多変数の微分積分学1 第4回

桂田 祐史

2013年5月13日

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/

1 前回のやり残し

問3を解くための説明が不足していたので。

「開球 $B(a;r)$ は開集合、閉球 $\overline{B}(a;r)$ は閉集合」というのを紹介した。そこで球であるために $r>0$ という仮定をおいたが、$r=0$ の場合も、証明の筋は成立する。$r=0$ のときに $B(a;r)$, $\overline{B}(a;0)$ が何になるか、考えてみよう。

例 1.1 $\mathbf{R}$ の開区間というのは、(a,b), $(-\infty,b)$, (a,∞), $(-\infty,\infty)$ (ここで a, b は $a<b$ を満たす実数) のいずれかのことで、これらが開集合であることは証明済みであるが、次のようにも理解できる。$f\colon\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}$ を $f(x)=x$ で定めると、これは多項式関数なので連続で、

$$(a,b)=\left\{x\in\mathbf{R}^1; a<f(x)<b\right\},\quad (-\infty,b)=\left\{x\in\mathbf{R}^1; f(x)<b\right\},\quad (a,\infty)=\left\{x\in\mathbf{R}^1; f(x)>a\right\}$$

は命題3.4から $\mathbf{R}^1$ の開集合である。

同様に

$$[a,b]=\left\{x\in\mathbf{R}^1; a\le f(x)\le b\right\},\quad (-\infty,b]=\left\{x\in\mathbf{R}^1; f(x)\le b\right\},\quad [a,\infty)=\left\{x\in\mathbf{R}^1; f(x)\ge a\right\}$$

は命題3.4から $\mathbf{R}^1$ の閉集合である。■

例 1.2 第1象限 $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x>0, y>0\}$ は、$f,g\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を $f(x,y)=x$, $g(x,y)=y$ で定めると、

$$A=A_1\cap A_2,\quad A_1=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; f(x,y)>0\right\},\quad A_2=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; g(x,y)>0\right\}$$

と書ける。命題3.4から A_1, A_2 は $\mathbf{R}^1$ の開集合であり、命題3.2から $A_1\cap A_2$ も $\mathbf{R}^1$ の開集合である。ゆえに A は $\mathbf{R}^1$ の開集合である。■

2 極限を求める問題

問4 つぎの lim が存在するかどうか調べ、存在する場合はそれを求めよ。発散する場合も ∞ または $-\infty$ であるときはそれを指摘せよ。出来る限り根拠を書くこと。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}(3x^2+4xy+5y^2)$ (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{2+3xy}{4x^2+5y^2}$ (3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}$ (4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$ (6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ (8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}$.

2.1 連続ならば…

試験の問題に出されることはあまり多くはないのだが、実際、微積に現れる多くの関数は連続である。連続関数の定義

$$「f \text{ が } a \text{ で連続} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to a} f(x) = f(a)」$$

より、明らかに「f が a で連続 $\Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$」が成り立つ。つまり連続関数については、極限の計算は単に関数値の計算 ($x = a$ を代入?) をするだけである。

微分の定義を考えると、分数関数の極限 $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{q(x)}{p(x)}$ が重要、ということが分かる。難しいのは $\displaystyle\lim_{x\to a} p(x) = 0$ の場合である。

2.2 分母が 0 に近づく、しかし分子はそうでないならば…

$f(x) = \dfrac{q(x)}{p(x)}$ で、$\displaystyle\lim_{x\to a} p(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to a} q(x) \neq 0$ (収束しないか、収束して極限が 0 でない) ならば、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ は存在しない。証明は背理法による。つまり $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$ であれば、

$$\lim_{x\to a} q(x) = \lim_{x\to a} \left(\frac{q(x)}{p(x)} \cdot p(x)\right) = \lim_{x\to a} (f(x) \cdot p(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} p(x) = A \cdot 0 = 0$$

であり、仮定に反する。

というわけで、問題はいわゆる不定形 $\dfrac{0}{0}$ の場合、ということになる。

2.3 不定形

不定形 $\dfrac{0}{0}$ は難しい (でも大事)。これについては、必ずうまく行く、というやり方はない。

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ の場合に少し練習してみよう。(i) $y = kx$ 作戦, (ii) 極座標作戦などが有効である。

2.3.1 $y = kx$ 作戦

簡単だけど役に立つ命題「$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$, $a \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbf{R}^m$, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$ ならば、$\Omega' \subset \Omega$, $a \in \overline{\Omega'}$ となる Ω' に対して、$\displaystyle\lim_{\substack{x\in\Omega' \\ x\to a}} f(x) = A.$」に注目しよう。

問 自分で証明してみよう (面倒くさがらずにやってみると、本当に単純です)。

2 次元で $a = (0,0)$ の場合に、$\Omega' = \{(x,y) \in \Omega; y = kx\}$ として利用すると、

$$「\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A \text{ ならば、} \forall k \in \mathbf{R}\ \lim_{\substack{y=kx \\ x\to 0}} f(x,y) = A.」$$

これから $\displaystyle\lim_{\substack{y=kx \\ x\to 0}} f(x,y)$ が存在しなかったり、存在しても k に依存したりすると、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない (対偶というか、背理法で証明できる)。

「逆は必ずしも真ならず」で、$\displaystyle\lim_{\substack{y=kx \\ x\to 0}} f(x,y)$ が k によらない極限を持っていても、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在するとは限らない。

(反例: $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ について、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しないが、直線 $y=kx$ にそった極限は 0 となる。)

しかし $\displaystyle\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f(x,y)$ が k によらない極限を持つことが示せたとして、何も言えないかというと、そうではない。もしも $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在するならば、それは A でしかあり得ない、ことが分かる。

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A$ が成り立つかどうか。$|f(x,y)-A|$ を考え、これを抑えるような量で、$(x,y)\to(0,0)$ のとき 0 に収束するようなものが見つかるか、という作業になる。

3　連続関数の重要な性質

次の 3 つの定理は重要である。

(a) 中間値の定理

(b) 「$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合 K 上の実数値連続関数 $f\colon K\to\mathbf{R}$ は、必ず最大値を持つ」(Weierstrass)

(c) 「$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合 K 上の連続関数 $f\colon K\to\mathbf{R}^m$ は、K で一様連続である」(Weierstrass)

(c) は積分論で重要な役割を果たすが、この『多変数の微分積分学 1』では必要ないので省略する。

(b) は重要であるが、『数学演習 2』でも学んだはずだし ($\mathbf{R}^2$ での話だったかもしれないが、$\mathbf{R}^n$ でも同様である)、とりあえず証明は省略する。

(a) は簡単であるので、ここで紹介して証明する。

3.1　中間値の定理

1 変数の中間値の定理とは、「$f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ が連続で、k が $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数であるとき (つまり $f(a)<k<f(b)$ または $f(a)>k>f(b)$)、$f(c)=k$ を満たす $c\in(a,b)$ が存在する」という定理である。

多変数関数では、区間 $[a,b]$ をどのように一般化するかが問題である。

定義 3.1 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ とするとき、Ω が**連結** (connected) であるとは、Ω 内の任意の 2 点 x, y に対して、Ω 内の連続曲線で x と y を結ぶものが存在する、すなわち

$$\forall x,y\in\Omega\quad \exists\varphi\colon[0,1]\to\Omega\ \text{連続 s.t. } \varphi(0)=x\ \text{かつ}\ \varphi(1)=y$$

が成り立つことをいう。

注意 3.2 (連結性の定義について) 実は、一般の位相空間論においては、連結性は、上とは違った (あまり直観的でない) やり方で定義される。上の定義の条件を満足する集合は、**弧状連結**(こじょうれんけつ) (**arcwise connected**) と呼ばれるのが普通である。しかし、$\mathbf{R}^n$ の開集合においては、連結＝弧状連結なので、ここでは簡単で直観的な定義法を採用した。■

$\mathbf{R}$ の部分集合 A について、A が連結であるためには、A が区間であることが必要十分である。(区間が連結であるのは簡単に分かる。逆に A が連結であるとすると、$\forall x, y \in A$ に対して、$[x, y] \subset A$ であることがすぐ導かれる。…といういい加減な話をしました。)

定理 3.3 (中間値の定理) Ω は $\mathbf{R}^n$ の連結な部分集合、$f \colon \Omega \to \mathbf{R}$ は連続ならば、次のことが成り立つ。

$$a \in \Omega,\ b \in \Omega,\ f(a) < k < f(b) \Longrightarrow \exists c \in \Omega \text{ s.t. } f(c) = k.$$

(板書の図が大事なのです…手書きのを取り込むかな？)

証明　Ω が連結であるという仮定から、a と b を結ぶ Ω 内の曲線 φ が取れる:

$$\varphi \colon [\alpha, \beta] \to \Omega \text{ 連続}, \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

このとき $f \circ \varphi \colon [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ は、連続関数の合成なので連続関数であり、

$$f \circ \varphi(\alpha) = f(\varphi(\alpha)) = f(a) < k < f(b) = f(\varphi(\beta)) = f \circ \varphi(\beta).$$

ゆえに 1 変数関数の中間値の定理から

$$\exists \gamma \in (\alpha, \beta) \text{ s.t. } f \circ \varphi(\gamma) = k.$$

そこで $c := \varphi(\gamma)$ とおけば、 $f(c) = k$ となる。 ■

3.2　Weierstrass の最大値定理

(悩ましいな。とりあえず証明してしまう、というシナリオもありうる。

1. $\mathbf{R}$ での Bolzano-Weierstrass の定理。習ったはず。一つの証明のあらすじは、区間縮小法により Cauchy 列であるような部分列が取れる。$\mathbf{R}$ の完備性により、$\mathbf{R}$ で収束する。
2. $\mathbf{R}^n$ での Bolzano-Weierstrass の定理。一つの証明のあらすじ：第 1 成分の作る数列は有界数列なので、それが収束するような部分列を取れる。さらに部分列を取って、第 2 成分の作る数列も収束するようにする。以下続けて第 n 成分も収束するような部分列を取る。終了。
3. 閉集合の点列による特徴づけ。これは書いてもノート半ページ。
4. $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合 K の点列コンパクト性。これは有界だから、Bolzano-Weierstrass で収束部分列が取れて、閉集合だから、その極限が K に含まれる、ということ。逆「点列コンパクトならば有界閉集合」も言える。
5. $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合の連続関数像は有界閉集合。ここまで準備してあれば 3 行で証明できる。
6. Weierstrass の最大値定理。$\mathbf{R}$ の有界閉集合は最大値を持つから。

ここでは余所に任せることにして、コンパクト集合の連続関数像はコンパクト、という定理の系という見方だけを紹介した。変かな？)

次の定理が重要である (中間値の定理と、この定理さえ証明できれば、多変数の微分積分学 1 としては、ほぼ完璧という気もする)。

定理 3.4 (有界閉集合上の実数値連続関数は最大値と最小値を持つ, Weierstrass) K は $\mathbf{R}^n$ の空でない有界閉集合、$f\colon K \to \mathbf{R}$ は連続とするならば、f は K 上で最大値、最小値を持つ。

数学演習 2 で、$\mathbf{R}^2$ の場合に証明を学んだはずである。$\mathbf{R}^n$ でも本質的な違いはない。

ここでは、この定理 3.4 が以下の命題 (非常に一般的に成り立つ定理の $\mathbf{R}^n$ バージョン) の系とみなせることを注意しておく。

命題 3.5 (コンパクト集合の連続関数による像はコンパクト、の $\mathbf{R}^n$ バージョン) K を $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合、$f\colon K \to \mathbf{R}^m$ は連続とするとき、$f(K)$ は $\mathbf{R}^m$ の有界閉集合である。

定理 3.4 の証明 $f\colon K \to \mathbf{R}$ が連続とすると、$f(K)$ は $\mathbf{R}$ の有界閉集合である。次の補題から $\max f(K)$, $\min f(K)$ が存在する。qed ■

補題 3.6 $\mathbf{R}$ の空でない上に有界な閉集合 K は最大値を持つ。

証明 Weierstrass の定理より、K の上限 U が存在する。$\exists \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ s.t. $\forall n \in \mathbf{N}$ $x_n \in K$, $\lim_{n\to\infty} x_n = U$. 次の命題を認めれば、$U \in K$. ゆえに $U = \max K$. ■

$\mathbf{R}^n$ における閉集合は、次のように点列の言葉を用いて特徴づけられる (解析学にとっては大変便利である):

命題 3.7 (閉集合の点列による特徴づけ) $A \subset \mathbf{R}^n$ とするとき、

$$A \text{ が閉集合} \Leftrightarrow A \text{ 内の点列がもし } \mathbf{R}^n \text{ 内で収束するならば、極限は } A \text{ に属する。}$$

証明 いずれも背理法で証明する。

($\Rightarrow$) $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は A 内の点列で、$\mathbf{R}^n$ 内で a に収束しているとする。$a \in A$ を証明するために、$a \notin A$ と仮定する。これは $a \in A^c$ ということだから、A^c が開集合であることから

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B(a;\varepsilon) \subset A^c.$$

ゆえに $B(a;\varepsilon) \cap A = \emptyset$. ところが、$x_n \to a$ $(n \to \infty)$ であるから、十分大きな $n \in \mathbf{N}$ に対して $x_n \in B(a;\varepsilon)$. $x_n \in A$ であるから、これは矛盾である。ゆえに $a \in A$ でなければならない。

($\Leftarrow$) A が閉集合でないと仮定する。すると A^c は開集合でないので、

$$\exists a \in A^c \text{ s.t. } \forall \varepsilon > 0\ B(a;\varepsilon) \not\subset A^c.$$

これは $B(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ということである。これから各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $x_n \in B(a;1/n) \cap A$ なる x_n を取ることが出来る。$x_n \to a$ $(n \to \infty)$ で、$x_n \in A$ であるから、仮定から $a \in A$. これは矛盾である。ゆえに A は閉集合である。■