)$$

と分解すると、 $L \cap D$ は \mathbf{R}^2 の空でない有界閉集合であるから、関数 f は $L \cap D$ において最小値 $m = f(\alpha, \beta)$ を持つ。ところで $(\alpha, \beta) \in D$ であるから、 $m = f(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2 \leq R^2$ 。一方、 $L \cap D^c$ においては、 $f(x, y) = x^2 + y^2 > R^2$ であるから、 m は f の L 全体における最小値であることが分かる。

2. 唯一の極値は最小値である 前段で最小値が存在することが分かったが、最小値は極値であるから、もしも極値が一つしか無いことが分かれば、それが最小値である。

3. f の条件付き極値を求める 関数 $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を $g(x, y) := ax + by + c$ で定義すると、

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0.$$

したがって、条件 $g(x, y) = 0$ の下での f の極値点は (もし存在するならば) Lagrange の未定乗数法で求まる。未定乗数を λ とおくと、方程式は、

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y), \\ 0 &= f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y), \\ 0 &= g(x, y). \end{aligned}$$

これは

$$\begin{aligned} 0 &= 2x - \lambda a, \\ 0 &= 2y - \lambda b, \\ 0 &= ax + by + c \end{aligned}$$

となるから、解は

$$\lambda = -\frac{2c}{a^2 + b^2}, \quad x = -\frac{ac}{a^2 + b^2}, \quad y = -\frac{bc}{a^2 + b^2}$$

ただ一つだけである。

このように Lagrange の未定乗数法で求められた点が極値点であるかどうかは、一般にはすぐには分からないが、この場合は前段の議論から、これは極値点であり、さらには最小点に他ならないことが分かる⁷。すなわち

$$(x, y) = \left(\frac{-ac}{a^2 + b^2}, \frac{-bc}{a^2 + b^2} \right)$$

のとき、 f は最小値

$$f \left(\frac{-ac}{a^2 + b^2}, \frac{-bc}{a^2 + b^2} \right) = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

を取る。■

例 11.8 直線 $ax + by + c = 0$ ($(a, b) \neq (0, 0)$) と点 (x_0, y_0) との距離は、 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ であることを示せ。

例 11.9 平面 $ax + by + cz + d = 0$ ($(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$) と点 (x_0, y_0, z_0) との距離は、 $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ であることを示せ。

例題 11.2 方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b は正の定数) 表される平面内の楕円を E とする。点 (x, y) が直線 E 上を動くときの、関数 $f(x, y) = x + y$ の最大値、最小値を求めよ。

解答 これも図形的に考えると意味は明瞭で、Lagrange の未定乗数法を講義しなかった年度にこの問題の 3 次元版を期末試験に出したことがある (接平面をきちんと求めて、使いこなせるかというのが、出題のねらい)。

まず E は有界閉集合であるから、連続関数 f は E 上で最大値、最小値を持つことが分かる。また

$$g(x, y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

とおくと、

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \end{pmatrix}$$

であり、 $g(x, y) = 0$ を満たす任意の (x, y) に対して

$$\nabla g(x, y) \neq 0$$

であることが分かる。ゆえに条件 $g(x, y) = 0$ の下での関数 f の極値は、Lagrange の未定乗数法で求まる。方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y), \\ 0 &= f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y), \\ 0 &= g(x, y). \end{aligned}$$

これは

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \lambda \frac{2x}{a^2}, \\ 0 &= 1 - \lambda \frac{2y}{b^2}, \\ 0 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \end{aligned}$$

⁷ 「犯人は確かに存在し、この部屋の中にいる」、「(もし存在するならば) 犯人は男性である」、「この部屋の中に男性は一人だけいる」ならば、この部屋にいる唯一の男性が犯人である。

であり、

$$(x, y, \lambda) = \pm \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \right) \quad (\text{複号同順}).$$

$$f \left(\pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \pm \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{複号同順}).$$

f が最大値、最小値を持つことは既に分かっているから、これらがその最大値、最小値に他ならない。すなわち、 $(x, y) = (a^2/\sqrt{a^2 + b^2}, b^2/\sqrt{a^2 + b^2})$ のとき最大値 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 、 $(x, y) = (-a^2/\sqrt{a^2 + b^2}, -b^2/\sqrt{a^2 + b^2})$ のとき最小値 $-\sqrt{a^2 + b^2}$. ■

問 11.10 $f(x, y) := x + y$, $g(x, y) := \frac{x^2}{4} - y^2 - 1$, $N_g := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; g(x, y) = 0\}$ とする。

(1) N_g の概形を描け。

(2) N_g 上の点 $(2\sqrt{2}, 1)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) Lagrange の未定乗数法により、 N_g 上での f の極値の候補をすべて求めよ。

(4) N_g 上での f の値の範囲を求めよ。

(p.24 を見よ。)

例 11.11 \mathbf{R}^3 の開集合 Ω で定義された C^1 級関数 $g: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ が、 $\nabla g(x, y, z) \neq 0$ ($(x, y, z) \in \Omega$) を満たすとする。また $P(a, b, c)$ は \mathbf{R}^3 内の定点とする。このとき $N_g := \{(x, y, z) \in \Omega; g(x, y, z) = 0\}$ は曲面となるが、 N_g 上の点 $Q(x_0, y_0, z_0)$ で、 P からの距離が最小となるものが存在するならば、それは P から N_g に下ろした垂線の足であることを示せ。

(注意 多くの場合に「最短距離＝垂線の長さ」が成り立つことを知っていると思うが、これは上に示すような形で (かなり一般に) 成り立ち、証明も出来る、ということである。難しいことを問われているようだが、 $\vec{PQ} = (x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c)$ が、法線ベクトル $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ と平行ということ、やってみるとすごく簡単である。) ■

問 11.12 n を任意の自然数とする。 n 個の任意の正数 x_1, x_2, \dots, x_n に対して、不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

が成り立ち、等号が成立するためには

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

が必要十分であることを示せ (相加平均 \geq 相乗平均)。

(注意 これは凸関数の性質を用いて証明するのが簡単であるが、Lagrange の未定乗数法によって証明することも出来る。) ■

12 問の答&ヒント

問 10.10 の答 (結果のみ) (2) $(a, b) = (0, 0), (\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$. (3) $(x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2} \right)$ (複号任意) ■

問 11.5 簡単です。自分でやってみましょう。 ■

問 11.10 の答 (1) 高校数学でお馴染みの双曲線 ($y = \pm \frac{x}{2}$ が双曲線)。 (2) $\sqrt{2}x - 2y = 2$ (3) $\pm\sqrt{3}$ (4) $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$

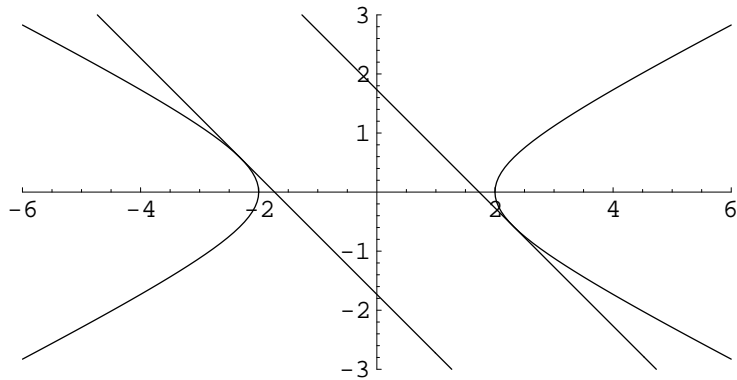


図 8: $x^2/4 - y^2 = 1$ と傾きが -1 の接線

Mathematica による図 8 の描画

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
g = ImplicitPlot[x^2/4 - y^2 == 1, {x, -6, 6},
  PlotRange -> {{-6, 6}, {-3, 3}},
  AspectRatio -> 1/2]
t = Plot[{-x + Sqrt[3], -x - Sqrt[3]}, {x, -6, 6}]
Show[g,t]
```

■