

多変数の微分積分学1 第10回

桂田 祐史

2013年6月24日

この授業用の WWW ページは

<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/>

1 今日は…

先週はきちんとした授業が出来ず、申し訳ない。

7 合成関数の微分法

合成関数の微分法の公式は

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x), \quad y = f(x).$$

成分で書くと: $z_i = g_i(y_1, \dots, y_m)$, $y_k = f_k(x_1, \dots, x_n)$ であれば、

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \quad (\text{チェイン・ルール}).$$

$z_i = g(u, v, w)$ であれば、

$$\frac{\partial z_i}{\partial \square} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \square} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \square} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \square},$$

$z_i = g(u, v)$ であれば、

$$\frac{\partial z_i}{\partial \square} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \square} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \square},$$

$z_i = g(u)$ であれば、

$$\frac{\partial z_i}{\partial \square} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \square}.$$

例 7.1 (1次元波動方程式につながる有名な例) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は C^2 級、 $c \in \mathbf{R}$ とするとき、

$$u(x, t) := f(x - ct) \quad ((x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R})$$

で $u: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を定める。 $u_x(x, t)$, $u_t(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$, $u_{tt}(x, t)$ を f を用いて表せ。 — 有名な例で、実は簡単なのだが、戸惑う人が少なくない。 f の変数を表す文字が書いてないため、チェイン・ルールが書けない、ということらしい。ときどき、 f_t とか f_x とか、蛇行運転を始める人がいる (それはおかしいです)。自分で適当な文字を決めるか、 $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

という形の公式を使う。

(解答1) f の変数を ξ で表すことにすると、

$$u(x, t) = f(\xi), \quad \xi = x - ct.$$

すると

$$u_x = f_\xi \xi_x = f'(\xi) \cdot 1 = f'(x - ct),$$

$$u_{xx} = f_{\xi\xi} \xi_x \cdot \xi_x + f_\xi \cdot \xi_{xx} = f_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + f_\xi \xi_{xx} = f''(\xi) \cdot 1^2 + f'(\xi) \cdot 0 = f''(\xi) = f''(x - ct),$$

$$u_t = f_\xi \xi_t = f'(\xi) \cdot (-c) = -cf'(x - ct),$$

$$u_{tt} = f_{\xi\xi} \xi_t \cdot \xi_t + f_\xi \cdot \xi_{tt} = f_{\xi\xi} (\xi_t)^2 + f_\xi \xi_{tt} = f''(\xi) (-c)^2 + f'(\xi) \cdot 0 = c^2 f''(x - ct).$$

(解答2) $u(x, t) = f(x - ct)$ を x で偏微分するときは、 t を定数扱いにすればよくて、 $\frac{d}{dx} f(x + a) = f'(x + a)$ となることから、

$$u_x(x, t) = f'(x - ct).$$

同様にして $u_{xx}(x, t) = f''(x - ct)$.

t で偏微分するときは、 x を定数扱いにすればよくて、 $\frac{d}{dt} f(a + bt) = bf'(a + bt)$ となることから、

$$u_t(x, t) = f'(x - ct) \cdot (-c) = -cf'(x - ct).$$

同様にして $u_{tt}(x, t) = c^2 f''(x - ct)$.

(解答3) $\varphi: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $\varphi(x, t) = x - ct$ で定めると、 φ は C^∞ 級で、 $u = f \circ \varphi$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_x(x, t) \\ u_t(x, t) \end{pmatrix} &= u'(x, t) = f'(\varphi(x, t)) \varphi'(x, t) = f'(\varphi(x, t)) \begin{pmatrix} \varphi_x(x, t) \\ \varphi_t(x, t) \end{pmatrix} = f'(\varphi(x, t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f'(x - ct) \\ -cf'(x - ct) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ゆえに $u_x(x, t) = f'(x - ct)$, $u_t(x, t) = -cf'(x - ct)$. 同様にして

$$\frac{\partial}{\partial x} f'(x - ct) = f''(x - ct), \quad \frac{\partial}{\partial t} f'(x - ct) = -cf''(x - ct)$$

であることが分かるから、

$$u_{xx}(x, t) = f''(x - ct), \quad u_{tt}(x, t) = c^2 f''(x - ct).$$

(おまけ) 上の計算から、次式が証明できる (両辺とも $f''(x - ct)$ に等しいので)。

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

これを1次元波動方程式と呼ぶ。つまり $u(x, t) = f(x - ct)$ は1次元波動方程式の解である。

■

7.3 高階の導関数

例 7.2 (変数の極座標変換、2変数2階の場合 (偏微分方程式で重要な Laplacian の極座標表示))
 C^2 級の関数 $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ があるとき、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad g(r, \theta) := f(x, y),$$

すなわち、

$$g(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

このとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

が成り立つ。chain rule と積の微分法により、

$$\begin{aligned} g_r &= f_x x_r + f_y y_r, \\ g_{rr} &= (f_{xx} x_r + f_{xy} y_r) x_r + f_x x_{rr} + (f_{yx} x_r + f_{yy} y_r) y_r + f_y y_{rr} \\ &= f_{xx} x_r^2 + (f_{xy} + f_{yx}) x_r y_r + f_{yy} y_r^2 + f_x x_{rr} + f_y y_{rr}, \\ g_{\theta\theta} &= f_{xx} x_\theta^2 + (f_{xy} + f_{yx}) x_\theta y_\theta + f_{yy} y_\theta^2 + f_x x_{\theta\theta} + f_y y_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

$x_r = \cos \theta$, $y_r = \sin \theta$, $x_{rr} = 0$, $y_{rr} = 0$, $x_\theta = -r \sin \theta$, $y_\theta = r \cos \theta$, $x_{\theta\theta} = -r \cos \theta$, $y_{\theta\theta} = -r \sin \theta$ であるから、

$$\begin{aligned} g_{rr} &= f_{xx} \cos^2 \theta + (f_{xy} + f_{yx}) \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta, \\ \frac{1}{r} g_r &= \frac{f_x \cos \theta}{r} + \frac{f_y \sin \theta}{r}, \\ \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2} (f_{xx} r^2 \cos^2 \theta - (f_{xy} + f_{yx}) r^2 \sin \theta \cos \theta + f_{yy} r^2 \sin^2 \theta - f_x r \cos \theta - f_y r \sin \theta) \\ &= f_{xx} \cos^2 \theta - (f_{xy} + f_{yx}) \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta - \frac{f_x \cos \theta}{r} - \frac{f_y \sin \theta}{r}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta} = f_{xx} + f_{yy}. \blacksquare$$

ちなみに3変数バージョンは

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} \right)$$

となり、工夫なしに馬鹿正直に計算すると、1時間半以上かかる (桂田先生調査)。

問9 C^2 級の関数 $u: \mathbf{R}^2 \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbf{R}$ と正定数 c があるとき、

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad v(\xi, \eta) = u(x, t), \quad \text{すなわち} \quad v(\xi, \eta) := u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2c}\right)$$

とおく。このとき次式を証明せよ (左辺、右辺どちらから始めても良い、余裕あれば両方)。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}.$$

余談 7.1 (ギリシャ文字に親しもう) 上の問のようにギリシャ文字を用いると苦戦する学生が一定の数いるので、あるとき、ギリシャ文字を避けて授業したことがある。そうすると確かにその部分はスムーズに進行するのだが、ともすると学生がギリシャ文字に慣れる機会を奪ってしまいかねないことに気づいた。今ではネットで「ギリシャ文字 書き方」のように検索すると、ギリシャ文字の筆順まで調べられるご時世なので、ギリシャ文字を避けて授業をする気になった。■

7.4 逆関数の微分法

1変数関数の場合の

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

に相当する定理がある。

定理 7.3 (逆関数の微分法) U と V は \mathbf{R}^n の開集合で、 $\varphi: U \rightarrow V$ は全単射、 $a \in U$, $b = \varphi(a)$, φ は a で、 φ^{-1} は b で全微分可能であるならば、

$$(\varphi^{-1})'(b) = (\varphi'(a))^{-1}.$$

(左辺の $^{-1}$ は逆関数を表し、右辺の $^{-1}$ は逆行列を表す。)

注意: 上の定理では微分可能な逆関数の存在を仮定しているが、実は $\det \varphi'(a) \neq 0$ という条件が成り立てば、局所的に微分可能な逆関数の存在が導かれるという、**逆関数定理**がある (非常に重要!)。それはこの講義科目の終盤に解説する予定である。

証明 逆関数の定義により、

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x \quad (x \in U).$$

φ は a で、 φ^{-1} は $b = \varphi(a)$ で全微分可能であるから、合成関数の微分法より、

$$(\varphi^{-1})'(b)\varphi'(a) = I \quad (I \text{ は } n \text{ 次の単位行列})$$

が成り立つ。ゆえに $(\varphi^{-1})'(b) = \varphi'(a)^{-1}$. ■

問 $\varphi(x) = x$ ($x \in \mathbf{R}^n$) とするとき、 $\varphi'(x) = I$ であることを示せ。

(解法 1) 一般に「 $f(x) = Ax + b$ ならば $f'(x) = A$ 」であるから、 $\varphi(x) = x = Ix + 0$ より、 $\varphi'(x) = I$.

(解法 2) $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ とおくと、 $\varphi_i(x) = x_i$ ($i = 1, \dots, n$).

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} x_i = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} = \delta_{ij}$$

であるから、 $\varphi'(x) = (\delta_{ij}) = I$. ■

次の例で、逆関数の微分法を使って $(\varphi^{-1})'$ を計算しているが、微分可能性を証明するには、本当は逆関数の定理のお世話になる必要があるだろう。

例 7.4 (極座標変換の逆変換のヤコビ行列 (とても重要)) $\varphi: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \ni \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ は明らかに C^1 級であるから (実は C^∞ 級である)、全微分可能である。

$$\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

逆関数の微分法によって、 $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \varphi^{-1}(x, y)$ の全微分係数は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} &= (\varphi^{-1})'(x, y) = \varphi'(r, \theta)^{-1} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\cos \theta \cdot r \cos \theta - (-r \sin \theta) \sin \theta} \begin{pmatrix} r \cos \theta & +r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ゆえに¹

$$r_x = \cos \theta, \quad r_y = \sin \theta, \quad \theta_x = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \theta_y = \frac{\cos \theta}{r}. \blacksquare$$

(以下はやや脱線 — 無視してよろしい) この結果を逆関数の微分法を使わずに求めてみよう。 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ であるから、 r_x と r_y は比較的簡単に得られる。

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ r_y &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

これらがそれぞれ $\cos \theta$, $\sin \theta$ に等しいことは容易に分かる²。 θ の導関数の方は少し難しい。割と多くのテキストに

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

と書かれているが³、これは $(\text{mod } \pi)$ でしか正しくない式である。本当は、 $\tan^{-1} \frac{y}{x}$ が主値 $((-\pi/2, \pi/2)$ 内の値) を意味するとして、

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x} & ((x, y) \text{ が第1象限内あるいは } x \text{ 軸の正の部分上の点}) \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} + \pi & (x < 0, \text{ 言い換えると } (x, y) \text{ が第2,3象限内あるいは } x \text{ 軸の負の部分上の点}) \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} + 2\pi & ((x, y) \text{ が第4象限内の点}) \\ \frac{\pi}{2} & (x = 0 \text{ かつ } y > 0) \\ \frac{3\pi}{2} & (x = 0 \text{ かつ } y < 0) \end{cases}$$

¹ こういう計算をするとき、ヤコビ行列の成分の並べ方を間違えると、とんでもない結果になってしまうことに注意しよう。

² 例えば $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \theta}{\sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta$.

³ 本当に困ったことである。C 言語のプログラムで、デカルト座標を極座標に直すには、`r=sqrt(x*x+y*y); theta=atan2(y,x);` のようにする。`theta=atan(y/x);` ではマズイ — というのは常識的なことなのだが、数学書の方が旧態依然のままなのは情けない。

となるはずである。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1} \frac{y}{x} &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \tan^{-1} \frac{y}{x} &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

であることから、

$$\theta_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \theta_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

が導けるが、少々面倒である (例えば y 軸上でどうすれば良いか分かりますか? ⁴)。これがそれぞれ $-\frac{\sin \theta}{r}$, $\frac{\cos \theta}{r}$ に等しいことは容易に確かめられる。■

例 7.5 (Laplacian の極座標表示 (再び)) C^2 級の関数 $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ があるとき、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad g(r, \theta) := f(x, y)$$

で g を定める。すなわち、

$$g(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

このとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

が成り立つ。上では、右辺を変形して行って左辺になることで示した。

応用上は、 $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ が先にあつて、これを g とその偏導関数で表したいので、以下のように左辺を変形して行って右辺になることを示す方が望ましい。まず x, y についての 1 階偏導関数

$$\begin{aligned}f_x &= g_r r_x + g_\theta \theta_x = g_r \cos \theta - g_\theta \frac{\sin \theta}{r}, \\ f_y &= g_r r_y + g_\theta \theta_y = g_r \sin \theta + g_\theta \frac{\cos \theta}{r}\end{aligned}$$

から、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

以下は (面倒ではあるが、機械的計算で)

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} f_x = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(g_r \cos \theta - g_\theta \frac{\sin \theta}{r} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(g_r \cos \theta - g_\theta \frac{\sin \theta}{r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(g_r \cos \theta - g_\theta \frac{\sin \theta}{r} \right) \\ &= \cos \theta \left(g_{rr} \cos \theta - g_{\theta r} \frac{\sin \theta}{r} - g_\theta \frac{-\sin \theta}{r^2} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \left(g_{r\theta} \cos \theta + f_r (-\sin \theta) - g_{\theta\theta} \frac{\sin \theta}{r} - g_\theta \frac{\cos \theta}{r} \right) \\ &= g_{rr} \cos^2 \theta - \frac{2g_{r\theta} \cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{g_{\theta\theta} \sin^2 \theta}{r^2} + \frac{g_r \sin^2 \theta}{r} + \frac{2g_\theta \cos \theta \sin \theta}{r^2}.\end{aligned}$$

⁴例えば、 $x = 0, y > 0$ の範囲では、偏微分の定義から $\theta_y = 0 = \frac{x}{x^2 + y^2}$ となることは容易に分かるが、 $\theta_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ となることは、偏導関数の右側からの極限と、左側からの極限がともに $-\frac{y}{x^2 + y^2}$ であることを確かめ、「 $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ が連続で、 $c \in (a, b)$ 以外では微分可能で、 $\lim_{\substack{x \neq c \\ x \rightarrow c}} f'(x) = D$ であれば、 f は c で微分可能で、 $f'(c) = D$ 。」という定理を用いる。

同様に

$$f_{yy} = g_{rr} \sin^2 \theta + \frac{2g_{r\theta} \cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{g_{\theta\theta} \cos^2 \theta}{r^2} + \frac{g_r \cos^2 \theta}{r} - \frac{2g_\theta \cos \theta \sin \theta}{r^2}.$$

ゆえに

$$f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}. \blacksquare$$

8 平均値の定理、Taylor の定理

合成関数の微分法を用いると、多変数関数版平均値の定理・Taylor の定理が得られる。これらは例えば極値問題の解析に利用できる。

問題意識 Ω が \mathbf{R}^n の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $a \in \Omega$ とするとき、($\|h\|$ が十分小さい h に対して $a+h \in \Omega$ となるわけだが) $f(a+h) - f(a)$ はどうなるか? 以前 $f(a+h) - f(a) \doteq f'(a)h = \nabla f(a) \cdot h$ ということを書いたが、 \doteq は数学的な主張ではない。そこをちゃんとしたい。

注意 f の値域の次元 (これまで m と書いてきたもの) は、1 とする。その理由は後述する。

8.1 アイディア

解くためには、次のアイディア一発で十分である。

$$F(t) := f(a+th) \quad (t \in [0, 1])$$

とおくと、 $F(0) = f(a)$, $F(1) = f(a+h)$ であるから、

$$f(a+h) - f(a) = F(1) - F(0).$$

この F は 1 変数関数であるから、1 変数関数の平均値定理、Taylor の定理が使える。

F の導関数 F' はどうなるか? $\varphi(t) := a+th$ とおくと、 F は f と φ の合成関数である: $F = f \circ \varphi$. また、 $\varphi'(t) = h$. 実際、

$$\varphi(t) = a + th = \begin{pmatrix} a_1 + th_1 \\ a_2 + th_2 \\ \vdots \\ a_n + th_n \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} (a_1 + th_1)' \\ (a_2 + th_2)' \\ \vdots \\ (a_n + th_n)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = h.$$

ゆえに合成関数の微分法から、

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(a+th) = f'(\varphi(t))\varphi'(t) = f'(a+th)h = \nabla f(a+th) \cdot h.$$

特に

$$F'(0) = \frac{d}{dt} f(a+th) \Big|_{t=0} = f'(a)h = \nabla f(a) \cdot h.$$

この量を、 a における、 f の h 方向の**方向微分係数**と呼び、 $\frac{\partial f}{\partial h}(a)$ で表す。

記号の約束: 方向微分係数

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \left. \frac{d}{dt} f(a + th) \right|_{t=0} = f'(a)h = \nabla f(a) \cdot h.$$

8.2 平均値の定理

定理 8.1 (多変数関数の平均値の定理) Ω は \mathbf{R}^n の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ は全微分可能、 $a, b \in \Omega$, $a \neq b$, $[a, b] \subset \Omega$ とするとき、

$$\exists c \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

ただし

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{(1-t)a + tb; t \in [0, 1]\}, \\ (a, b) &:= \{(1-t)a + tb; t \in (0, 1)\}. \end{aligned}$$

注意 8.2 $n \geq 2$ のとき、1 変数の場合に良く登場する式

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

はナンセンスである (ベクトル $b - a$ で割れない)。■

証明 $h := b - a$, $F(t) := f(a + th)$ ($t \in \mathbf{R}$) とおくと、

$$f(b) - f(a) = F(1) - F(0), \quad F'(t) = f'(a + th)h.$$

1 変数関数の平均値の定理から、

$$\exists \theta \in (0, 1) \quad \text{s.t.} \quad F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot 1.$$

ゆえに

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta h)h.$$

$c := a + \theta h$ とおくと、 $c \in (a, b)$ で、 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ 。■