

平面曲線

桂田 祐史

2002年6月30日-

<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/plane-curve/>

1 平面曲線の表現法

1.1 パラメーター曲線

1.2 1変数関数のグラフ

1.3 2変数関数の零点集合

2 弧長、面積

3 微分幾何

4 コンピューターで描く

4.1 情報へのポイント

- gnuplot については、『gnuplot 入門』¹
- Mathematica については、『Mathematica 入門』²

¹<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/howto/intro-gnuplot/>

²<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2006/mathematica/>

4.2 gnuplot

4.2.1 1変数関数のグラフ

```
gnuplot> plot sin(x),cos(x)  
gnuplot> f(x)=x**3+2*x**2+3*x+4  
gnuplot> plot [-4:4] f(x)  
gnuplot> plot [-pi/2:pi/2] [-10:10] tan(x)  
gnuplot> set plot sin(1000*x)  
gnuplot> show samples  
gnuplot> set samples 4000  
gnuplot> set plot sin(1000*x)
```

```
gnuplot> f(x)=exp(-x*x/2)/sqrt(2*pi) 標準正規分布の確率密度関数を定義  
gnuplot> plot [-3:3] f(x)
```

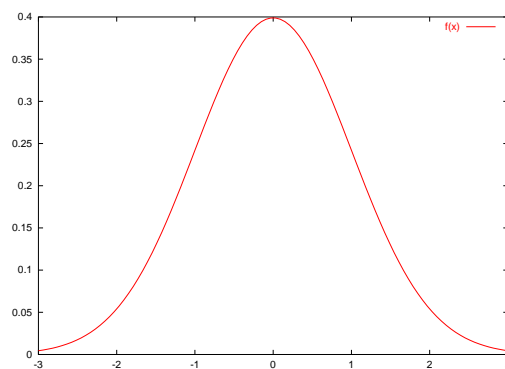


図 1: 正規分布の確率密度関数 ($\pm 3\sigma$ の範囲)

4.2.2 2変数関数の零点集合

```
gnuplot> set contour  
gnuplot> set nosurface  
gnuplot> set view 0,0  
gnuplot> set isosamples 100,100  
gnuplot> set cntrparam levels incremental 0,1,0  
gnuplot> splot x**2-y**2
```

4.2.3 パラメーター曲線

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> plot t*cos(t),t*sin(t)
gnuplot> plot [-pi:pi] cos(3*t),sin(4*t)
```

4.3 Mathematica

4.3.1 1変数関数のグラフ

```
In[1]:= Plot[{Sin[x],Cos[x]},{x,-Pi,Pi}]
In[2]:= f[x_]:=x^3+2x^2+3x+4
In[3]:= Plot[f[x],{x,-4,4}]
In[4]:= Plot[Sin[1000*x],{x,0,Pi},PlotPoints->4000]
```

4.3.2 2変数関数の零点集合

ContourPlot[] で等高線を描く

```
In[]:= ContourPlot[x^2 -y^2,{x,-2,2},{y,-2,2},ContourShading->None]
```

ImplicitPlot[] で陰関数を描く

```
In[]:= Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
In[]:= ImplicitPlot[x^2 -y^2==0,{x,-2,2}]
```

4.3.3 パラメーター曲線

```
In[]:= ParametricPlot[t*Cos[t],t*Sin[t],{t,-10,10}]
```

4.4 ヒント

双曲線 $x^2/4 - y^2 = 1$ と、その接線 (傾き -1 の) を描く。陰関数のグラフ描画と、傾きが分かりやすいように縦横の縮尺を揃えること、二つ以上のものを一つにまとめる、などのテクニク。

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
g = ImplicitPlot[x^2/4 - y^2 == 1, {x, -6, 6},
  PlotRange -> {{-6, 6}, {-3, 3}},
  AspectRatio -> 1/2]
t = Plot[{-x + Sqrt[3], -x - Sqrt[3]}, {x, -6, 6}]
gt = Show[g, t]
Export["c:/home/mk/nantoka.eps", gt]
```

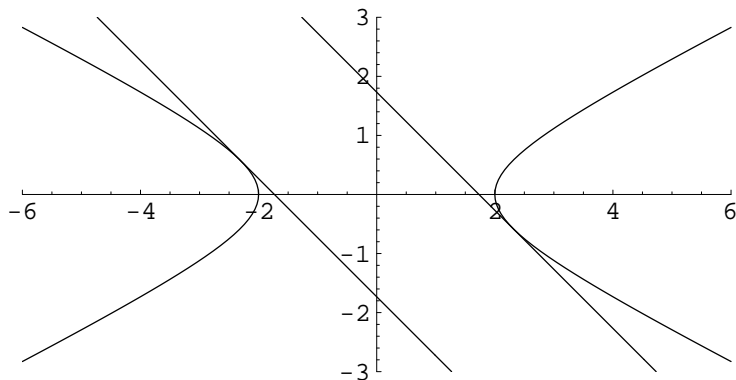


図 2: 双曲線とその接線

4.5 Maple

4.5.1 1変数関数のグラフ

```
> plot([sin(x), cos(x)], x=-Pi..Pi)
> f(x):=x^3+2x^2+3x+4;
> plot(f(x), x=-4..4);
> plot(sin(1000*x), x=0..Pi, numpoints=4000);
```

4.5.2 2変数関数の零点集合

```
> with(plots);
> contourplot(x**2-y**2, x=-2..2, y=-2..2);
```

```
> with(plots);
> implicitplot(x**2-y**2=0, x=-2..2, y=-2..2);
```

4.5.3 パラメーター曲線

```
> plot([t*cos(t),t*sin(t),t=0..2*Pi]);  
> plot([(t^2-1)/(t^2+1),2*t/(t^2+1),t=-infinity..infinity],numpoints=100);
```

5 円錐曲線

5.1 楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

「2 定点からの距離の和が一定である点の軌跡は楕円である」の解析幾何的証明

2 定点を $(c, 0)$ と $(-c, 0)$, 距離の和を $2a$ ($a > c > 0$) と置いて、

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

を移項して

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

両辺を平方して

$$(x^2 + 2cx + c^2) + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x^2 - 2cx + c^2) + y^2.$$

消去、移項、整理して

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

再び両辺を平方して

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

移項して

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

$b := \sqrt{a^2 - c^2}$ とおくと

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

割り算して

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

円 $x^2 + y^2 = b^2$ を y 軸方向に $\frac{a}{b}$ 倍したものと考えると、

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

というパラメーター表示を発見するのは簡単であろう。

```

set parametric
set size ratio -1
a=3
b=2
plot [0:2*pi] a*cos(t),b*sin(t)

```

```
a=3; b=2; ParametricPlot[{a Cos[t], b Sin[t]}, {t, 0, 2Pi}]
```

5.2 双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

「2 定点からの距離の差が一定である点の軌跡は双曲線である」の解析幾何的証明

2 定点を $(c, 0)$ と $(-c, 0)$, 距離の和を $2a$ ($c > a > 0$) と置いて、

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

を移項して

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

両辺を平方して

$$(x^2 + 2cx + c^2) + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x^2 - 2cx + c^2) + y^2.$$

整理して

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

再び両辺を平方して

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2).$$

移項して

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

$b := \sqrt{c^2 - a^2}$ とおくと

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

割り算して

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t \quad (t \in \mathbf{R})$$

```

set parametric
set size ratio -1
a = 3; b = 2;
ParametricPlot[{{a Cosh[t], b Sinh[t]},
                {-a Cosh[t], b Sinh[t]}},
               {t, -3, 3},
               PlotRange -> {{-10*a, 10*a}, {-10*b, 10*b}},
               AspectRatio -> b/a]

```

10 と 3 はマジックナンバーみたいでイヤだけど、 $\cosh 3 = 10.06\dots$ だから、ということです。

6 平面曲線紳士録

6.1 Cassini の楕形

2 定点からの距離の積が一定である点の軌跡は Cassini の楕形 (Cassini の卵形線, Cassini oval, oval of Cassini) である。Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) にちなんで名付けられた。

ちょっと整理

平面上の 2 定点からの距離の和、差、積、商が一定である点の軌跡を求める問題は有名である。

- 和が一定 ... 楕円
- 差が一定 ... 双曲線
- 積が一定 ... Cassini の楕形
- 商 (比) が一定 ... Apollonius^a の円 (特別な場合として垂直二等分線)

^aApollonius (Ἀπολλώνιος, B.C.262(245?)–190 頃.), Pergaeus, 小アジアの南海岸にあるパンフィリア (Pamphylia) のペルガに生まれ、アレキサンドリアで没す。アレキサンドリアで (ユークリッドに?) 学ぶ。円錐曲線について 8 冊の著作を著わす (ある種の座標系を利用していたため、「解析幾何の要素がある」という評もある)。記数法の改良も行った。

二定点を $(\pm a, 0)$ として、距離の積を b^2 とすると、

$$[(x - a)^2 + y^2] [(x + a)^2 + y^2] = b^4$$

という方程式が得られる。

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 = 4a^2x^2 + b^4.$$

極形式では

$$r^4 - 2a^2r^2 \cos 2\theta + a^4 = b^4.$$

b が小さく、 $b < a$ ならば二つの連結成分からなり、 $a \leq b$ ならば連結な曲線である。
 $b = a$ ならば、 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ となるので、 $a' := \sqrt{2}a$ とおくと

$$(x^2 + y^2)^2 = a'^2(x^2 - y^2)$$

となる。これはベルヌーイのレムニスケート (lemniscate of Bernoulli) と呼ばれ、8 の字形をしている。

$b > a$ ならば正則な閉曲線である。特に $a < b < \sqrt{2}a$ ならば凹みのある閉曲線、 $b \geq \sqrt{2}a$ ならば凸閉曲線である。

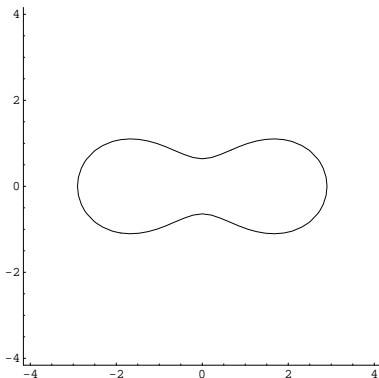


図 3: Cassini の oval ($a = 2, b = 2.1$)

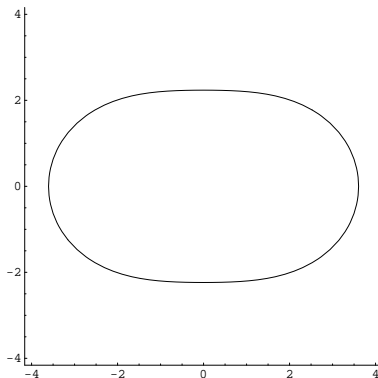


図 4: Cassini の oval ($a = 2, b = 3$)

2 変数関数のレベルセットを描きたい場合、Mathematica では、`ImplicitPlot[]` が利用できる。

Decartes の葉線, レムニスケート, Cassini の楕形を描く

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"] (最初にこのオマジナイが必要)

decartes[a_]:=ImplicitPlot[x^3+y^3-3 a x y==0,{x,-4,4},{y,-4,4}]
lemniscate[a_]:=ImplicitPlot[(x^2+y^2)^2==a^2(x^2-y^2),{x,-4,4},{y,-4,4}]
limason[a_,b_]:=ImplicitPlot[(x^2+y^2-a x)^2==b^2(x^2+y^2),{x,-4,4},{y,-4,4}]
cassini[a_,b_]:=ImplicitPlot[(x^2+y^2+a^2)^2==4a^2x^2+b^4,{x,-4,4},{y,-4,4}]

g=lemniscate[4] (a=4 のレムニスケートを描く)
SetDirectory[$HomeDirectory <> "\My Documents"]
Export["lemniscate.eps", g]
```

なお、ここでは x, y 両方の範囲を指定したが、こうすると内部で `ContourPlot[]` を利用して等高線を描画する。これに対して、 x または y の一方のみの範囲を指定すると、`Solve[]` を利用して曲線を描画する。この方が処理は重いですが、結果はきれいになる (そうである)。

6.2 螺旋

6.2.1 Archimedes の螺旋

極形式で

$$r = a\theta$$

という方程式で与えられる。

蚊取り線香曲線と言った人も。ホースやロープを巻いたりして出来る。

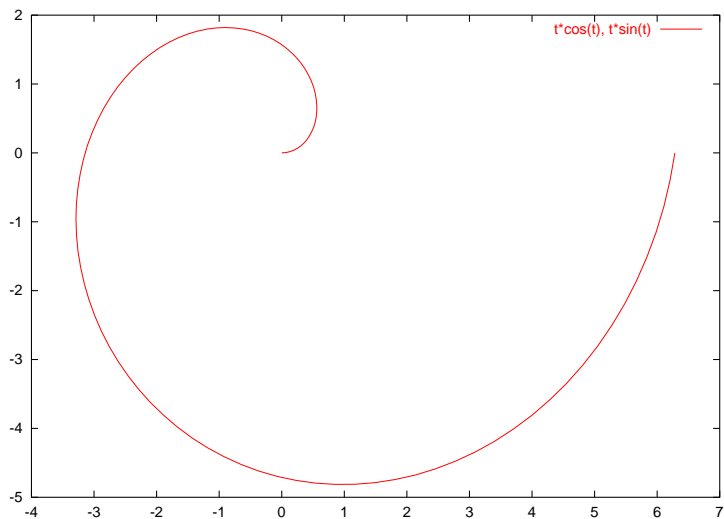


図 5: `set parametric; plot [0:2*pi] t*cos(t),t*sin(t)`

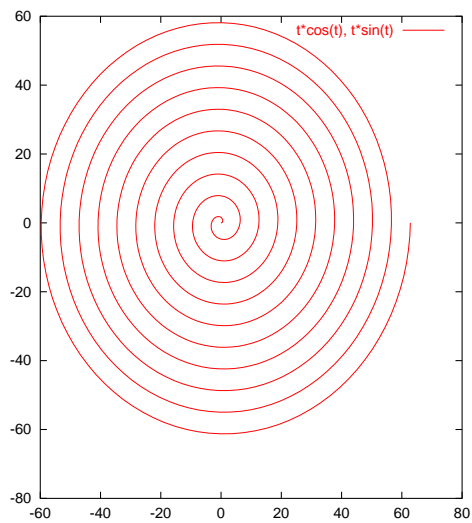
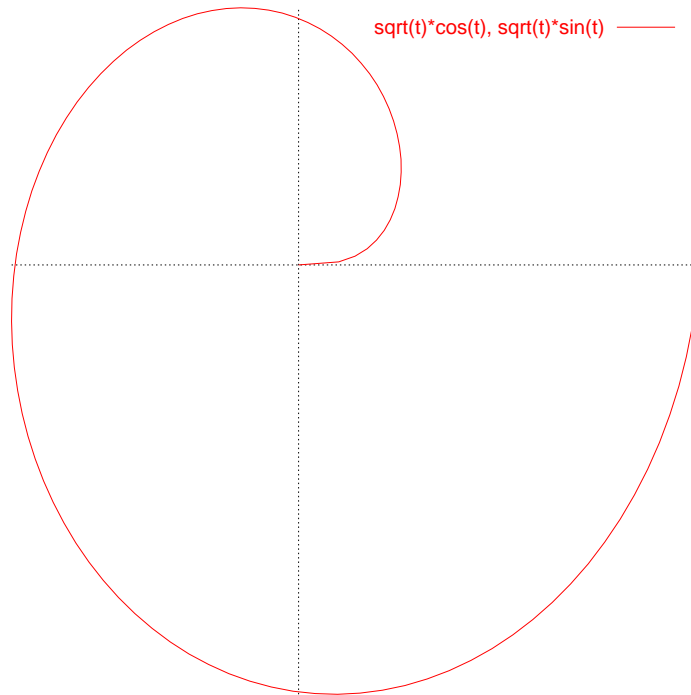


図 6: `set parametric; plot [0:20*pi] t*cos(t),t*sin(t)`

6.2.2 放物螺旋

$$r = a\sqrt{\theta}$$



6.2.3 ヤコブ・ベルヌーイの螺旋、対数螺旋、等角螺旋

$$r = ae^{b\theta}$$

オーム貝、アンモナイトのような巻き貝の形。

曲線上の点の座標は

$$\varphi(\theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{b\theta} \cos \theta \\ ae^{b\theta} \sin \theta \end{pmatrix}$$

であるから、接線ベクトルは

$$\varphi'(\theta) = \begin{pmatrix} ae^{b\theta}(b \cos \theta - \sin \theta) \\ ae^{b\theta}(b \sin \theta + \cos \theta) \end{pmatrix}.$$

原点から接点に向う線分と、接線のなす角を α とすると、

$$\cos \alpha = \frac{(b \cos \theta - \sin \theta) \cos \theta + (b \sin \theta + \cos \theta) \sin \theta}{\sqrt{(b \cos \theta - \sin \theta)^2 + (b \sin \theta + \cos \theta)^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}}.$$

これが θ によらない定数であることが、等角螺旋という名前の由来である。

力学系

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

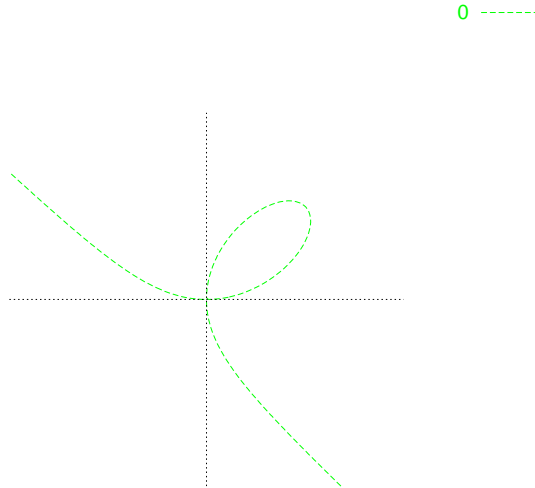
の解曲線 (相平面における軌跡) も対数螺旋になる。

Java が使えるブラウザで、<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/java/prog/ODE1.html> にアクセスしてみよう。

6.3 Descartes の正葉線

Descartes の正葉線 (デカルトの葉形, folium of Descartes, 1638 年)

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$



$y = tx$ とおくと、有理パラメーター表示

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

を得る。

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を代入すると、極形式の表示

$$r = \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}$$

を得る。

gnuplot τ

```
a=1
f(x,y)=x**3+y**3-3*a*x*y
set xrange [-3*a:3*a]
set yrange [-3*a:3*a]
set view 0,0
set isosample 100,100
set size square
set cont base
set cntrparam level incre 0,0.1,0
unset surface
set nokey
#set border 0
#set noxtics
#set noytics
set xzeroaxis lt 0
set yzeroaxis lt 0
splot f(x,y)
```

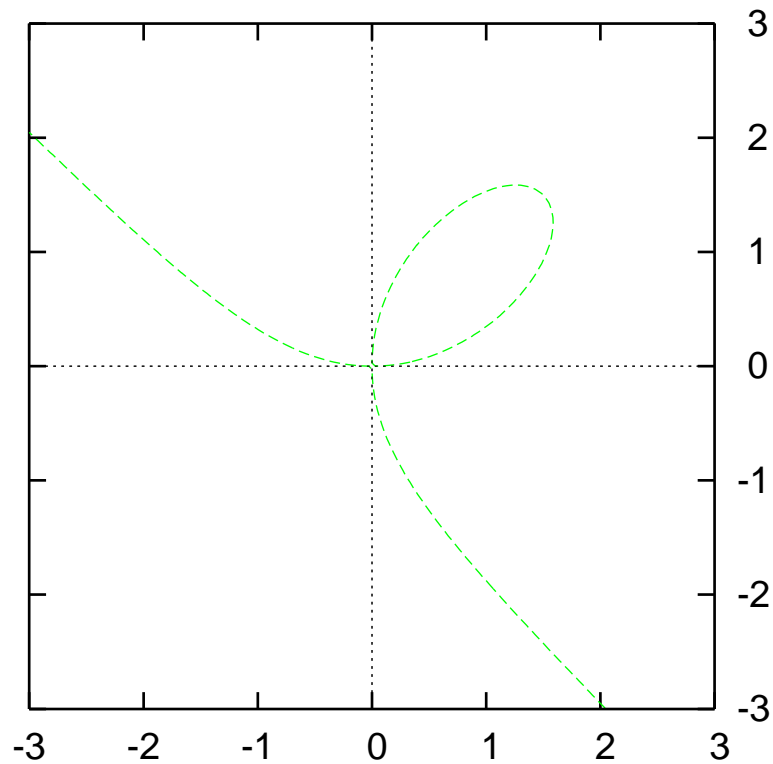


图 7: gnuplot

Mathematica で

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]  
g = ImplicitPlot[x^3 + y^3 - 3 x y == 0, {x, -2.5, 2}]
```

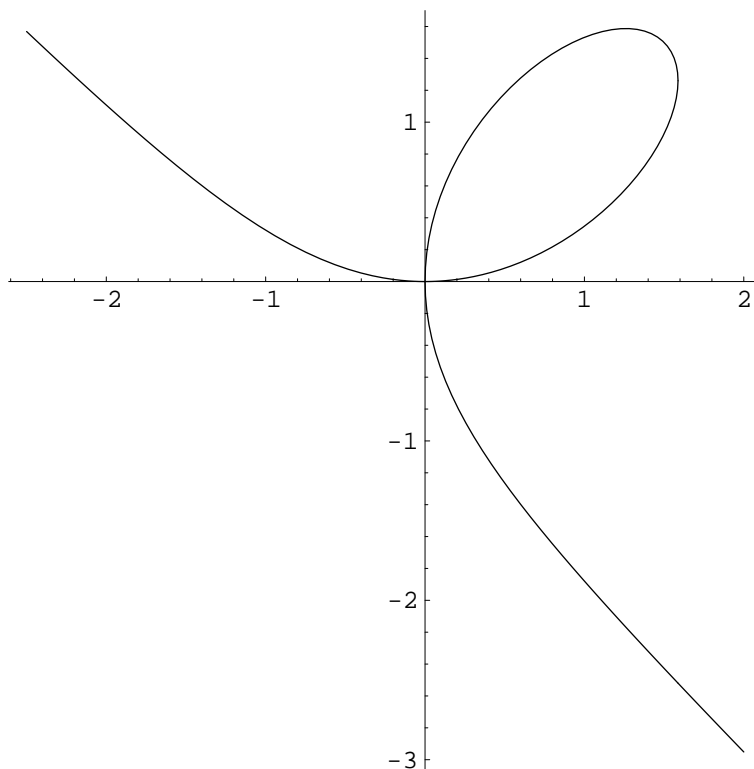


図 8: Mathematica

6.4 サイクロイド

例 6.1 (サイクロイド (cycloid) の弧長) a を正定数とすると、曲線 $\varphi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))^T$ ($t \in [0, 2\pi]$) の長さを求めよ。

(解) $\varphi'(t) = (a(1 - \cos t), a \sin t)$ であるから、

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

ゆえに弧長は

$$\int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8a. \blacksquare$$

問 サイクロイド $\Gamma : \mathbf{r} = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))^T$ ($t \in [0, 2\pi]$) と y 軸で囲まれる範囲の面積を求めよ³。(解答: $\int_{\Gamma} y dx = 3\pi a^2$)

³ガリレオはサイクロイドに興味を持って、この面積も求めようと努力し(紙を切って重さを測るとか...)、 $3\pi a^2$ に近いが、厳密に等しくはない、と書いているそうです(遠山[?]下 pp.194-196 にもう少し詳しく書いてあります)。

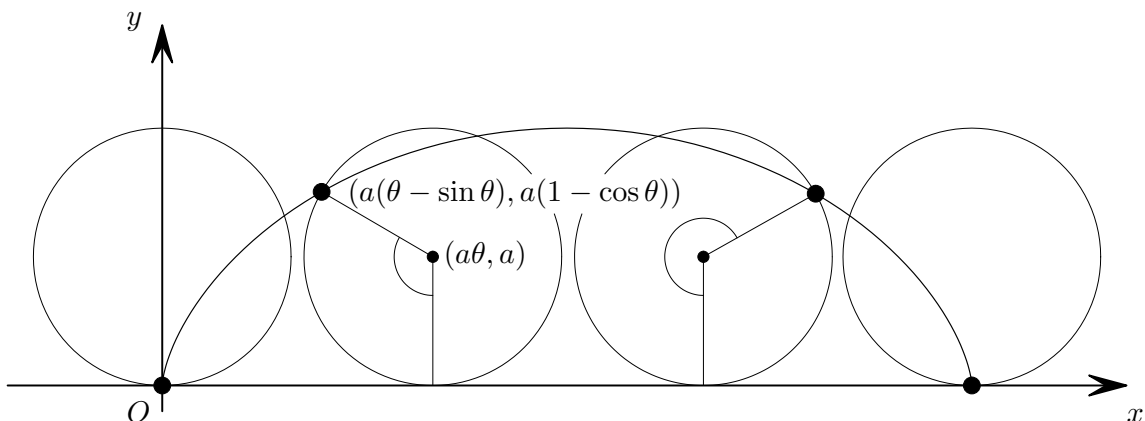


図 9: サイクロイド $(x, y) = (a(\theta - \sin \theta), a(1 - \cos \theta))$ ($\theta \in [0, 2\pi]$)

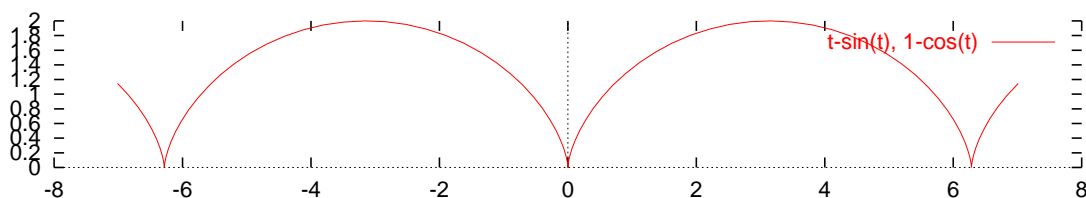


図 10: サイクロイド $(x, y) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ (gnuplot による)

```
set parametric;set size ratio -1;plot [-8:8] t-sin(t),1-cos(t)
```

6.5 Cardioid

Cardioid

$$r = 1 + \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で囲まれた領域 Ω の面積は

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi. \blacksquare$$

6.6 トロコイド

$$x = a\theta - b \sin \theta, \quad y = a - b \cos \theta$$

($a = b$ ならばサイクロイドであるが) $a < b$ のときエピ・トロコイド、 $a > b$ のときハイポ・トロコイド。

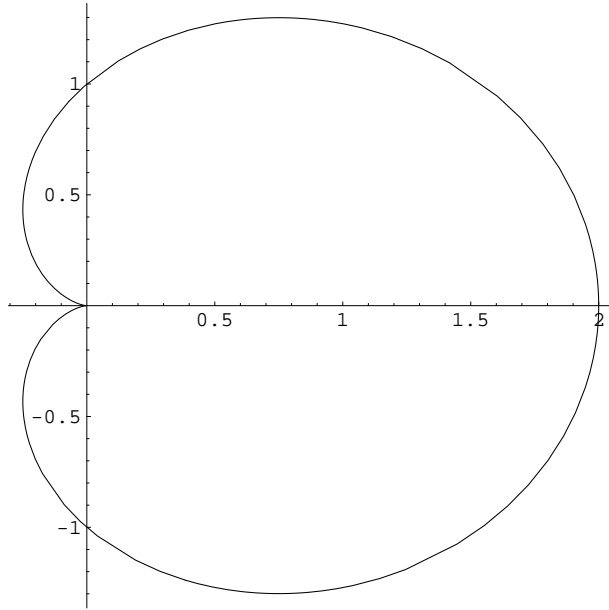


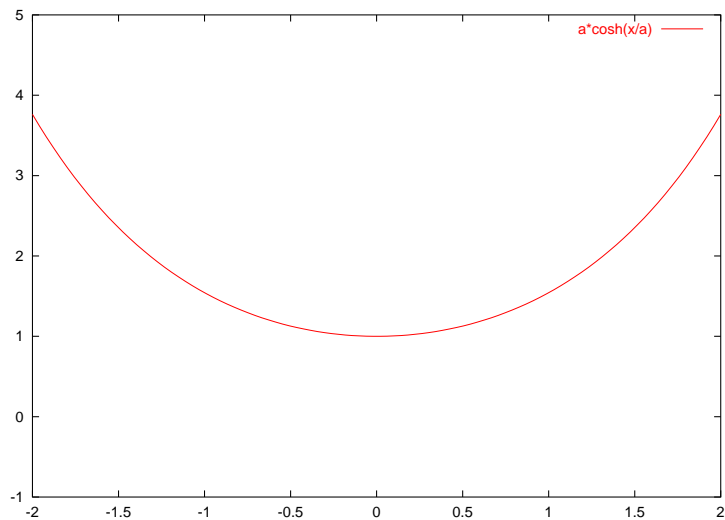
図 11: Cardioid `ParametricPlot[{(1+Cos[t])Cos[t],(1+Cos[t])Sin[t]}, {t,0,2Pi}]`

6.7 懸垂線

懸垂線 (懸垂曲線, catenary⁴)

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}.$$

方程式を得たのは、ヨハン・ベルヌーイ、ライプニッツで、1691 年。



6.8 レムニスケート (lemniscate)

レムニスケート (lemniscate, 連珠形, 花輪を飾るリボンの輪)

⁴ホイヘンスにより、ラテン語の *catena* (チェーンの意味) に由来して命名されたとか。

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad (\theta \in [-\pi/2, \pi/2])$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

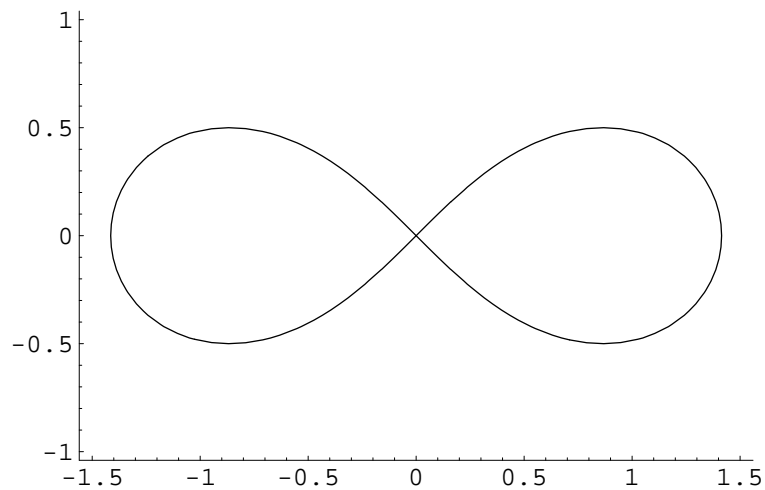
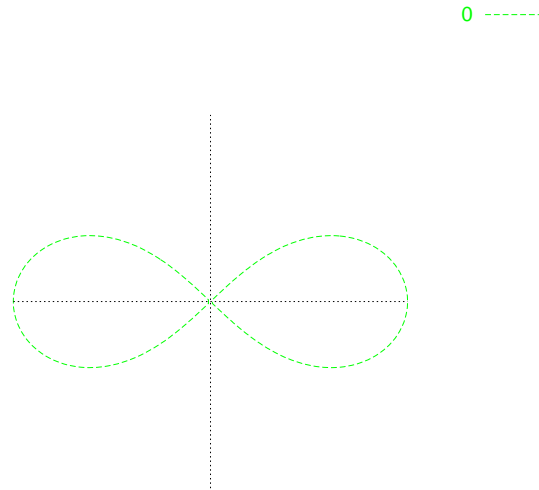


図 12: `ImplicitPlot[(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) == 0, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1, 1}]`

$a = \sqrt{2}$ の場合、2点 $(\pm 1, 0)$ からの距離の積が 1 となる点の軌跡である。

原点からの弧長は

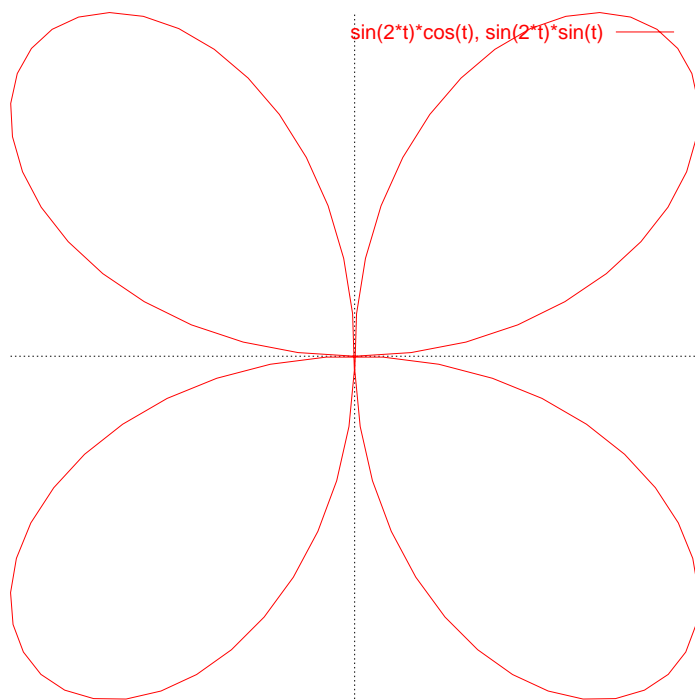
$$u = \int_0^\theta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \sqrt{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2 \cos 2\theta}} = \sqrt{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad (x = \tan \theta).$$

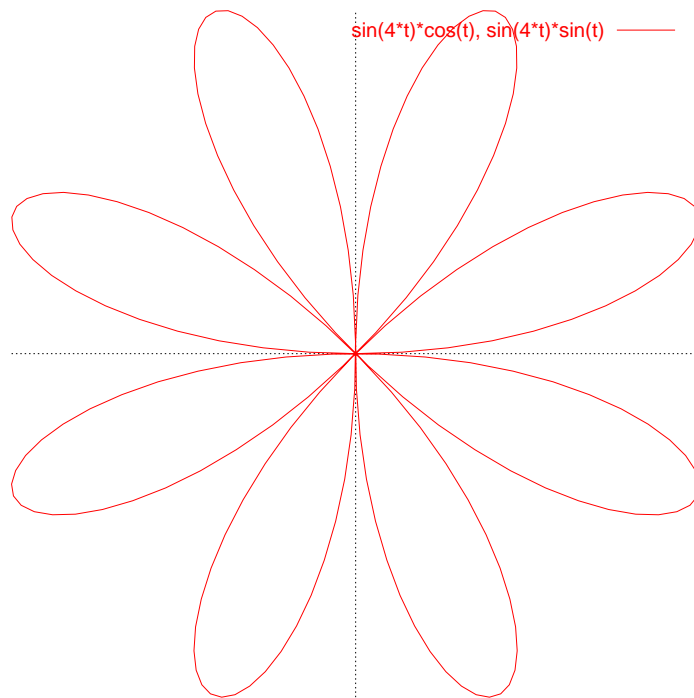
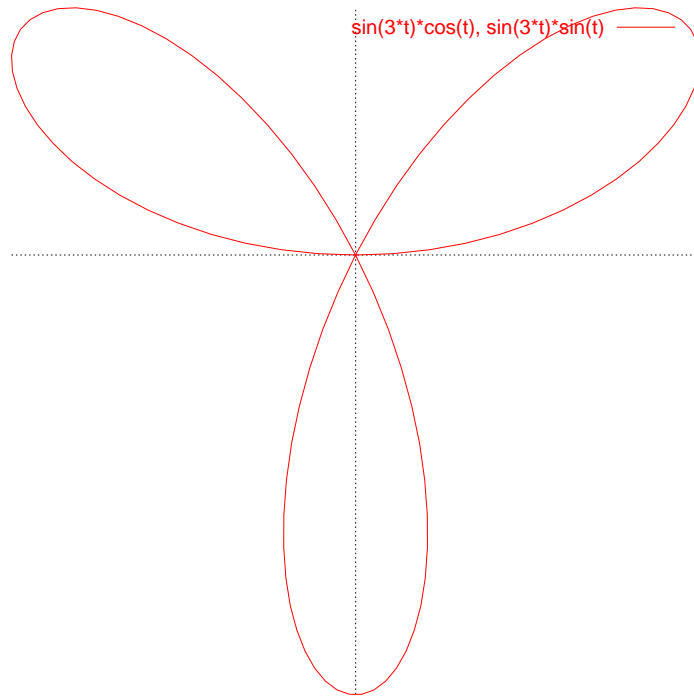
Gauss は逆関数 $x = s(u)$ を考察して、その加法定理を発見した (Gauss による楕円関数の発見)。彼はレムニスケイトの弧を 5 等分することが定規とコンパスで作図できることを見出した。

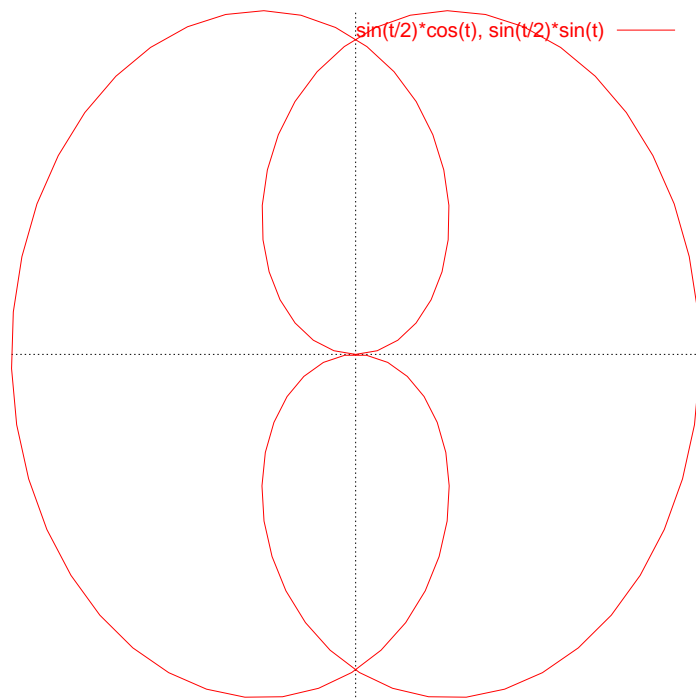
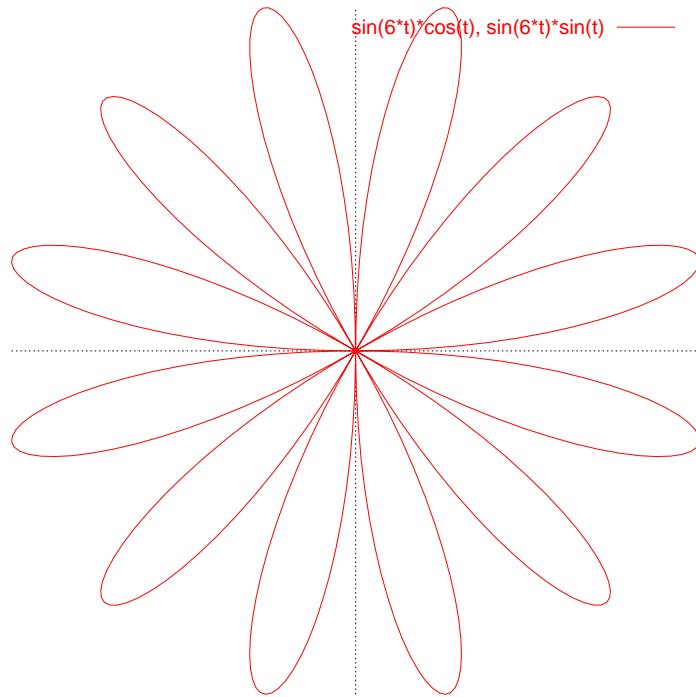
杉浦 [?], 高木 [?] を見よ。

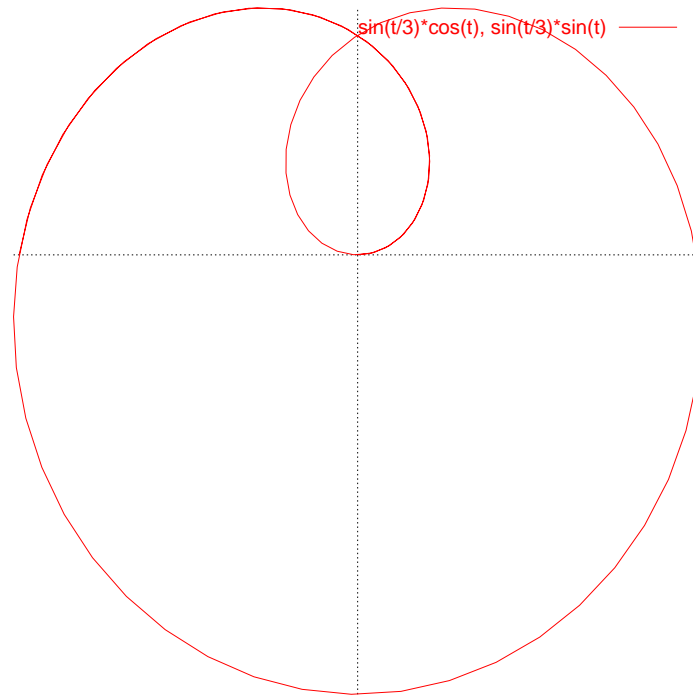
6.9 正葉線

$$r = a \cos n\theta$$







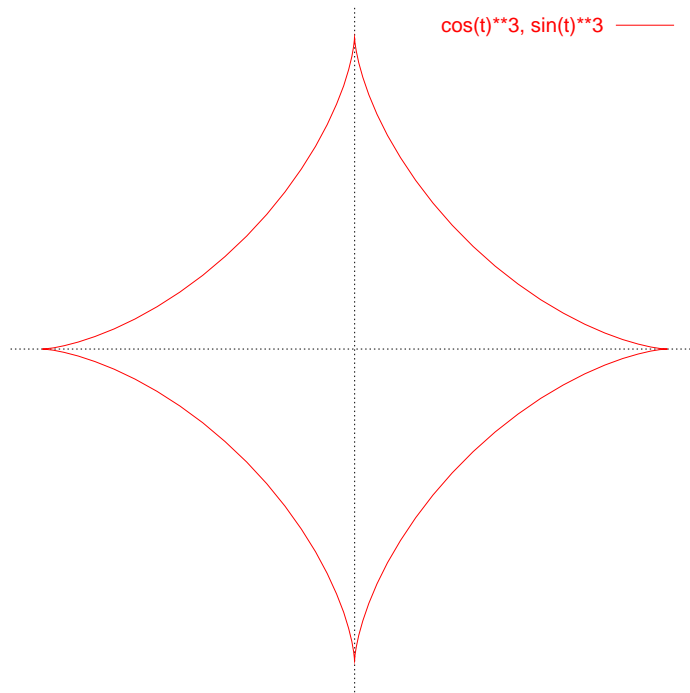


6.10 リサージュ曲線

6.11 アステロイド

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \sin^3 \theta \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$



A Cassini の楕形

xy 平面上で、方程式

$$() \quad [(x-1)^2 + y^2] [(x+1)^2 + y^2] = a^4 \quad (a \text{ は正の定数})$$

で定められる曲線を C とするとき、以下の問に答えよ。

- (1) 式 () を y^2 について解いて、 $y^2 = f(x)$ の形に表わせ。
- (2) $0 < a < \sqrt{2}$ であるとき、関数 $f(x)$ の増減を調べよ。
- (3) $1 < a < \sqrt{2}$ であるときの曲線 C の概形を描け。

(二定点からの距離の積が一定である曲線で、Cassini の楕形と呼ばれているもの。)

- (1) $y^2 = Y$ とおくと、() は

$$Y^2 + [(x-1)^2 + (x+1)^2] Y + (x+1)^2(x-1)^2 = a^4$$

となる。整理して、

$$Y^2 + 2(x^2 + 1)Y + (x^2 - 1)^2 - a^4 = 0.$$

2 次方程式の解の公式から

$$Y = -(x^2 + 1) \pm \sqrt{(x^2 + 1)^2 - [(x^2 - 1)^2 - a^4]} = -(x^2 + 1) \pm \sqrt{4x^2 + a^4}.$$

$Y = y^2 \geq 0$ でなければならないので、複号のうち $-$ は捨てて

$$y^2 = -(x^2 + 1) + \sqrt{4x^2 + a^4}.$$

(2) $f(x) = -(x^2 + 1) + \sqrt{4x^2 + a^4}$ とおくと、

$$f'(x) = -2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{8x}{\sqrt{4x^2 + a^4}} = \frac{2x(2 - \sqrt{4x^2 + a^4})}{\sqrt{4x^2 + a^4}}.$$

ゆえに $f'(x) = 0$ となるのは、 $x = 0$ または $\sqrt{4x^2 + a^4} = 2$ のときである。

$$\sqrt{4x^2 + a^4} = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + a^4 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4 - a^4}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{4 - a^4}}{2}.$$

仮定 $a < \sqrt{2}$ より $4 - a^4 > 0$ であるので、 $\pm\sqrt{4 - a^4}/2$ は相異なる実数であることに注意する。これから関数 $f(x)$ の増減表は

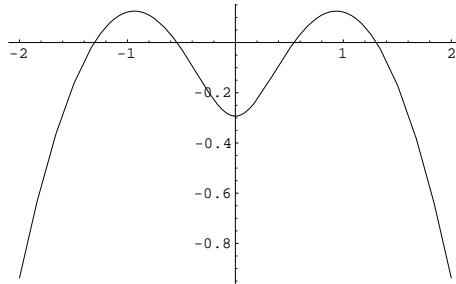
x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{4 - a^4}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{4 - a^4}}{2}$		∞
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$		$2 + a^4/4$		$a^2 - 1$		$2 + a^4/4$		$-\infty$

$y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点を調べる。

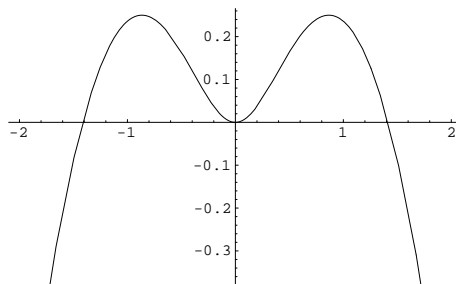
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 1 = \sqrt{4x^2 + a^4} \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + a^4 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + (1 - a^4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \pm \sqrt{1 - (1 - a^4)} = 1 \pm \sqrt{a^4} = 1 \pm a^2. \end{aligned}$$

これから

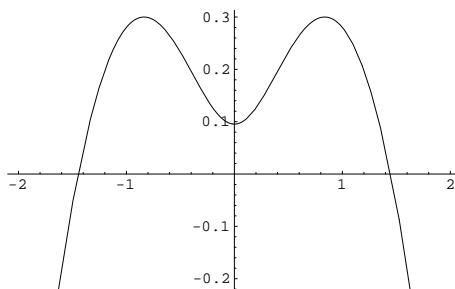
(i) $0 < a < 1$ のとき、 $f(x) = 0$ となるのは $x = \pm\sqrt{1 + a^2}$, $\pm\sqrt{1 - a^2}$. そして $f(x) \geq 0$ となるのは、 $-\sqrt{1 + a^2} \leq x \leq -\sqrt{1 - a^2}$ または $\sqrt{1 - a^2} \leq x \leq \sqrt{1 + a^2}$.



(ii) $a = 1$ のとき、 $f(x) = 0$ となるのは、 $x = 0, \pm\sqrt{1 + a^2}$. そして $f(x) \geq 0$ となるのは、 $-\sqrt{1 + a^2} \leq x \leq \sqrt{1 + a^2}$.



- (iii) $1 < a < \sqrt{2}$ のとき、 $f(x) = 0$ となるのは $x = \pm\sqrt{1+a^2}$. そして $f(x) \geq 0$ となるのは、 $-\sqrt{1+a^2} \leq x \leq \sqrt{1+a^2}$. (参考: $a = 1.2$ の場合のグラフ)



- (3) $-\sqrt{1+a^2} \leq x \leq \sqrt{1+a^2}$, $-\sqrt{2+a^4/4} \leq y \leq \sqrt{2+a^4/4}$ の範囲に存在する。y 軸との交点は $(0, \pm\sqrt{a^2-1})$.

