微分方程式2 過去問帳

桂田 祐史

mk AT math.meiji.ac.jp

http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/pde/

2013年9月

目 次

1　はじめに

最低限どういうことをマスターして欲しいか提示するために、また演習問題がわりとするために、いわゆる過去問を公開する。

試験勉強を始めようという人に二言三言。くれぐれも過去問を入手したことで一安心などと勘違いしないように。過去問の解答を覚えれば何とかなるなどと考えないこと。

(期末試験が終わった後に、略解を公開することが多く、それを含めたが、どの程度詳しく書いてあるかは年度による。その年度に配ったプリントを見よ、みたいなことも書いてあって、そういうところは理解不能かもしれない。)

2　2012 年度期末試験

2.1　本試験問題

(担当 桂田)
2013 年 1 月 25 日 (金) 1,2 限実施
ノート等持込み禁止。解答用紙 (2 枚両面解答可) のみ提出。
以下の 6 問に解答せよ (5A, 5B はいずれか一方を選択せよ)。

1.　次の各微分方程式について，(i) 方程式を書け (空間の次元は 3 とする), (ii) 対応する現象 (一通りとは限らないので，自分で選んで良い) とその場合に方程式に現れる文字 (未知関数を含む) が何を意味しているか述べよ。
(1) 波動方程式　(2) 熱方程式　(3) Poisson 方程式

2.　$n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ は連続，とする。常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)), \\ x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

の解 $x = G(t)$ に対して

$$u(t) := \int_0^t G(t-s) f(s)\, ds$$

とおくとき，以下の問に答えよ。

(1) $1 \leq k \leq n-1$ なる自然数 k に対して，次式が成り立つことを示せ。

$$u^{(k)}(t) = \int_0^t G^{(k)}(t-s) f(s)\, ds.$$

(2) $u^{(n)}(t)$ を G, f を用いて表せ。

(3) $u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}u'(t) + a_n u(t)$ をなるべく簡単にせよ。

3. (1) 1 次元波動方程式の初期値問題に関する d'Alembert の波動公式を説明せよ (解の公式だけでなく定理の形で述べること，証明は不要)。(2) 初期値境界値問題

$$\text{(WE)} \qquad \frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t)\in(0,\infty)\times(0,\infty)),$$

$$\text{(NBC)} \qquad u_x(0,t) = 0 \quad (t\in(0,\infty)),$$

$$\text{(IC)} \qquad u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (x\in[0,\infty))$$

の解を求めよ。ただし c は正定数，$\phi\colon [0,\infty)\to\mathbf{R}$ は C^2 級，$\psi\colon [0,\infty)\to\mathbf{R}$ は C^1 級で，$\phi'(0)=\psi'(0)=0$ を満たすとする。

4. k を実定数，$f\colon [0,1]\to\mathbf{R}$ を $f(0)=0$ を満たす連続関数とするとき，初期値境界値問題

$$\text{(HE)} \qquad u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + ku(x,t) \quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)),$$

$$\text{(BC)} \qquad u(0,t) = u_x(1,t) = 0 \quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)),$$

$$\text{(IC)} \qquad u(x,0) = f(x) \quad (x\in[0,1])$$

の解を Fourier の方法で求めよ (解であることの証明は省略して良い)。

次の 5A, 5B はどちらか一方を選択して解答せよ (配点は同じ)。

5A. 問題 4 の (BC) の代わりに

$$\text{(BC}'\text{)} \qquad u(0,t) = u_x(1,t) = 1 \quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)),$$

とした問題の解 u を求め，$t\to\infty$ のときの漸近挙動を求めよ。

5B. 問題 4 の解の一意性を，補助関数 $E(t) := \displaystyle\int_0^1 u(x,t)^2\,dx$ を用いることによって証明せよ。自分で適当に仮定を加えること。

6. $\Omega = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ とし，u は Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$-\triangle u(x,y) = x+2y \quad ((x,y)\in\Omega), \quad u(x,y) = 3xy \quad ((x,y)\in\partial\Omega)$$

の解であるとする。

(1) $\triangle v(x,y) = x+2y$ $((x,y)\in\Omega)$ を満たす v を一つ求めよ (一意性はないが何でも良い)。(2) $w(x,y) := u(x,y)-v(x,y)$ とおくとき，w はどういう境界値問題の解となるか。(3) u を求めよ (結果は極座標で書いても構わない)。

2.2 本試験問題解説

試験準備の仕方。授業で学んだ (はずの) ことを理解すること。一度は自分の頭で考えること。最初から「出そうな問題の答を読んで覚えようとする」だけではなかなか身につかないと思う。一番良いのは授業内容を復習してから，自力で問題に取り組むことだけど (解くのに必

要なことは授業で入念に準備してある)，追試準備では，(他の試験の準備もあるし) もうそういう時間が残っていないだろうから (そういう時間を持ってもらうために 1ヶ月近い時間猶予を持たせてレポート課題を出しているのだけど，他人のレポートのコピーに走る人が少なくないんだな…これはこちらのボヤキです)，最初は問題の解答を読むにしても，少なくとも一題は自力で類題に取り組むこと。

略解 (結果のみのものも多いので，これを書いても答案にならない。)

1. 以下 $\triangle u$ は $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ を表すとする。

(1) $\dfrac{1}{c^2}u_{tt}(x,y,z,t)=\triangle u(x,y,z,t)$. ある種の物体の振動現象を記述する。$t$ は時刻，(x,y,z) は位置，$u(x,y,z,t)$ は (つりあいの状態で) (x,y,z) にあったものの，時刻 t での変位を表す。c は正定数で波の速さを表す。

(2) $u_t(x,y,z,t)=\triangle u(x,y,z,t)$. 熱伝導現象を記述する。$t$ は時刻，(x,y,z) は位置，$u(x,y,z,t)$ は時刻 t, (x,y,z) おける媒質の温度を表す。

(3) $-\triangle u(x,y,z)=f(x,y,z)$. (例えば) 静電場を記述する。$(x,y,z)$ は位置，$f(x,y,z)$ は電荷密度，$u(x,y,z)$ は電荷の作る電場のポテンシャルを表す。

2. Duhamel の原理を気にしている人が多かったので，常微分方程式バージョン (これは練習問題のプリントに入れておいた) を出題してみた。波動方程式に対する Duhamel の原理の証明を簡略化したものになる。誘導してあるので，$\displaystyle\int_0^t g(t,s)\,ds$ のような式を t で微分することだけ出来れば解けるはず。こういう「公式」は覚えておかなくても, 原始関数のようなものを持ち出して計算すればその場で導出できる (そういうところまで授業でやってある)。

(1) まず $G(0)=G'(0)=G''(0)=\cdots=G^{(n-2)}(0)=0$ に注意しておく。一般に C^1 級の関数 $g(x,y)$ があるとき，$\displaystyle\frac{d}{dt}\int_0^t g(t,s)\,ds=g(t,t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}(g(t,s))\,ds$ となるので,

$$\begin{aligned}
u'(t)&=G(t-t)f(t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}G(t-s)f(s)\,ds=\int_0^t G'(t-s)f(s)\,ds,\\
u''(t)&=G'(t-t)f(t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}G'(t-s)f(s)\,ds=\int_0^t G''(t-s)f(s)\,ds,\\
&\ \vdots\\
u^{(n-1)}(t)&=G^{(n-2)}(t-t)f(t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}G^{(n-2)}(t-s)f(s)\,ds=\int_0^t G^{(n-1)}(t-s)f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

(2) $G^{(n-1)}(0)=1$ であるから,

$$u^{(n)}(t)=G^{(n-1)}(t-t)f(t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}G^{(n-1)}(t-s)f(s)\,ds=f(t)+\int_0^t G^{(n)}(t-s)f(s)\,ds.$$

(3) $G^{(n)}(t)+a_0G^{(n-1)}(t)+\cdots+a_nG(t)=0$ が成り立つことに注意すると，

$$
\begin{aligned}
&u^{(n)}(t)+a_0u^{(n-1)}(t)+\cdots+a_nu(t)\\
&=f(t)+\int_0^t G^{(n)}(t-s)f(s)\,ds+a_0\int_0^t G^{(n-1)}(t-s)f(s)\,ds+\cdots+a_n\int_0^t G(t-s)f(s)\,ds\\
&=f(t)+\int_0^t \left[G^{(n)}(t-s)+a_0G^{(n-1)}(t-s)+\cdots+a_nG(t-s)\right]f(s)\,ds\\
&=f(t)+\int_0^t 0\cdot f(s)\,ds\\
&=f(t).
\end{aligned}
$$

(つまり，u は非同次微分方程式の解ということである。) ■

3. (2) は練習問題 10 (の一部) である。レポート課題 1 を解くために，参考情報として与えておいた (略解を 11/8 に配布した)。だから本来この解答を見たことがあるはずだ。

(1) 次の定理が成り立つ。「$\phi\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ が C^2 級，$\psi\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ が C^1 級とするとき，波動方程式の初期値問題

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)=u_xx(x,t)\quad((x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}) \tag{1}$$

$$u(x,0)=\phi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)\quad(x\in\mathbf{R}) \tag{2}$$

の C^2 級の解は一意的に存在し，それは

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\phi(x+ct)+\phi(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy \tag{$\sharp$}$$

で与えられる。」($\sharp$) を d'Alembert の波動公式と呼ぶ。

(2) ϕ, ψ の偶関数拡張を Φ, Ψ とする:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\phi(x) & (x\geq 0)\\ \phi(-x) & (x<0),\end{cases}\qquad \Psi(x):=\begin{cases}\psi(x) & (x\geq 0)\\ \psi(-x) & (x<0).\end{cases}$$

それぞれ $\mathbf{R}$ で C^2 級，C^1 級となる。

証明

ϕ, ψ が $[0,\infty)$ で連続であるので，Φ, Ψ は $\mathbf{R}$ で連続である。ϕ, ψ はそれぞれ C^2 級，C^1 級であるので

$$\Phi'(x) = \begin{cases} \phi'(x) & (x>0) \\ -\phi'(-x) & (x<0), \end{cases} \quad \Psi'(x) = \begin{cases} \psi'(x) & (x>0) \\ -\psi'(-x) & (x<0), \end{cases} \quad \Phi''(x) = \begin{cases} \phi''(x) & (x>0) \\ \phi''(-x) & (x<0) \end{cases}$$

となるので，$\mathbf{R}\setminus\{0\}$ で Φ は C^2 級，Ψ は C^1 級である。ϕ', ψ' が $[0,\infty)$ で連続で，$\phi'(0)=\psi'(0)=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\Phi'(x)=0$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\Psi'(x)=0$. ゆえに Φ, Ψ は 0 で微分可能で $\Phi'(0)=0$, $\Psi'(0)=0$. それぞれ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\Phi'(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\Psi'(x)$ に等しいので，Φ', Ψ' は 0 で連続である。ϕ'' が $[0,\infty)$ で連続であるから，$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\Phi''(x)=\phi''(0)$. ゆえに Φ' は 0 で微分可能で，$\Phi''(0)=\phi''(0)$. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\Phi''(x)$ に等しいので，Φ'' は 0 で連続である。 ■

Φ, Ψ を初期値とする波動方程式の初期値問題の C^2 級の解が一意的に存在する。それを U とすると，

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi(x+ct)+\Phi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\Psi(y)\,dy.$$

$$U_x(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi'(x+ct)+\Phi'(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(\Phi(x+ct)-\Phi(x-ct)\right)$$

であるから，Φ, Ψ が偶関数であることを用いて

$$U_x(0,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi(ct)+\Phi(-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct}\Psi(y)dy = 0+0=0.$$

ゆえに

$$u(x,t) := U(x,t) \quad (x\in[0,\infty),\, t\in[0,\infty))$$

とおくと，u は C^2 級で，(WE), (NBC), (IC) を満たす。$x\in[0,\infty)$, $t\in[0,\infty)$ のとき $x+ct\geq 0$ である。

(a) $x-ct\geq 0$ のときは，$\Phi(x-ct)=\phi(x-ct)$, $[x-ct, x+ct]$ で $\Psi=\psi$ であるから，

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct)+\phi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy.$$

(b) $x-ct<0$ のときは，$\Phi(x-ct)=\phi(ct-x)$,

$$\begin{aligned}\int_{x-ct}^{x+ct}\Psi(y)\,dy &= \int_{x-ct}^{0}\Psi(y)\,dy + \int_{0}^{x+ct}\Psi(y)\,dy = \int_{ct-x}^{0}\Psi(-y')\,(-1)dy' + \int_{0}^{x+ct}\psi(y)\,dy \\ &= \int_{0}^{ct-x}\psi(y')\,dy' + \int_{0}^{x+ct}\psi(y)\,dy.\end{aligned}$$

ゆえに

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct)+\phi(ct-x)\right) + \frac{1}{2c}\left(\int_{0}^{ct+x}\psi(y)\,dy\int_{0}^{ct-x}\psi(y)\,dy\right).$$

4. (結果を掲げるだけにしておきます。余裕があれば書くかもしれませんが…)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \sin\left[(n-1/2)\pi x\right],$$

$$c_n = 2\int_0^1 f(x)\sin\left[(n-1/2)\pi x\right] dx. \blacksquare$$

5A, **5B** については，$k=0$ で出題すべきだったと反省している。それでは面白くないと思ったのだけど，無用に複雑になったきらいがある。

5A. まず定常解を求めよう。t に依存しない関数 $v=v(x)$ が $u_t = u_{xx}+ku$, $u(0,t) = u_x(1,t) = 1$ の解であれば，

$$0 = v''(x) + kv(x), \quad v(0) = v'(0) = 1.$$

(a) $k>0$ であれば，$\mu := \sqrt{k}$ とおいて，$\pm i\mu$ が特性根となる。微分方程式の一般解は $v(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$ (A, B は任意定数).

$$v(x) = \cos\mu x + \frac{1+\mu\sin\mu}{\mu\cos\mu}\sin\mu x$$

(b) $k<0$ であれば，微分方程式の一般解は $v(x) = Ae^{\sqrt{-k}x} + Be^{-\sqrt{-k}x}$ (A, B は任意定数). $\mu := \sqrt{-k}$ とおくと，

$$v(x) = \frac{1+\mu e^{\mu}}{\mu\cosh\mu}\sinh\mu x + e^{-\mu x}.$$

(c) $k=0$ の場合は，$v(x) = 1+x$.

(以上，計算を間違えても、定常解が存在するこという結論が得られていれば，後にほとんど影響がない。$k=0$ としておけば良かったと後悔する次第。)

さて，$w(x,t) := u(x,t) - v(x)$ とおくと，w は問題 4 の初期値境界値問題 (ただし初期値は $f-v$) の解である。ゆえに

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t}\sin\left[(n-1/2)\pi x\right], \quad c_n = 2\int_0^1 (f(x)-v(x))\sin\left[(n-1/2)\pi x\right] dx.$$

c_n がすべて 0 ならば $w\equiv 0$ なので，$u(x,t)\equiv v(x)$. そうでないとき，$c_1,\cdots,c_n,\cdots$ のうちで最初に 0 でない項を c_m とする:

$$c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0, \quad c_m \neq 0.$$

(i) $k < (m-1/2)^2\pi^2$ であれば，$\lim_{t\to\infty} w(x,t) = 0$. $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x)$.

(ii) $k = (m-1/2)^2\pi^2$ であれば，$\lim_{t\to\infty} w(x,t) = c_m\sin\left[(m-1/2)\pi x\right]$. $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x) + c_m\sin\left[(m-1/2)\pi x\right]$.

(iii) $k < (m-1/2)^2\pi^x$ であれば，$\sin\left[(m-1/2)\pi x\right] \neq 0$ なる x に対して，$|w(x,t)|\to\infty$ $(t\to\infty)$. $|u(x,t)|\to\infty$ $(t\to\infty)$. $\blacksquare$

5B.　これも $k=0$ とすべきだった。$v(x,t) := e^{-kt}u(t)$ という変数変換で，$k=0$ の場合に帰着すれば良いのだけど，それを要求するのはちょっときつめだったか。以下 $k=0$ として答を書いておく。

($E(t)$ について，似たような問題をいくつか授業中で解いていて，演習問題にもしておいたので,「積分記号下の微分をして，微分方程式を代入して，部分積分または積分して，境界条件を代入する」というのが出来れば，E が時間について，単調減少することが分かる。もう一つ一意性の証明については,「二つあったとすると，その差を○○とおいて…」というのがそれこそ 10 回近く出て来たわけで，それに乗ってみる。以上二つのことをする。)

解　u_1, u_2 が解であると仮定するとき，$u := u_1 - u_2$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + ku(x,t) \quad ((x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)),\\
&u(0,t) = u_x(0,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)),\\
&u(x,0) = 0 \quad (x \in (0,1))
\end{aligned}$$

が成り立つ。u は $[0,1]\times(0,\infty)$ で x につき 2 回微分可能，t につき 1 回微分可能で，導関数 u_{xx} と u_t は連続と仮定する。任意の $t>0$ に対して

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_0^1 2u(x,t)u_t(x,t)\,dx = \int_0^1 u(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx = [u(x,t)u_{x,t}]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u_x(x,t)^2 dx\\
&= -\int_0^1 u_x(x,t)^2 dx \le 0
\end{aligned}$$

であるから，E は減少関数であり，$E(t) \le E(0)$ $(t>0)$. $0 \le u(x,t)^2$, $u(x,0)=0$ に注意すると

$$0 \le \int_0^1 u(x,t)^2 dx = E(t) \le E(0) = \int_0^1 u(x,0)^2 dx = \int_0^1 0^2\,dx = 0$$

であるから，$E(t) \equiv 0$. ゆえに $u(x,t) \equiv 0$. ゆえに $u_1 = u_2$. ■

6.　(途中経過略)

(1) $v(x,y) = -\left(\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{y^3}{3}\right)$.

(2)

$$\triangle w(x,y) = 0 \quad ((x,y)\in\Omega), \quad w(x,y) = 3xy + \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{3}.$$

(3)

$$\Psi(\theta) := w(\cos\theta, \sin\theta) = 3\cos\theta\sin\theta + \frac{\cos^3\theta}{6} + \frac{\sin^3\theta}{3}$$

に対して，

$$\sin^3\theta = \frac{1}{4}\left(3\sin\theta - \sin 3\theta\right), \quad \cos^3\theta = \frac{1}{4}\left(3\cos\theta + \cos 3\theta\right)$$

を代入すると,

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{8}\cos\theta + \frac{1}{4}\sin\theta + \frac{3}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{24}\cos 3\theta - \frac{1}{12}\sin 3\theta.$$

$$\begin{aligned} w(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{1}{8}r\cos\theta + \frac{1}{4}r\sin\theta + \frac{3}{2}r^2\sin 2\theta + \frac{1}{24}r^3\cos 3\theta - \frac{1}{12}r^3\sin 3\theta \\ &= \frac{1}{8}r\cos\theta + \frac{1}{4}r\sin\theta + 3r^2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{24}r^3\left(4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) \\ &- \frac{1}{12}r^3\left(3\sin\theta - 4\sin^3\theta\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \frac{x}{8} + \frac{y}{4} + 3xy + \frac{1}{24}\left(4x^3 - 3(x^2+y^2)x\right) - \frac{1}{12}\left((x^2+y^2)3y - 4y^3\right) \\ &= \frac{x}{8} + \frac{y}{4} + 3xy + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3+xy^2}{8} - \frac{x^2y+y^3}{4} + \frac{y^3}{3} \\ &= \frac{x^3}{24} + \frac{y^3}{12} - \frac{x^2y}{4} - \frac{xy^2}{8} + 3xy + \frac{x}{8} + \frac{y}{4}. \end{aligned}$$

$$u(x,y) = w(x,y) + v(x,y) = -\frac{x^3}{8} - \frac{y^3}{4} - \frac{x^2y}{4} - \frac{xy^2}{8} + 3xy + \frac{x}{8} + \frac{y}{4}.\blacksquare$$

講評

- 暗記しておいた式を書くだけでは単位を取るのは難しいと覚悟して下さい (この言葉100%受け取って下さい)。大事なことは理解しているかどうかです (極論すれば，それしかありません)。それと (当たり前のことなんだけど，記憶しているものを書こうモードになっていると失敗しやすい) 状況が似ていても実際に計算して確かめる，かな。

  一つ実例を。$e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$ から，$e^{2\sqrt{\lambda}} = 1$ とした人がいました。元ネタは，$e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$ から $e^{2\sqrt{\lambda}} = 1$ を導いたやつですが，それが理解出来てなかったか，惰性でスルーしたのでしょう。ちゃんとやっておけば $e^{2\sqrt{\lambda}} = -1$ と出来たはず。そういえば固有関数が $\zeta(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ に $B = -A$, $\sqrt{\lambda} = (n-1/2)\pi i$ を代入して，$\zeta(x) = A\left(e^{(n-1/2)\pi x} - e^{-(n-1/2)\pi i x}\right) = 2Ai\sin\left[(n-1/2)\pi i x\right]$ となるはずが，$\zeta(x) = A\left(e^{(n-1/2)\pi i x} + e^{-(n-1/2)\pi i x}\right) = 2A\cos\left[(n-1/2)\pi x\right]$ とした人がかなりの人数いました。これも見た覚えのあるものに引きずられたのかな？と推測しています。**サボらないで慎重に計算しないと分からない**，と思って下さい。

- 全般に、そこそこ勉強してあるようだけど，常微分方程式や複素数，三角関数の簡単な計算で転んでいる人も少なくない ($e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ みたいなことをする，$\sin^3\theta + \cos^3\theta = 1$ なんて人も痛)。1,2 年生の数学は卒業するまで必要だ (卒業するためだけでも) と思って下さい。

- **1.** 出来が悪い。この 3 つの方程式を知らない (書けない) のはおかしい。たとえ話をすると，地理の授業で場所を知らずに議論しているようなものです (それに黒板上に (次

元を 3 と限らなければ) それぞれ数十回書いたはず)。空間 3 次元 (だから Laplacian は $\triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ — これは書いて欲しいな) という指示を無視した解答が多いけれど，そこを甘く採点してもぱっとしないのが多い。$\triangle u_{xx}$ なんてのもあった (申し訳ないけれど、笑い話みたい)。

- **2.** 手をつけた人が少ない。$\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t g(t,s)ds$ の計算，出来て欲しかったですね。この手の公式は忘れても，その場で自分で作れて欲しいです。

- **3.** 「d'Alembert の公式」は，式だけしか覚えていないのでは数学になりません。学校数学 (高等学校までの授業で習う数学) は,「公式」暗記的だけど，それは脱却して欲しい。仮定として，ϕ, ψ が C^2, C^1 であること。結論として、「C^2 級の解が一意的に存在して，それはソノ公式で与えられること」言い換えると「ソノ公式で定義される u は C^2 級の解になっていて，それ以外に C^2 級の解はないこと」。あるいは,「…の C^2 級の解は (ここに公式を書く) である」とする (「解は…である」と書いたら，必ずすべての解をもれなく書く，という暗黙のルールを使っている)。脱線になるけれど「2 次方程式の解の公式を定理として書け」という問題を出してみたい，とつねづね思っています (多分半数近くの人が書けないんじゃないかと予想します)。

- **3.** 初期値問題とは何か分からない人もいるみたい ((1) で境界条件を入れてしまった人が少なくない)。初期値問題，初期値境界値問題，境界値問題，それぞれきちんと理解して区別するように。

- 授業を振り返ると，1 次元波動方程式の初期値問題の解の公式 (d'Alembert の波動公式) を基礎として，$(0,\infty)$ における初期値境界値問題 (境界条件は Dirichlet $u(0,t)=0$ とか Neumann $u_x(0,t)=0$) や，3 次元の初期値問題 (それから 2 次元の初期値問題) が解かれたことが分かります。そういうわけで，d'Alembert の波動公式をきちんと使えることが大事，ということになります。

- **3.** (2). 解き方は一通りではないですが，レポート課題 1 の解き方 (誘導してある) を真似するならば，(1) で書いた定理を使うために，偶関数拡張した Φ, Ψ が，それぞれ C^2 級，C^1 級であることを確認 (主張して証明) するのが重要です。少なくとも (証明はさぼっても) はっきり主張して欲しい。

- **3.** (2). Φ, Ψ を初期値とする初期値問題の解 (当然 d'Alembert の公式) を持ち出さないで，覚えておいた解の式をいきなり書くのは駄目。

- そもそも **3.** を解かない人が少なくない。レポート課題 1 を提出したはずでは… おかしい。

- **4.** で $\dfrac{\eta'(t)}{\eta(t)} - k = \dfrac{\zeta''(x)}{\zeta(x)}$ が定数になるわけだけど，それを任意定数と書く人がいて…「任意定数」というのは，微分方程式の一般解を表すときに出て来る言い回しで，それ以外には登場しない (というか僕は見たことがない)。ここで持ち出すのはおかしい。

- やはり **4.** の Step 2 で u を定義する (「$u(x,t) := \cdots$ とおくと,」) というのが分かっていない人が。授業中に 5 回以上言ったような気がするのだけど。

これは間違い

$$\therefore u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \sin\left[(n-1/2)\pi x\right] \quad (\because \text{ じゃないって！})$$

- 誤答の例「$n=k$ と $n=-k$ を代入しても…λ の値は変わらないので，$n \in \mathbf{N}$ で十分」

  k は問題の中で使っているから，ここで k という文字を使うのはまずい (別の文字にすべきだね)。それは大目に見ても、$n=k$ と $n=-k$ では λ が違うでしょ？ただしくは $n=k$ と $n=1-k$ のはずだ (何となく覚えた言葉をコピー&ペーストしているのがバレバレだ，ちゃんと場合に則して確かめよう)。固有値 λ だけじゃなくて，固有関数 ζ の方も変わらないことをチェックすべきだし。というわけで三重に間違い。

- そもそも「$n \in \mathbf{N}$ で十分」という言い方が理解できていない人もいるみたい。ドライに式で書くと

$$\left\{(-(n-1/2)^2\pi^2, \sin\left[(n-1/2)\pi x\right]); n \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{(-(n-1/2)^2\pi^2, \sin\left[(n-1/2)\pi x\right]); n \in \mathbf{N}\right\}$$

  であるから，$n \le 0$ は不要だということです。それを「$n \in \mathbf{N}$ である」なんて書く人がいるわけですが，明らかに変。

- **4.** で (φ_m, φ_n) を計算しないで (高校数学くらい，さらっとやってください)，うろ覚えの結果を書く。それじゃ間違えても仕方ない。$m, n \in \mathbf{N}$ に対して，$m \ne n$ ならば,

$$\begin{aligned}(\varphi_m, \varphi_n) &= \int_0^1 \sin\left[(m-1/2)\pi x\right] \sin\left[(n-1/2)\pi x\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\cos\left[(m-n)\pi x\right] - \cos\left[(m+n-1)\pi x\right]\right\} dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left[(m-n)\pi x\right]}{(m-n)\pi} - \frac{\sin\left[(m+n-1)\pi x\right]}{(m+n-1)\pi}\right]_0^1 = 0.\end{aligned}$$

  $m=n$ ならば

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_0^1 \sin^2\left[(n-1/2)\pi x\right] dx = \int_0^1 \frac{1-\cos\left[(2n-1)\pi x\right]}{2} dx = \frac{1}{2}.$$

  (今度から途中経過書くように問題文に指示しようと思っています。その場合，赤とか青どちらかは書いて欲しい。)

- Fourier 展開という人もいたけれど。この問題の場合，そうじゃないでしょ。

- $2\sqrt{\lambda} = (2n-1)\pi i$ と書くだけで，n が何か書かないのはマズい。0 点。レポートの添削では，そういうのは必ず注意した。

- **5A** は非同次問題で,「非同次問題は特解を探してみる」,「特解はなるべく簡単な，例えば定常解を探してみる」,「非同次問題の解 u と特解 v の差 $w := u - v$ を考える」という定跡に従うと解ける，ということです。

- こういうとき,「非同次」,「特解」,「定常解」のような言葉をマスターしておくことが重要と痛感します。

- **5B** は一意性の証明問題で,「線型方程式の一意性は、解が二つあったとして，その差を考える」,「一意性の証明に使える可能性のある方法として，(a) 最大値原理，(b) エネルギー (もどき) の保存 or 減衰」というのが良く出て来た。この問題では，エネルギーらしき $E(t)$ が与えられているわけで，試すべきことは明らかです。

- **6.** 最後の通常授業 (1/21) で，こういう問題を出すと宣言しました。大抵の人がチャレンジして，結構点を稼いでくれたのだけど…解かない人もいて，そういう人は得点的に辛かった。この辺は授業のスケジュール調整のミスかもしれなくて，ちょっと申し訳ない。

- $3\cos\theta\sin\theta$ という項を Laplace 方程式の解を作る時に，$3r\cos\theta r\sin\theta$ とした人が結構いましたが，$3\cos\theta\sin\theta = \frac{3}{2}\sin 2\theta$ が Fourier 級数展開なので，$\frac{3}{2}r^2\sin 2\theta = 3r^2\sin\theta\cos\theta$ として欲しいです。この場合は結果が同じなのですが，これはたまたまですので。

3 2011年度期末試験

3.1 本試験問題

(担当 桂田)
2012年1月30日 (火) 1限実施
ノート等持込み禁止。解答用紙 (2枚両面解答可) のみ提出。

1. 重ね合わせの原理について (言葉の定義だけでなく、例も使って) 説明せよ。

2. (1) $\phi\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\psi\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ が、それぞれ C^2 級, C^1 級であるとき、

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\left(\phi(x-ct)+\phi(x+ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy$$

とおくと、u は1次元波動方程式の初期値問題

(WE) $$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t)\in\mathbf{R}\times(0,\infty)),$$

(IC) $$u(x,0)=\phi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)\quad (x\in\mathbf{R})$$

の C^2 級の解であることを示せ。
(2) 1次元波動方程式の初期値問題について、Duhamel の原理を説明せよ。
(3) $\phi(x) = \begin{cases} (x^2-1)^4 & (|x|\le 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$, $\psi(x)\equiv 0$ とするとき、$t=0,1,2$ に対して、$u(\cdot,t)$ のグラフを描け。

3. $k \in \mathbf{R}$, $f \in C^1([0,1])$, $f(1) = 0$ とするとき、次の初期値境界値問題を考える。

(HE)	$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + ku(x,t)$	$((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty))$,
(BC)	$u_x(0,t) = u(1,t) = 0$	$(t \in (0,\infty))$,
(IC)	$u(x,0) = f(x)$	$(x \in [0,1])$

(1) Fourier の方法で形式解を求めよ (解になることを証明しなくても良い)。

(2) $f(x) = 1 - x^2$ とする。$\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ を求めよ。**注**: $u(x,t)$ 自身は求める必要はない。

4. $\Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 < 1\}$ における次の Poisson 方程式の境界値問題を解け。

$$\triangle u(x,y) = 1 \quad ((x,y) \in \Omega), \quad u(x,y) = 2y + 3 \quad ((x,y) \in \partial\Omega).$$

5. 正数 R に対して、$\overline{B(0;R)} = \{x \in \mathbf{R}^2; |x| \le R\}$ の近傍で調和な関数 u が

$$u(0) = \frac{1}{2\pi R}\int_C u\, ds \quad \text{(弧長要素に関する線積分)}$$

を満たすことを示せ。ただし、C は円周 $|x| = R$ を正の向きに一周する曲線である。

次の公式は利用しても良い (これを使わない簡単な証明もある)。$\mathbf{R}^2$ では、$E(x) = -\dfrac{1}{2\pi}\log|x|$.

$$-\int_\Omega E(x-y) \triangle u(y)\, dy + \int_\Gamma E(x-y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) ds_y - \int_\Gamma u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x-y) ds_y = u(x) \quad (x \in \Omega).$$

3.2 本試験問題開設

1. 言葉の説明としては要点が二つ。

(i) 線形同次方程式について成り立つものであること。

(ii) 解の任意の線形結合が解であること。

例は正しければ何でも良い。「…の解が u_1,u_2 ならば」は「u_1, u_2 が…の解ならば」の間違いでしょうね。

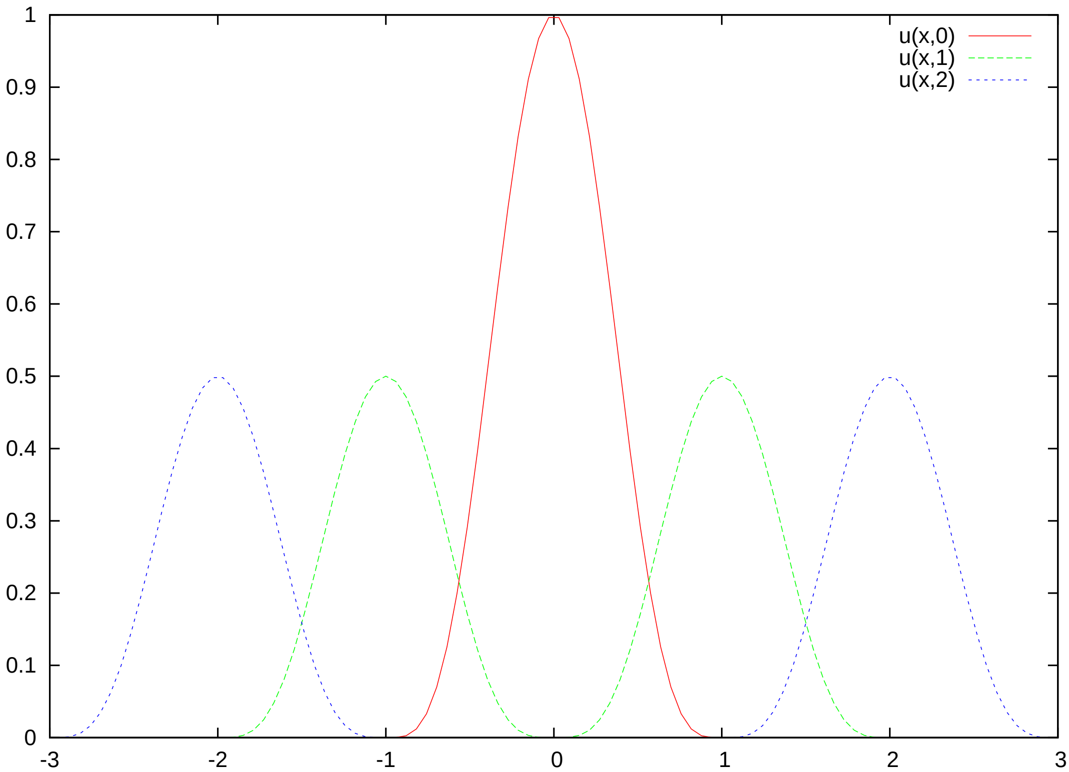
2.

(1) ψ の原始関数を Ψ とすると、$\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\Psi(x+ct) - \Psi(x-ct)\right) = \Psi'(x+ct)\cdot c - \Psi'(x-ct)\cdot(-c) = c\psi(x+ct) + c\psi(x-ct)$ となるあたりがハイライト。時々暗算で間違えた人も。$\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy = \psi(x+ct) - \psi(x-ct)$ と符号がちょっと違う。

(2) Duhamel 原理そのものは講義ノートにも書いたので省略。この 1 次元波動方程式で、というのは、以下のようなこと。

Duhamel の原理の $\phi \equiv 0$ とした式 $u(x,t) = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\ dy$ を t で偏微分すると、$u_t(x,t) = \dfrac{1}{2}(\psi(x+ct)+\psi(x-ct))$. ここで ψ を ϕ で置き換えると、最初に $\psi \equiv 0$ とした式に一致する。
重ね合わせの原理と誤解している人が多かった。

(3) 山が二つに割れて左右に進んでいくのだが、不連続な関数になっている人が少なくなくて驚いた。C^2 級だと書いているのに。



$t = 0, 1, 2$ 順に赤、緑、青

3. (1) については、どこらへんでつまづくかと言うと、

1. (HE), (BC) を満たす u のうちで、$u(x,t) = \zeta(x)\eta(t)$ という形をしていて、$u \not\equiv 0$ を満たすものを求める、という方針を書かない。こちらとしては何度も説明したつもりだけど、聴いていないか、理解しようとしていないのでしょうかね。

2. $\zeta'(0) = \zeta(1) = 0$ をきちんと導けない ($u \not\equiv 0$ を使う必要がある)。

3. $\frac{\zeta''}{\zeta} = \frac{\eta'}{\eta} - k$ が定数であることをきちんと言わない。

4. λ を求めるところで、$n \in \mathbf{Z}$ であることを書かない (自分が持ち出したものは説明する義務があります)。あるいは最初から $n \in \mathbf{N}$ としてしまう。

5. $\zeta(x)$ を求め損なう。計算間違いはしかたがないが (と言っても、レポート課題が $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$, こちらが $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ で、似たようなものだから、間違えて欲しくないが)、$\cos(n-1/2)\pi ix$ のように、虚数になってもそのままやっている人までいました。

6. $n\in\mathbf{N}$ で十分であるという議論がきちんと書けない。$n=\ell$ と $n=-\ell$ が同じ λ, $\zeta(x)$ を与えると書いている。自分で確認しないのでしょうか。

7. いわゆるステップ 2, つまり $u(x,t):=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{\left[k-(n-1/2)^2\pi^2\right]t}\cos\left(n-1/2\right)\pi x$ とおいたとき、(HE), (BC) の解であることと、その根拠をきちんと書けない。

8. $\zeta_n(x):=\cos\left(n-1/2\right)\pi x$ について、$(\zeta_n,\zeta_m)=\dfrac{\delta_{nm}}{2}$ が成り立つことの確認を間違えている。(レポートの添削で指摘した間違いをそのまま書いている人がいる。単位欲しくないのかな。)

これらは例年と同じで、授業でも説明&注意したことで、それでもそういう答案を書く人が少なくないこともまた例年通りです。

(2) については、初項がメジャーなので、その係数の符号をチェックする。

$$c_1=2\int_0^1(1-x^2)\cos\left[(1-1/2)\pi x\right]dx=\frac{16}{\pi^3}>0$$

であるから、

- $k>\pi^2/4$ ならば $\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\infty$ $(x\in[0,1))$.
- $k=\pi^2/4$ ならば $\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\dfrac{16}{\pi^3}\cos\left[\dfrac{\pi x}{2}\right]$.
- $k<\pi^2/4$ ならば $\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0$.

4. 多くの人が完投していました。点稼ぎ問題になりましたが、逆にこれをパスした人はつらかった。答は $u(x,y)=\dfrac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)+2y+\dfrac{11}{4}$.

5. 要点は以下の通り。Green's third identity の証明を消化していると、あまり難しくない。

1. $\triangle u=0$ を代入 (簡単)

2. $\triangle u=0$ ならば $\displaystyle\int_{C_R}\frac{\partial u}{\partial n_y}ds_y=0$ という Green の積分公式と一緒に習ったことを使う (ちょっと気づきにくい)

3. $\dfrac{\partial}{\partial n_y}E(x-y)=\dfrac{\partial}{\partial r}\left(-\dfrac{1}{2\pi}\log r\right)\Big|_{r=R}=-\dfrac{1}{2\pi R}$ となることを代入

一方、円盤 $x^2+y^2<R^2$ での Dirichlet 境界値問題の解は、

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

で、これから

$$u(0,0)=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R\cos\theta,R\sin\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi R}\int_{C_R}u\;ds$$

という証明法もある。$R=1$ にしておけば良かったかな。

3.3 追試験問題

(担当 桂田)

2012 年 2 月 6 日 (月) 10:00〜11:30 限実施

ノート等持込み禁止。解答用紙 (2 枚両面解答可) のみ提出。

1. 次の (a) と (b) のいずれかを解け。

(a) 熱方程式の古典解に関する最大値原理を説明し、それを用いて熱方程式の初期値境界値問題 (境界条件は Dirichlet 境界条件とする) の解の一意性を証明せよ。

(b) Laplace 方程式の古典解に関する最大値原理を説明し、それを用いて Poisson 方程式の初期値境界値問題 (境界条件は Dirichlet 境界条件とする) の解の一意性を証明せよ。

2 波動方程式の初期値境界値問題

$$\text{(WN)}\qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t) & ((x,t)\in(0,1)\times\mathbf{R}),\\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0 & (t\in\mathbf{R}),\\ u(x,0)=\phi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x) & (x\in[0,1]) \end{cases}$$

について以下の問に答えよ。

(1) (WN) を満たす $u\in C^2([0,1]\times\mathbf{R})$ に対して、時刻 $t\in\mathbf{R}$ におけるエネルギー $E(t)$ を

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^1\left[u_t(x,t)^2+u_x(x,t)^2\right]dx$$

で定義するとき、E は (t によらない) 定数関数であることを示せ。

(2) (WN) を満たす $u\in C^2([0,1]\times\mathbf{R})$ はただ一つしかないことを示せ。

3. $f \in C^1([0,1])$ とするとき、次の初期値境界値問題を考える。

(HE) $\quad u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \qquad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)),$

(NBC) $\quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \qquad (t \in (0,\infty)),$

(IC) $\quad u(x,0) = f(x) \qquad (x \in [0,1])$

(1) Fourier の方法で形式解を求めよ (解になることを証明しなくても良い)。

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ を求め、その結果を物理的に (熱伝導現象として) 解釈せよ。

4. (1) 周期 2π の周期関数 $\cos^4\theta$ を Fourier 級数展開せよ。(2) $\cos 4\theta$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の多項式で表せ (答は複数あるが 1 つ見つければ良い)。(3) $\mathbf{R}^2$ の円盤領域 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2 < 1\}$ における Laplace 方程式の境界値問題

(LE) $\quad \triangle u(x,y) = 0 \qquad ((x,y) \in \Omega),$

(DBC) $\quad u(x,y) = x^4 \qquad ((x,y) \in \partial\Omega)$

の解を求めよ。

3.4 追試験問題解説

3. (2) $a_0/2$ に行く。5 点。説明 5 点。

4.

$$\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}.$$

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta.$$

$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

$$\begin{aligned}
u(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{r^4}{8}\cos 4\theta + \frac{r^2}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8} \\
&= \frac{r^4}{8}\left(8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\right) + \frac{r^2}{2}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + \frac{3}{8} \\
&= (r\cos\theta)^4 - r^2(r\cos\theta)^2 + \frac{r^4}{8} + \frac{1}{2}\left[(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2\right] + \frac{3}{8} \\
&= x^4 - (x^2+y^2)x^2 + \frac{1}{8}(x^2+y^2)^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + \frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

4 2010 年度期末試験

4.1 本試験問題

2011 年 2 月 1 日 (火) 5 限実施

ノート等持込み禁止。解答用紙 (2 枚両面解答可) のみ提出。

1. $k \in \mathbf{R}$, $f \in C^1([0,1])$, $f(0) = f(1) = 0$ とするとき、次の初期値境界値問題を考える。

(PDE)	$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 2u_x(x,t) + ku(x,t)$	$((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty))$,
(DBC)	$u(0,t) = u(1,t) = 0$	$(t \in (0,\infty))$,
(IC)	$u(x,0) = f(x)$	$(x \in [0,1])$

(1) Fourier の方法で形式解を求めよ (解になることを証明しなくても良い)。

(2) $f(x) = e^{-x}\sin \pi x$ とする。$k = 10, 11$ それぞれの場合に $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ を求めよ。(注: $\pi^2 < 10$)

2. $\displaystyle G(x,y,t) := 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x \sin n\pi y$ $(x, y \in [0,1],\ t > 0)$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) 適当な仮定の下で、$\displaystyle \frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(x,y)\,dy = \int_a^x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\,dy + \varphi(x,x)$ が成り立つことを示せ。

(2) 授業で取り上げた熱方程式の初期値境界値問題 (H-IBP) (問題 **1** の (PDE) の代りに $u_t = u_{xx}$ とした問題) の解の公式を書き、それが次式で定義される v_f と一致することを確めよ。

$$v_f(x,t) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 G(x,y,t)f(y)dy & (x \in [0,1],\ t > 0) \\ f(x) & (x \in [0,1],\ t = 0). \end{cases}$$

(3) $F(0,t) = F(1,t) = 0$ $(t \geq 0)$ を満たす C^1 級の関数 $F = F(x,t)$ に対して、

$$u(x,t) := \int_0^t \left(\int_0^1 G(x,y,t-s)F(y,s)\,dy \right) ds$$

とおくとき、$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + F(x,t)$ が成り立つことを示せ。

3. 次の **3A**, **3B** のいずれか一つを選択して解答せよ。

3A $\Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 < 1\}$ における次の Laplace 方程式の境界値問題を解け。

$$\triangle u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \Omega), \quad u(x,y) = x^2 + 2y + 3 \quad ((x,y) \in \partial\Omega).$$

3B $\overline{B(a;R)} = \{x \in \mathbf{R}^3; |x - a| \leq R\}$ の近傍で調和な関数 u が

$$u(a) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{|x-a|=R} u(x)d\sigma \qquad \text{(調和関数の球面平均定理)}$$

を満たすことを示せ。次の Green の third identity は利用して良い。

$$-\int_\Omega E(x-y)\triangle u(y)\,dy + \int_\Gamma E(x-y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y)d\sigma_y - \int_\Gamma u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x-y)d\sigma_y = u(x) \quad (x \in \Omega).$$

4.2 本試験問題解説

(作っていません。)

5 2009年度期末試験

5.1 本試験問題

実は出題ミスをしました。ここに再録するのは訂正版です。

2010 年 1 月 28 日 (木) 13:00–14:00 実施
ノート等持込み禁止。解答用紙のみ提出。

1 $k \in \mathbf{R}$ と、$f(-\pi) = f(\pi)$ を満たす滑らかな $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、次の初期値境界値問題を考える。

(HE) $\quad u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + ku(x,t) \quad ((x,t) \in (-\pi,\pi) \times (0,\infty)),$

(PBC) $\quad u(-\pi,t) = u(\pi,t), \quad u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t) \quad (t \in (0,\infty)),$

(IC) $\quad u(x,0) = f(x) \quad (x \in [-\pi,\pi])$

(1) Fourier の方法で形式解を求めよ (解になることを証明しなくても良い)。

(2) $\mathcal{E}(t) := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(x,t)\,dx$ $(t \in [0,\infty)])$ とおくとき、$\lim_{t\to\infty} \mathcal{E}(t)$ を求めよ。その結果の物理的な意味を説明せよ。

2 (1) C^2 級の関数 $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ が $\varphi'(0) = 0$ を満たすとき、$\widetilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x) & (x \ge 0) \\ \varphi(-x) & (x < 0) \end{cases}$ とおくと、$\widetilde{\varphi}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は C^2 級の偶関数であることを示せ ($\widetilde{\varphi}$ を φ の偶関数拡張と呼ぶ)。
(2) $\phi \in C^2[0,\infty)$, $\psi \in C^1[0,\infty)$, $\phi'(0) = \psi'(0) = 0$ とするとき、初期値問題

(WE) $\quad \dfrac{1}{c^2} v_{tt}(x,t) = v_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in \mathbf{R} \times (0,\infty)),$

(IC) $\quad v(x,0) = \widetilde{\phi}(x), \quad u_t(x,0) = \widetilde{\psi}(x) \quad (x \in \mathbf{R}).$

の解は v は次の方程式を満たすことを示せ。

$$v_x(0,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)).$$

ただし $\widetilde{\phi}$, $\widetilde{\psi}$ はそれぞれ ϕ, ψ の偶関数拡張とする。
(3) 初期値問題の d'Alembert の公式は既知として、次の初期値境界値問題を解け (ϕ, ψ について自分で必要な仮定をおけ)。

(WE) $\quad \dfrac{1}{c^2} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in [0,\infty) \times (0,\infty)),$

(NBC) $\quad u_x(0,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)),$

(IC) $\quad u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (x \in [0,\infty)).$

3　Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界な領域で、$u\colon \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ は連続, u は Ω で C^2 級で、$\triangle u = 1$ (in Ω) を満たすとする。
(1) $\displaystyle\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$ であることを示せ。(2) $\displaystyle\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x)$ は成り立つか。
((1) のヒント: 背理法を用いると簡単。)

5.2　本試験問題解説

1.

(1) (第 1 段) (HE), (PBC) を満たす u で、$u(x,t) = X(x)T(t)$ の形をしていて、$u \not\equiv 0$ を満たすものを求める。
(HE) に代入すると、(中略)

$$\exists\lambda \in \mathbf{C} \quad \text{s.t.} \quad X''(x) = \lambda X(x) \quad (x \in (-\pi,\pi)), \quad T''(t) = (k+\lambda)T(t) \quad (x \in (0,\infty)).$$

(PBC) に代入すると $X(-\pi)T(t) = X(\pi)T(t)$, $X'(-\pi)T(t) = X'(\pi)T(t)$ $(t \in (0,\infty))$. $T(t) \not\equiv 0$ より $\exists t_0$ s.t. $T(t_0) \neq 0$. 割算して

$$X(-\pi) = X(\pi), \quad X'(-\pi) = X'(\pi).$$

$X = X(x)$ についての条件をまとめて書くと

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad (x \in (-\pi,\pi)), \quad X(-\pi) = X(\pi), \quad X'(-\pi) = X'(\pi), \quad X(x) \not\equiv 0.$$

λ が 0 であるかどうかで場合分けする。

(i) $\lambda = 0$ のとき、$X(x) = A + Bx$ (A, B は任意定数) から、$B\pi = -B\pi$. ゆえに $B = 0$. $X(x) = A$.

(ii) $\lambda \neq 0$ のとき、$X''(x) = \lambda X(x)$ の一般解は

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

$X(\pi) = X(-\pi)$ より $Ae^{\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{-\sqrt{\lambda}\pi} = Ae^{-\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{\sqrt{\lambda}\pi}$. すなわち

$$(\heartsuit_1) \qquad (e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi})A - (e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi})B = 0.$$

$X'(\pi) = X'(-\pi)$ より $A\sqrt{\pi}e^{\sqrt{\lambda}\pi} - B\sqrt{\pi}e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = A\sqrt{\pi}e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - B\sqrt{\pi}e^{\sqrt{\lambda}\pi}$. すなわち

$$(\heartsuit_2) \qquad (e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi})A + (e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi})B = 0.$$

($\heartsuit_1$) と ($\heartsuit_2$) は、$\omega := e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi}$ とおくと、次のように書き直せる。

$$\begin{pmatrix} \omega & -\omega \\ \omega & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\det\begin{pmatrix}\omega & -\omega \\ \omega & \omega\end{pmatrix} = 2\omega^2$ に注意しよう。もしも $\omega \neq 0$ ならば $A = B = 0$, $X(x) \equiv 0$ が導かれ、条件に反するので、$\omega = 0$. これは $e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0$, すなわち $e^{2\sqrt{\lambda}\pi} = 1$ であるから、$\exists n \in \mathbf{Z}$ s.t. $2\sqrt{\lambda}\pi = 2n\pi i$. これから $\sqrt{\lambda} = in$. ゆえに $\lambda = -n^2$. このとき、A, B はまったく任意である。

$$X(x) = Ae^{inx} + Be^{-inx} = \frac{A+B}{2}\cos nx + i\frac{A-B}{2}\sin nx = C_1\cos nx + C_2\sin nx.$$

この C_1, C_2 も任意定数である。$\lambda \neq 0$ より $n \neq 0$. また $n = k$ と $n = -k$ が同じ λ, $X(x)$ を与えるので、$n > 0$ として十分である。結局

$$\lambda = -n^2, \quad X(x) = C_1\cos nx + C_2\sin nx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

(i), (ii) をまとめて、

$$\lambda = -n^2, \quad X(x) = C_1\cos nx + C_2\sin nx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

$T(t)$ については、$T'(t) = (k+\lambda)T(t) = (k-n^2)T(t)$ という方程式だけなので、

$$T(t) = Ae^{(k-n^2)t}$$

求めていた変数分離解 u は、これらの積として、次のようになる。

$$u(x,t) = e^{(k-n^2)t}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right).$$

(第 2 段) 任意数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して、

$$(\clubsuit) \qquad u(x,t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{(k-n^2)t}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$$

とおき、級数が良い収束をすると仮定すると、u は (HE), (PBC) を満たす。
(第 3 段) ($\clubsuit$) を (IC) に代入すると、

$$(\spadesuit) \qquad f(x) = u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right).$$

これは a_n, b_n が f の Fourier 係数であることを示す。ゆえに ($\spadesuit$) は

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

と同値である。

(2) 積分記号下の微分をして、(HE), (PBC) を代入することで

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(u_{xx}(x,t) + ku(x,t)\right)dx \\ &= \left[u_x(x,t)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} + k\int_{-\pi}^{\pi}u(x,t)\,dx \\ &= k\mathcal{E}(t).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)e^{kt} = e^{kt}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\pi e^{kt}.$$

これから

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{E}(t) = \begin{cases} \infty & (a_0 > 0) \\ -\infty & (a_0 < 0) \\ 0 & (a_0 = 0). \end{cases}$$

(HE) を針金の熱伝導と解釈すると、$\mathcal{E}(t)$ は時刻 t において針金が持つ総熱量あるいは平均温度である、と解釈できる。また (PBC) は $x = \pm\pi$ が同じ点である、すなわち長さ 2π の針金の両端をくっつけて輪にした場合と考えられる。従って針金は外界とは熱のやり取りをしない。例えば $k = 0$ の場合は、熱量が保存されるため、$\mathcal{E}(t)$ は t によらない定数関数である。$k \neq 0$ の場合は、温度に比例して熱が発生する。時刻 0 における総熱量が正 (あるいは平均温度が正) の場合は、熱が発生して温度が上昇するという正のサイクルが生じて、温度はどんどん上昇する。

2.

(3) のような、半無限区間 $[0,\infty)$ での波動方程式の初期値境界値問題には、授業 (2010/1/19 補講— 内容の大半は http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/pde/report2009-1-answers.pdf にあります。そこでは Nuemann 境界条件ではなく、Dirichlet 境界条件の場合に大筋を説明しました。) で解説したように二つの解法があります。

一つは、「偶関数拡張」した初期値問題を解いて、その解を $x \in [0,\infty)$ の範囲に制限するという方法です。大まかな流れは、以下のようになります。

1. 初期値を偶関数拡張したものを初期値とした初期値問題を解く (これは d'Alembert の公式で OK)。
2. 初期値問題の解が偶関数になることを示す (これには初期値問題の解の一意性を用います)。
3. 初期値問題の解を $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ に制限する。

多くの本に載っている説明で、数学的には割とすっきりしていると思います。個人的には天下りで「偶関数拡張」を考えるのに違和感を感じていました。

もう一つは、高等学校の物理で説明される波の反射の性質に基づいて、式を立てて解を発見するという方法です。この説明が載っている本は実は私は見たことがありませんが、これでも (当然) 同じ結果が得られます。

少々くどいですが、それは初期値問題の任意の解が、適当な f, g を用いて

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

と表されることを背景に、

$$(\bigstar) \qquad u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) + g(-(x-ct))$$

の形で探す、ということです。f と g については、

$$f(x)=g(x)=0 \quad (x\in(-\infty,0))$$

という条件をつけて見つけられるだろう、と目星をつけます。

まず、(★) で定義された u が波動方程式を満たすことは簡単に分かります。境界条件については、

$$u_x(x,t)=f'(x-ct)+g'(x+ct)-g'(-(x-ct))$$

より

$$u_x(0,t)=f'(-ct)+g'(ct)-g'(ct)=f'(-ct)=0.$$

初期条件 $u(x,0)=\phi(x)$ $(x\in[0,\infty))$ より

$$\phi(x)=f(x)+g(x) \quad (x\in[0,\infty)).$$

初期条件 $u_t(x,0)=\psi(x)$ $(x\in[0,\infty))$ より

$$\psi(x)=-cf'(x)+cg'(x)+cg'(-x)=-cf'(x)+cg'(x) \quad (x\in[0,\infty)).$$

これから f, g を求める計算は、初期値問題のときと同じです。

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\phi(x)-\frac{1}{c}\int_0^x\psi(y)dy+f(0)-g(0)\right),$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(\phi(x)+\frac{1}{c}\int_0^x\psi(y)dy-f(0)+g(0)\right).$$

後は (★) に代入するだけです。途中省略して結果を示します。

$\phi(0)=\phi''(0)=\psi(0)=0$ を仮定する必要があり、そのとき

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\phi(x-ct)+\phi(x+ct)\right)+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy & (x-ct\ge 0\text{ のとき})\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\phi(x+ct)-\phi(ct-x)\right)+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(y)\,dy. & (x-ct<0\text{ のとき}).\blacksquare\end{cases}$$

3.

(ヒント) $\triangle u=0$ の場合の最大値原理を授業で紹介しているが、講義ノートにはもう少し一般的な議論をしてある。$\triangle u\ge 0$ ならば最大値原理が成り立ち (最小値原理は一般には成り立たない)、$\triangle u\le 0$ ならば最小値原理が成り立つ (最大値原理は一般には成り立たない)。ここでは $\triangle u\equiv 1>0$ であるので、最大値原理のみ成り立つ。

6　2008 年度期末試験

6.1　本試験問題

2009 年 1 月 26 日 (月) 13:00–14:00 実施
ノート等持込み禁止。解答用紙のみ提出。
2A, **2B** はどちらか一方を選択して解答せよ。

1　$k \in \mathbf{R}$ と、滑らかな $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、次の初期値境界値問題を考える。

(PDE)　$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + ku(x,t)$　$((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty))$,

(NBC)　$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$　$(t \in (0,\infty))$,

(IC)　$u(x,0) = f(x)$　$(x \in [0,1])$

(1) Fourier の方法で形式解を求めよ (解になることを証明しなくても良い)。

(2) $f(x) = \cos \pi x$ $(x \in [0,1])$ のとき、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ を求めよ。

2A　(1) $u \in C^2([0,1] \times [0,\infty))$ が方程式

(HE)　$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$　$((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty))$

と (NBC), (IC) を満たすとき、$J(t) := \displaystyle\int_0^1 u(x,t)^2\,dx$ $(t \in [0,\infty))$ とおくと、$J(t)$ は t について単調減少であることを示せ。
(2) (HE), (NBC), (IC) を満たす $u \in C^2([0,1] \times [0,\infty))$ は、存在しても唯一つだけであることを示せ。

2B　半直線 $I = [0,\infty)$ 上の波動方程式の初期値境界値問題

(a)　$\dfrac{1}{c^2} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$　$(x \in (0,\infty),\ t > 0)$,

(b)　$u_x(0,t) = 0$　$(t > 0)$,

(c)　$u(x,0) = \phi(x)$,　$u_t(x,0) = \psi(x)$　$(x \in I)$

を考える。境界条件 (b) は物理的には「自由端反射」を意味していて、「山は山で」、「谷は谷で」返って来る、と良く言われる。このことを用いて、解を求めよ。

3　(1) 周期 2π の周期関数 $\cos^5\theta$ を Fourier 級数展開せよ。(2) $\cos 5\theta$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の多項式で表せ (答は一通りではない。1 つ見つければ良い。)。(3) $\mathbf{R}^2$ の円盤領域 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ における Laplace 方程式の境界値問題

(LE)　$\triangle\, u(x,y) = 0$　$((x,y) \in \Omega)$,

(DBC)　$u(x,y) = x^5$　$((x,y) \in \partial\Omega)$

の解を求めよ。

6.2　本試験問題解説

1.　(1) これは直接 Fourier の方法で解いても良いし、$v(x,t) := u(x,t)e^{-kt}$ とおいて変数変換してから解いても良い。いずれにせよ、

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2}e^{kt} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(k-n^2\pi^2)t} \cos n\pi x, \quad a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx.$$

1. 「(PDE) と (BC) を満たす u で $u(x,t) = X(x)T(t)$ の形をしていて、$u \not\equiv 0$ を満たすものをすべて求める」という方針を書く。

2. $X'(0) = X'(1) = 0$ を導く。ちゃんとした理由がなければ 2 点。

3. $\dfrac{T'(t)}{T(t)} - 2 = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$ が定数であることと、その理由を書く。ちゃんとした理由がなければ 2 点。

4. $\lambda = 0$ のとき、$X(x) = A$ (A は任意定数) となることを示す。

5. ($\lambda \neq 0$ のとき) $e^{2\sqrt{\lambda}} = 1$ から、$\exists n \in \mathbf{Z}$ s.t. $2\sqrt{\lambda} = 2n\pi i$ を導く。

6. ($\lambda \neq 0$ のとき) $X(x) = A\cos n\pi x$ を示す。

7. ($\lambda \neq 0$ のとき) $n \in \mathbf{N}$ で十分なことを示す。

8. $u(x,t) := \frac{a_0}{2}e^{kt} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(k-n^2\pi^2)t}\cos n\pi x$ とおくと、u は (PDE) と (NBC) を満たすこと。

9. 前項の理由。

10. $X_n(x) = \cos n\pi x$ $(n \geq 0, 1, \dots)$ とおくとき、$(X_n, X_m) = \dfrac{1}{2}\delta_{nm}$ が成り立つことを示す。

11. $a_n = 2(f, X_n) = 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\, dx$ であることを示す。

12. $f(x)$ の定義式 $f(x) = \cos\pi x$ は、これ自身 f の Fourier 級数展開を与えている。$u(x,t) = e^{(k-\pi^2)t}\cos\pi x$. ゆえに $k > \pi^2$ のとき、

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \begin{cases} \infty & (x \in [0, 1/2)) \\ 0 & (x = 1/2) \\ -\infty & (x \in (1/2, 1]) \end{cases}$$

$k < \pi^2$ のとき、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$. $k = \pi^2$ のとき、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \cos\pi x$.

2A (1) $J'(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)^2\ dx = \int_0^1 2u_t(x,t)u(x,t)\ dx = 2\int_0^1 u_{xx}(x,t)u(x,t)\ dx = 2\left([u_x(x,t)u(x,t)]_0^1 - \int_0^1 u_x(x,t)^2\ dx\right) = -2\int_0^1 u_x(x,t)^2\ dx \leq 0$ であるから、$J(t)$ は t につき単調減少である。(2) u_1, u_2 が解であったとして、$v := u_1 - u_2$ とおくと、v は、初期値が定数関数 0 であるような問題の解である。ゆえに $J(0) = 0$. 定義式の形から、$J(t) \geq 0$ であるが、$J(t)$ は t について単調減少であるから、任意の t について $J(t) = 0$ が得られる。ゆえに $v \equiv 0$. これは u_1 と u_2 が恒等的に等しいことを示す。

2B. $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) + g(-(x-ct)) = f(x-ct) + g(x+ct) + g(ct-x)$ とおける。(1) 25 点

(i) (10 点)

$$u_{tt}(x,t) = c^2 \left(f''(x-ct) + g''(x+ct) + g''(ct-x) \right),$$
$$u_{xx}(x,t) = f''(x-ct) + g''(x+ct) + g''(ct-x)$$

であるから。f_{tt} とか g_{xx} なんて書いてあるのは点をやらない。

(ii) (5 点) $u_x(x,t) = f'(x-ct) + g'(x+ct) - g'(ct-x)$ であるから、$t \geq 0$ のとき $-ct \leq 0$ であるから、$f'(-ct) = 0$ となることに注意すると、

$$u_x(0,t) = f'(0-ct) + g'(0+ct) - g'(ct-0) = f'(-ct) + g'(ct) - g'(ct) = f'(-ct) = 0.$$

(iii) (10 点) $x \geq 0$ のとき $-x \leq 0$ であるから、$g(-x) = 0$ となることに注意すると、

$$u(x,0) = f(x - c \cdot 0) + g(x + c \cdot 0) - g(-x + c \cdot 0) = f(x) + g(x) - g(-x) = f(x) + g(x).$$

(最後まで出て 5 点、1 つ手前で止って 3 点。)

一方

$$u_t(x,t) = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct) - cg'(-x+ct)$$

より

$$u_t(x,0) = -cf'(x) + cg'(x) - cg'(-x) = -cf'(x) + cg'(x).$$

ここでも $x \geq 0$ から $g'(-x) = 0$ が導かれることを用いた。(最後まで出て 5 点、1 つ手前で止って 3 点。) ■

3. (15 点) (1)

$$\cos^5 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^5 = \cdots = \frac{5}{8} \cos \theta + \frac{5}{16} \cos 3\theta + \frac{1}{16} \cos 5\theta.$$

(2)

$$\cos 5\theta = \mathrm{Re} \left[(\cos \theta + i \sin \theta)^5 \right] = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta.$$

ちなみに

$$\cos 3\theta = \mathrm{Re} \left[(\cos \theta + i \sin \theta)^3 \right] = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta.$$

(3)

$$\Psi(\theta) = \psi(\cos \theta, \sin \theta) = \cos^5 \theta = \frac{5}{8} \cos \theta + \frac{5}{16} \cos 3\theta + \frac{1}{16} \cos 5\theta.$$

より

$$\begin{aligned} U(r,\theta) &= \frac{5}{8} r \cos \theta + \frac{5}{16} r^3 \cos 3\theta + \frac{1}{16} r^5 \cos 5\theta \\ &= \frac{5}{8} r \cos \theta + \frac{5}{16} r^3 \left(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{16} r^5 \left(\cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \right) \\ &= \frac{5}{8} x + \frac{5}{16} (x^3 - 3xy^2) + \frac{1}{16} (x^5 - 10x^3 y^2 + 5xy^4). \end{aligned}$$

検算も終了。

6.3 追試験問題

(担当 桂田)
2009 年 2 月 2 日 (月) 13:00–14:00 実施
ノート等持込み禁止。解答用紙のみ提出。

1 $k \in \mathbf{R}$ と、滑らかな $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、次の初期値境界値問題を考える。

(a) $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + ku(x,t) \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)),$

(b) $u(0,t) = u_x(1,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)),$

(c) $u(x,0) = f(x) \quad (x \in [0,1])$

(1) Fourier の方法で形式解を求めよ (解になることを証明しなくても良い)。

(2) $f(x) = 1-(x-1)^2$ $(x \in [0,1])$ のとき、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ を求めよ。

2 有限の長さの区間 $(0,1)$ における波動方程式の初期値境界値問題

(WE) $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad (x \in (0,1),\ t > 0),$

(DBC) $u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (t > 0),$

(IC) $u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (x \in [0,1])$

の解 u は、適当な数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を用いて

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t) \sin n\pi x$$

と書けることは学んだ。

(1) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を ϕ, ψ を用いて表せ。

(2) $E_{\mathrm{k}}(t) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 u_t(x,t)^2\,dx$, $E_{\mathrm{p}}(t) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 u_x(x,t)^2\,dx$, $\mathcal{E}(t) := E_{\mathrm{k}}(t) + E_{\mathrm{p}}(t)$ を $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を用いて表せ。

3 $\mathbf{R}^2$ の円盤領域 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ における Poisson 方程式の境界値問題

(PE) $\triangle\, u(x,y) = 1 \quad ((x,y) \in \Omega),$

(BC) $u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \partial\Omega)$

について考える。
(1) 方程式 (PE) の特解を (何でも良いから) 1 つ求めよ。(2) 境界値問題 (PE), (BC) を解け。

6.4 試験問題解説

1. (1) これは直接 Fourier の方法で解いても良いし、$v(x,t) := u(x,t)e^{-kt}$ とおいて変数変換してから解いても良い。いずれにせよ、

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\left[k-(n-1/2)^2\pi^2\right]t} \sin\left[(n-1/2)\pi x\right], \quad a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin\left[(n-1/2)\pi x\right] dx.$$

1. 「(PDE) と (BC) を満たす u で $u(x,t) = X(x)T(t)$ の形をしていて、$u \not\equiv 0$ を満たすものをすべて求める」という方針を書く。
2. $X(0) = X'(1) = 0$ を導く。ちゃんとした理由がなければ 2 点。
3. $\dfrac{T'(t)}{T(t)} - k = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$ が定数であることと、その理由を書く。ちゃんとした理由がなければ 2 点。
4. $\lambda = 0$ のとき、$X(0) = X'(1) = 0$ を満たす X は 0 のみ (だから不適) であることを示す。
5. ($\lambda \neq 0$ のとき) $e^{2\sqrt{\lambda}} = -1$ から、$\exists n \in \mathbf{Z}$ s.t. $2\sqrt{\lambda} = (2n-1)\pi i$ を導く。
6. ($\lambda \neq 0$ のとき) $X(x) = A\sin\left[(n-1/2)\pi x\right]$ を示す。
7. ($\lambda \neq 0$ のとき) $n \in \mathbf{N}$ で十分なことを示す。
8. $u(x,t) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\left[k-(n-1/2)^2\pi^2\right]t} \sin\left[(n-1/2)\pi x\right]$ とおくと、u は (PDE) と (BC) を満たすこと。
9. 前項の理由。
10. $X_n(x) = \sin\left[(n-1/2)\pi x\right]$ $(n \in \mathbf{N})$ とおくとき、$(X_n, X_m) = \dfrac{1}{2}\delta_{nm}$ が成り立つことを示す。
11. $a_n = 2(f, X_n) = 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin\left[(n-1/2)\pi x\right] dx$ であることを示す。
12. $f(x)$ の定義式 $f(x) = \cos\pi x$ は、これ自身 f の Fourier 級数展開を与えている。$u(x,t) = e^{(k-\pi^2)t}\cos\pi x$. ゆえに $k > \pi^2$ のとき、

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \begin{cases} \infty & (x \in [0,1/2)) \\ 0 & (x = 1/2) \\ -\infty & (x \in (1/2,1]) \end{cases}$$

$k < \pi^2$ のとき、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$. $k = \pi^2$ のとき、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \cos\pi x$.

2. (WE), (DBC), (IC) の解は

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi x(a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t),$$

$$a_n=2\int_0^1\phi(x)\sin n\pi x\,dx,\quad b_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^1\psi(x)\sin n\pi x\,dx$$

で与えられる。内積 $(\cdot,\cdot)$ を

$$(f,g):=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

で定めるとき、通常の計算ルールが成立する。また、$m,n\in\mathbf{N}$ に対して、

$$(\sin n\pi x,\sin m\pi x)=(\cos n\pi x,\cos m\pi x)=\frac{1}{2}\delta_{nm}$$

が成り立つ (δ_{nm} は Kronecker のデルタである)。

$$\begin{aligned}
E_k(t)&=\frac{1}{2}\int_0^1 u_t(x,t)^2\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi x(n\pi)\left(-a_n\sin n\pi t+b_n\cos n\pi t\right),\sum_{m=1}^{\infty}\sin m\pi x(m\pi)\left(-a_m\sin m\pi t+b_m\cos m\pi t\right)\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\sin n\pi x,m\sin m\pi x\right)\left(nm\pi^2\right)\left(-a_n\sin n\pi t+b_n\cos n\pi t\right)\left(-a_m\sin m\pi t+b_m\cos m\pi t\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{2}\delta_{mn}(nm\pi^2)\left(-a_n\sin n\pi t+b_n\cos n\pi t\right)\left(-a_m\sin m\pi t+b_m\cos m\pi t\right)\\
&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2\left(-a_n\sin n\pi t+b_n\cos n\pi t\right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_p(t)&=\frac{1}{2}\int_0^1 u_x(x,t)^2\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\pi\cos n\pi x\left(a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t\right),\sum_{m=1}^{\infty}m\pi\cos m\pi x\left(a_m\cos m\pi t+b_m\sin m\pi t\right)\right)\\
&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2\left(a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t\right)^2.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t)&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2\left(a_n^2\sin^2 n\pi t-2a_nb_n\sin n\pi t\cos n\pi t+b_n\cos^2 n\pi t\right.\\
&\qquad\left.+\ a_n^2\cos^2 n\pi t+2a_nb_n\sin n\pi t\cos n\pi t+b_n\sin^2 n\pi t\right)\\
&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2\left(a_n^2+b_n^2\right).
\end{aligned}$$

これは t によらず定数である (エネルギーは保存される)。ここまでで十分であるが、これは実は

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\psi(x)^2 + \phi'(x)^2\right] dx$$

に等しい。■

3. (15 点) (準備中)

6.5 特別試験問題

(担当 桂田)
2009 年 2 月　日 (　) 実施
ノート等持込み禁止。解答用紙 (2 枚) のみ提出。

1 正定数 c と、$\phi(0) = \phi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$ を満たす、滑らかな $\phi\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, $\psi\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、次の初期値境界値問題を考える。

(WE) $\quad \dfrac{1}{c^2} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in (0,1) \times \mathbf{R})$,

(DBC) $\quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (t \in \mathbf{R})$,

(IC) $\quad u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (x \in [0,1])$

(1) Fourier の方法で形式解を求め、

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(cn\pi t) + b_n \sin(cn\pi t)\right) \sin n\pi x$$

の形になることを確めよ。a_n, b_n は ϕ, ψ を用いて表せ。

(2) u は t について周期関数であること、すなわち

$$u(x, t+T) = u(x,t) \quad (x \in [0,1],\ t \in \mathbf{R})$$

を満たす $T > 0$ が存在することを示せ。

2 実定数 A, B と滑らかな関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、区間 $(0,1)$ における熱方程式の初期値境界値問題

(HE) $\quad u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad (x \in (0,1),\ t > 0)$,

(NBC) $\quad u_x(0,t) = A, \quad u_x(1,t) = B \quad (t > 0)$,

(IC) $\quad u(x,0) = f(x) \quad (x \in [0,1])$

の解 u に対して、$J\colon [0,\infty] \to \mathbf{R}$ を次の式で定めるとき、以下の問 (1), (2) に答えよ。

$$J(t) := \int_0^1 u(x,t)\, dx \quad (t \in [0,\infty)).$$

(1) $J'(t)$ は t によらず定数であることを示し、$J(t)$ を求めよ (u を用いず、t, f, A, B を用いて表せ)。

(2) $J(t)$ が t によらず定数であるための条件と、その条件が成立するときの極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ を求めよ。

3 $\mathbf{R}^2$ の円盤領域 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ における Poisson 方程式の境界値問題

$$\text{(PE)} \qquad \triangle u(x,y) = x \qquad ((x,y)\in\Omega),$$
$$\text{(BC)} \qquad u(x,y) = 0 \qquad ((x,y)\in\partial\Omega)$$

について考える。
(1) 方程式 (PE) の特解を (何でも良いから) 1 つ求めよ。(2) 境界値問題 (PE), (BC) を解け。

7 2007年度期末試験

7.1 本試験問題

(担当 桂田)
2008 年 1 月 28 日 (月) 13:00–14:00 実施
ノート等持込み禁止。解答用紙のみ提出。

1 十分滑らかな関数 $f\colon [0,1]\to\mathbf{R}$ で、$f(1)=0$ を満たすものが与えられたとき、初期値境界値問題

$$\text{(PDE)} \qquad u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 2u(x,t) \qquad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)),$$
$$\text{(BC)} \qquad u_x(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad (t\in(0,\infty)),$$
$$\text{(IC)} \qquad u(x,0) = f(x) \qquad (x\in[0,1])$$

の形式解を Fourier の方法で求めよ。また $t\to\infty$ のときの漸近挙動を調べよ。

2 c は正の定数, $I=[0,\infty)$ とする。

(1) “$\forall x\le 0$ に対して $f(x)=g(x)=0$” を満たす任意の f, $g\in C^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$ に対して、

$$(\sharp) \qquad u(x,t) := f(x-ct) + g(x+ct) - g(-(x-ct)) \quad (x\in\mathbf{R},\ t\ge 0)$$

で u を定めるとき、以下の問に答えよ。

(i) $\dfrac{1}{c^2}u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$ $(x\in\mathbf{R},\ t>0)$ を示せ。

(ii) $u(0,t)=0$ $(t\ge 0)$ であることを示せ。

(iii) $x\ge 0$ のとき、$u(x,0)$ と $u_t(x,0)$ を求めよ。

(2) $\phi \in C^2(I;\mathbf{R})$ と $\psi \in C^1(I;\mathbf{R})$ が $\phi(0)=\phi'(0)=\phi''(0)=\psi(0)=\psi'(0)=0$ を満たすとき、(1) の f と g をうまく選んで、

(WE) $\quad \dfrac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t) \quad ((x,t)\in(0,\infty)\times(0,\infty))$

(DBC) $\quad u(0,t)=0 \quad (t\in(0,\infty))$

(IC) $\quad u(x,0)=\phi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x) \quad (t\in(0,\infty))$

の解を求めよ。

(3) 波が $x=0$ で反射されると、「山は谷になって」戻って来ることを説明せよ。

3 $\mathbf{R}^2$ の円盤領域 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ における Laplace 方程式の境界値問題

(PE) $\quad \triangle u(x,y)=0 \quad ((x,y)\in\Omega),$

(NBC) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y)=\psi(x,y) \quad ((x,y)\in\partial\Omega)$

の解の公式を求めよ (ここで $\boldsymbol{n}$ は、Ω の境界上の点 (x,y) における外向き単位法線ベクトルを表す。また ψ は $\partial\Omega$ 上で与えられた関数である。)。Ω における Laplace 方程式の変数分離解が何であるか、授業中に説明したこと証明抜きに用いて良い。

7.2 本試験問題解説

1.

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{\left[2-(n+1/2)^2\pi^2\right]t}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\right],$$

$$c_n=2\int_0^1 f(x)\cos\left[\frac{(n+1)}{2}\pi x\right].$$

1 つ 5 点のチェック・ポイント 12 個で 60 点。

1. 「(PDE) と (BC) を満たす u で $u(x,t)=X(x)T(t)$ の形をしていて、$u\not\equiv 0$ を満たすものをすべて求める」という方針を書く。
2. $X'(0)=X(1)=0$ を導く。ちゃんとした理由がなければ 2 点。
3. $\dfrac{T'(t)}{T(t)}-2=\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ が定数であることと、その理由を書く。ちゃんとした理由がなければ 2 点。
4. $\lambda=0$ のとき不適となることを示す。
5. $e^{2\sqrt{\lambda}}=-1$ から、$\exists n\in\mathbf{Z}$ s.t. $2\sqrt{\lambda}=(2n-1)\pi i$ を導く。
6. $X(x)=A\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right]$ を示す。

7. $2\sqrt{\lambda} = (2n+1)\pi i$ の場合、$n \geq 0$ で十分なことを示す。$2\sqrt{\lambda} = (2n-1)\pi i$ の場合、$n \in \mathbf{N}$ で十分なことを示す。

8. $u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\left[2-(n-1/2)^2\pi^2\right]t} \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right]$ とおくと、u は (PDE) と (BC) を満たすこと。

9. 前項の理由。

10. $X_n(x) = \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right]$ とおくとき、$(X_n, X_m) = \dfrac{1}{2}\delta_{nm}$ が成り立つことを示す。

11. $c_n = 2(f, X_n) = 2\int_0^1 f(x) \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right] dx$ であることを示す。

12. $2 - (\pi/2)^2 < 0$ であるので、
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0.$$

2. (1) 25 点

(i) (10 点)
$$u_{tt}(x,t) = c^2\left(f''(x-ct) + g''(x+ct) - g''(-x+ct)\right),$$
$$u_{xx}(x,t) = f''(x-ct) + g''(x+ct) - g''(-x+ct)$$
であるから。f_{tt} とか g_{xx} なんて意味不明の式を書いてあるのはダメ。

(ii) (5 点) $t \geq 0$ のとき $-ct \leq 0$ であるから、$f(-ct) = 0$ となることに注意すると、
$$u(0,t) = f(0-ct) + g(0+ct) - g(-0+ct) = f(-ct) + g(ct) - g(ct) = f(-ct) = 0.$$

(iii) (10 点) $x \geq 0$ のとき $-x \leq 0$ であるから、$g(-x) = 0$ となることに注意すると、
$$u(x,0) = f(x - c\cdot 0) + g(x + c\cdot 0) - g(-x + c\cdot 0) = f(x) + g(x) - g(-x) = f(x) + g(x).$$
(最後まで出て 5 点、1 つ手前で止って 3 点。)

一方
$$u_t(x,t) = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct) - cg'(-x+ct)$$
より
$$u_t(x,0) = -cf'(x) + cg'(x) - cg'(-x) = -cf'(x) + cg'(x).$$
ここでも $x \geq 0$ から $g'(-x) = 0$ が導かれることを用いた。(最後まで出て 5 点、1 つ手前で止って 3 点。) ■

3. (15 点) Laplace 方程式を満たす u として、

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right)$$

が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\cos\theta, \sin\theta) = & \left.\frac{\partial}{\partial r}\left(u(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)\right|_{r=1} = \left.\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1}\left(a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta\right)\right|_{r=1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right).\end{aligned}$$

であるので、境界条件が成り立つには

$$\psi(\cos\theta, \sin\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta\right) \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

これから

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\cos\theta, \sin\theta)\cos n\theta\, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\cos\theta,\sin\theta)\sin n\theta\, d\theta \quad (n \in \mathbf{N}),$$

a_0 は任意である。■

8 2006年度期末試験

8.1 本試験問題

(担当 桂田)
2007 年 1 月 29 日 13:00–14:00 実施
ノート等持込み禁止。解答用紙のみ提出。

1 実定数 k と、十分滑らかな関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ で、$f(0) = 0$ を満たすものが与えられたとき、熱方程式の初期値境界値問題

(HE)	$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + ku(x,t)$	$((x,t) \in (0,1)\times(0,\infty))$,
(BC)	$u(0,t) = u_x(1,t) = 0$	$(t \in (0,\infty))$,
(IC)	$u(x,0) = f(x)$	$(x \in [0,1])$

の形式解を Fourier の方法で求めよ。

2　半直線 $I=[0,\infty)$ 上の波動方程式の初期値境界値問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{(WE)} & \dfrac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t) & (x\in(0,\infty),\ t\in(0,\infty)),\\
\text{(NBC)} & u_x(0,t)=0 & (t\in(0,\infty)),\\
\text{(IC)} & u(x,0)=\phi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x) & (x\in I)
\end{array}
$$

を考える。ここで c は与えられた正定数、$\phi\in C^2(I;\mathbf{R})$ と $\psi\in C^1(I;\mathbf{R})$ は $\phi'(0)=\psi'(0)=0$ を満たす与えられた関数とする。

(1) $\Phi(x):=\begin{cases}\phi(x) & (x\ge 0)\\ \phi(-x) & (x<0)\end{cases}$, $\Psi(x):=\begin{cases}\psi(x) & (x\ge 0)\\ \psi(-x) & (x<0)\end{cases}$ で Φ, Ψ を定めるとき、$\Phi\in C^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$, $\Psi\in C^1(\mathbf{R};\mathbf{R})$ であることを示せ。

(2) 初期値境界値問題 (WE), (NBC), (IC) の解を求めよ。初期値問題の解の公式 (ダランベールの公式) は既知として用いてよい。

3　$\mathbf{R}^2$ の円盤領域 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ における Poisson 方程式の境界値問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{(PE)} & -\triangle u(x,y)=1 & ((x,y)\in\Omega),\\
\text{(DBC)} & u(x,y)=2x+3y^2 & ((x,y)\in\partial\Omega)
\end{array}
$$

の解 u を求めよ (Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解の公式は使って良い)。

9　2005 年度期末試験

9.1　本試験問題

(担当 桂田)　2006 年 1 月 30 日実施
ノート等持込み禁止。解答用紙のみ提出。

1　実定数 k と、十分滑らかな関数 $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ が与えられたとき、初期値境界値問題

$$
\begin{array}{lrcll}
(3) & u_t(x,t) & = & u_{xx}(x,t)+ku & ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty))\\
(4) & u_x(0,t) & = & u_x(1,t)=0 & (t\in(0,\infty))\\
(5) & u(x,0) & = & f(x) & (x\in[0,1])
\end{array}
$$

について、以下の問に答えよ。

(1) Fourier の方法で解 u を求めよ (実際に解であることを証明しなくてもよい)。

(2) 任意の初期値 f に対して、$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0$ $(x\in[0,1])$ となるための、k に関する条件を求めよ。

2 $\mathbf{R}^2$ の円盤領域 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ における Laplace 方程式の境界値問題

$$(\sharp) \qquad \triangle u(x,y) = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x,y) = (x+y)^2 \quad ((x,y) \in \partial\Omega)$$

について以下の問に答えよ。
(1) u を求めよ (解の公式は証明せずに使って良い)。
(2) u の $\overline{\Omega}$ における最大値、最小値を求めよ。

3 (1) C^2 級の関数 $\phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\psi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と正定数 c に対して、

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\left(\phi(x-ct)+\phi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)\,d\xi \quad (x,\, t \in \mathbf{R})$$

とおくとき、u は

$$(6) \qquad \frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx} \quad ((x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R},\, t \in \mathbf{R}),$$

$$(7) \qquad u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R})$$

を満たすことを示せ。
(2) デュアメルの原理を説明せよ。

4. 円盤 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ 内で C^2 級の関数 $u\colon \Omega \to \mathbf{R}$ と実定数 θ_0 に対して、

$$v(x,y) := u(x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0, x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0) \quad ((x,y) \in \Omega)$$

をおくとき、$\triangle u = \triangle v$ (in Ω) であることを示せ。

10 2004年度期末試験

10.1 本試験問題

(担当 桂田) 2005年1月24日実施
ノート等持込み禁止。解答用紙のみ提出。

1 実定数 k と、十分滑らかな関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、初期値境界値問題

$$\begin{aligned} &(1) & u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) + ku \quad ((x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)) \\ &(2) & u_x(0,t) &= u(1,t) = 0 \qquad (t \in (0,\infty)) \\ &(3) & u(x,0) &= f(x) \quad (x \in [0,1]) \end{aligned}$$

について、以下の問に答えよ。

(1) Fourier の方法で解 u を求めよ (実際に解であることを証明しなくてもよい)。

(2) $t \to \infty$ のとき u はどうなるか?

2 $\mathbf{R}^2$ の円盤領域 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ における Poisson 方程式の境界値問題

$$(\sharp) \qquad -\triangle u(x,y) = y \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x,y)=0 \quad ((x,y)\in\partial\Omega)$$

について以下の問に答えよ。
(1) $-\triangle v(x,y) = y$ を満たす v を一つ求めよ (**注:** v は一意的には定まらない)。
(2) 境界値問題 ($\sharp$) の解 u を求めよ。

3 C^2 級の関数 $U\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ と、実定数 a, b, c (ただし $c>0$) に対して、

$$u(x,y,t) := U(ax+by+ct) \quad (x,y,t\in\mathbf{R})$$

とおいて $u\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ を定義するとき、u が波動方程式

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx}+u_{yy}$$

を満たすための必要十分条件を求めよ。またこのとき、波の様子 (どのように伝搬するか) を図を描いて説明せよ (U のグラフは例えば以下のようなものとせよ)。

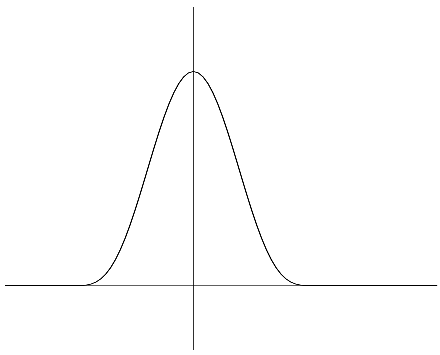


図 1: U のグラフ

10.2 本試験問題解説

1.

受験者に解説した「注意事項」

- この議論は得られたものが解であることの証明はしないという意味では、形式的なものであるが、固有関数はもれなく求めることが必要なので、緻密に計算しなくてはならない。ごく少数の例外を除いて、得点率はせいぜい 1/4 程度である (毎年そうであることは授業中に何回か言ってある)。

- 採点では以下のチェック・ポイント (a)–(g) を置いた。変数分離解を求めて、それを重ね合わせ、係数が直交性から求まる、という流れが分かるように書くべきであり、(a), (f) は大事である。もちろん、表現まで真似て書く必要はさらさらないが (理解して自分の言葉で書けるようにせよ)、他のどうでも良いことを丸暗記して書こうとするのに、こういう重要なところは真似をする人が少ないんだな (ぼやき)。

(a) 最初に初期値境界値問題は置いておいて、変数分離解を求める作業を行うことを明示する。例えば

> 「$u(x,t) = X(x)T(t)$ の形をしている u で、(1) と (2) を満たし、恒等的に 0 でないもの (変数分離解) を求める。」

(丸暗記を狙っても失敗する可能性が高い。理解すること。)

(b) $X'(0) = X(1) = 0$ がちゃんと理由付きで導出できているか。8 割近い解答が不完全である。しばしば「$T(t) = 0$」のように t が何であるか明示しない答案があるが、それでは曖昧である。$T(t)$ は関数であり、ただの数 (定数) ではないのだから、$\forall t \in (0,\infty)$ なのか、$\exists t \in (0,\infty)$ なのか、読む人が分かるように書こう。

(c) $X''(x)/X(x) = T'(t)/T(t) - k$ が定数であることを示した上で、それを (例えば) λ と置いているか。約半数の答案がちゃんと書けていない。$= \lambda$ と何も説明せずに書いていたり、「λ とおく」だけで定数であることを書かなかったり、「λ (定数) とおく」だけで定数である理由を書かなかったり、「左辺は x によらず、右辺は t によらない」と間違いを書いたり (左と右が逆だ[1]) $\cdots$

(d) 固有値 λ、固有関数 $X(x)$ が正しく求められたか。計算の核となる部分だが出来は今一つである。検算することを勧めたい。つまり、得られた結果が境界条件 $X'(0) = X(1) = 0$ を満たすことくらいはチェックしよう。不十分な答案の例をいくつか。

  (i) $\sqrt{\lambda} - \pi i = 2n\pi i$ と書いたとき n が何であるか書かない。新しい記号を導入したら、紹介が必要だ。

  (ii) 何かの真似をして「$n = p$ と $n = -p$ は同じ λ と $X(x)$ を与える」などと書く。$\lambda = -(n-1/2)^2\pi^2$, $X(x) = A\cos(n-1/2)\pi x$ の場合であれば間違いであり、正しくは「$n = p$ と $n = 1-p$ は同じ λ と $X(x)$ を与える[2]」例えば $n = 1$ と $n = 0$, $n = 2$ と $n = -1$, $n = 3$ と $n = -2$, $\ldots$ が同じものを与える。実際に λ, $X(x)$ の式に入れてチェックすること。それをしなければ正しいことが書けるかどうかはギャンブルである。

  (iii) $e^{(n-1/2)\pi i x}$ が複雑なのにへこたれたのか、$e^{(n-1/2)\pi i}$ とか $e^{(n-1/2)\pi x}$ としてしまう。しっかりしよう。

  (iv) $e^{i\theta} + e^{i\theta} = 2i\sin\theta$ のようなことをしてしまう。$\cos(n+1/2)\pi$ というのもあった (x はどこにいった？)。しっかり！

(e) 変数分離解がちゃんと求まったか。(d) をちゃんとやっておけば簡単。

(f) 変数分離解の和を取ったものが、方程式 (1), (2) を満たすことと、その理由を書いたか。授業でも何度か強調したように、ここは簡単だが重要なところである。悪い例は、

  (i) 「$\therefore\ u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{[k-(n-1/2)^2\pi^2]t} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x$」$\cdots$ 一体どこが「ゆえに」なのだ？

---

[1] うそのようだが、結構いるんだね。

[2] $\lambda = -(n+1/2)^2\pi^2$, $X(x) = A\cos(n+1/2)\pi x$ と書いた場合は、$n = p$ と $n = -1-p$ が同じ λ, $X(x)$ を与える。

(ii) 「(1), (2) は線形同次方程式なので、$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{[k-(n-1/2)^2\pi^2]t}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x$ であると期待される」… u はここで初めて定義するものであって、「である」と等式成立を主張しているのはおかしい。「$u=\ldots$ とおくと、u は (1), (2) を満たす」が正しい。

(iii) Neumann 問題の真似をして、変な第 0 項をつける。

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{[k-(n+1/2)^2\pi^2]t}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

とか

$$c_0 e^{kt}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{[k-(n+1/2)^2\pi^2]t}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

とか ($X_0(x)\equiv 1$ ではない！)

$$\frac{c_0}{2}e^{kt}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{[k-(n+1/2)^2\pi^2]t}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

とか。全部間違い。

(iv) こんなとぼけたものもあった。「u は線形同次方程式なので」… u は関数であり、断じて方程式ではない。

(g) 係数の決定がちゃんとできたか。(X_n, X_m) の計算だが、(X_0, X_0) がおかしい人が多い。$X_n(x)=\cos(n+\frac{1}{2})\pi x$ は、$n=0$ としても 0 や 1 にはならない。理解せず何かの真似をしても駄目。

解答

(1) まず、式 (1), (2) を満たし、

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{4}$$

の形をしている u で (以下では変数分離解と呼ぶ)、恒等的に 0 でないものを求める。(2) に代入すると $X'(0)T(t)=X(1)T(t)=0$ $(t\in(0,\infty))$. これから

$$X'(0)=X(1)=0. \tag{5}$$

実際、例えば $X'(0)\neq 0$ とすると、$T(t)=0$ $(t\in(0,\infty))$, したがって $u(x,t)=0$ $(x\in[0,1]$, $t\in(0,\infty))$ が成り立ち、連続性から $u\equiv 0$ となり、条件に反する。ゆえに $X'(0)=0$. 同様にして $X(1)=0$.

つぎに (1) に代入して、整理すると

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{T(t)}-k.$$

この式の左辺は t によらず、右辺は x によらないので、実は定数である。それを λ とおくと、

$$X''(x) = \lambda X(x), \tag{6}$$

$$T'(t) = (k+\lambda)T(t). \tag{7}$$

(6) の特性方程式は $s^2 = \lambda$ で、特性根は $s = \pm\sqrt{\lambda}$.

(i) $\lambda = 0$ の場合。(6) の一般解は $X(x) = A + Bx$ (A, B は任意定数) であり、(5) に代入すると $A = B = 0$, ゆえに $X \equiv 0$ となり、条件 $u \not\equiv 0$ に反する。

(ii) $\lambda \neq 0$ の場合。(6) の一般解は $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ (A, B は任意定数) であり、(5) に代入すると

$$\sqrt{\lambda}(A-B) = 0, \quad Ae^{\sqrt{\lambda}} + Be^{-\sqrt{\lambda}} = 0.$$

$\lambda \neq 0$ に注意すると $A = B$. ゆえに $A(e^{\sqrt{\lambda}} + e^{\sqrt{\lambda}}) = 0$. もし $A = 0$ ならば $A = B = 0$ より $X(x) \equiv 0$ となり、条件に反する。そこで $A \neq 0$ とすると、$e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$. これから $e^{2\sqrt{\lambda}} = -1$. $e^{-\pi i} = -1$ をかけて $e^{2\sqrt{\lambda}-\pi i} = 1$. ゆえに $\exists n \in \mathbf{Z}$ s.t. $2\sqrt{\lambda} - \pi i = 2n\pi i$ (i は虚数単位). これから

$$\sqrt{\lambda} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad \lambda = -\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2.$$

このとき

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} = A(e^{(n+1/2)\pi ix} + e^{-(n+1/2)\pi ix}) = 2A\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x.$$

$n = p$ と $n = -p-1$ は同じ λ, $X(x)$ を与えるので、$n \geq 0$ だけで十分である。

この λ に対応する $T(t)$ は

$$T(t) = Ce^{(k+\lambda)t} = Ce^{[k-(n+1/2)^2\pi^2]t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

であるから、求める変数分離解として

$$u(x,t) = X(x)T(t) = C'e^{[k-(n+1/2)^2\pi^2]t}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \quad (C' \text{ は任意定数})$$

が得られた。

さて、(1), (2) は線形同次方程式であるから、

$$u(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\left[k-(n+1/2)^2\pi^2\right]t}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x$$

とおくと、u も (1), (2) を満たす。これを (3) に代入すると

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x.$$

$n \geq 0$ に対して、$X_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x$ とおく。また $[0,1]$ 上定義された連続関数 φ, ψ に対して $(\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx$ とおく。

$$\begin{aligned}(X_n, X_m) &= \int_0^1 \cos\left(n + 1/2\right)\pi x \cdot \cos\left(m + 1/2\right)\pi x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\cos(n+m+1)\pi x + \cos(n-m)\pi x\right]dx\end{aligned}$$

であるから、$n \neq m$ のとき、($n - m \neq 0$, $n + m + 1 \neq 0$ に注意すれば)

$$(X_n, X_m) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m+1)\pi x}{(n+m+1)\pi} + \frac{\sin(n-m)\pi x}{(n-m)\pi}\right]_0^1 = 0.$$

また $n = m$ のときは

$$(X_n, X_n) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\cos(2n+1)\pi x + 1\right]\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)\pi} + x\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

ゆえに

$$(f, X_n) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m X_m, X_n\right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (X_m, X_n) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cdot \frac{1}{2}\delta_{nm} = \frac{1}{2}c_n$$

となるので、

$$c_n = 2(f, X_n) = 2\int_0^1 f(x)\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\,dx.$$

(これで (1) 終了。)

(2) 級数の最初の項 $c_1 e^{(k-\pi^2/4)t}\cos(\pi x/2)$ が主要な項であり、

- $k < \frac{\pi^2}{4}$ ならば $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.
- $k = \frac{\pi^2}{4}$ ならば $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = c_1\cos(\pi x/2)$.
- $k > \frac{\pi^2}{4}$, $c_1 > 0$ ならば $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \infty$ $(x \in [0,1))$. ■

コメント

- 熱方程式に類する方程式を解いていて λ が正になるのは変である (高々有限個をのぞいて負になる)。途中で間違えて $e^{\left[k+(n-1/2)^2\pi^2\right]t}$ となっている答案があったが、ここでおかしいと気づく。
- $t \to \infty$ のときの挙動で、場合分けの条件に n が入っている人が多いが、それは明らかにおかしい (一体全体その n は何？)。

2.

(単純な計算問題なので略解ですませます。)

(1) v として y だけの関数で探せば、例えば (目で 2 回積分して) $v(x,y) = -y^3/6$.

(2) 上の v に対して、$w = u - v$ とおくと、w について Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle w = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad w(x,y) = y^3/6 \quad ((x,y) \in \partial\Omega)$$

が得られる。極座標を導入すると

$$\frac{y^3}{6} = \frac{\sin^3\theta}{6} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{24}\left(3\sin\theta - \sin 3\theta\right)$$

であるから、授業で紹介した公式を用いて

$$w = \frac{1}{24}\left(3r\sin\theta - r^3\sin 3\theta\right) = \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}x^2y + \frac{1}{24}y^3.$$

(ここで例えば $r^3\sin 3\theta = \operatorname{Im}\left(r(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^3 = \operatorname{Im}(x+iy)^3 = 3x^2y - y^3$ のような計算をする。無理して結果を x, y で表示しなくてもよい。) ゆえに

$$u(x,y) = w(x,y) + v(x,y) = \frac{y}{8}\left(1 - x^2 - y^2\right). \blacksquare$$

3.

合成関数の微分法から $u_{tt} = c^2U''(ax+by+ct)$, $u_{xx} = a^2U''(ax+by+ct)$, $u_{yy} = b^2U''(ax+by+ct)$ となるので、波動方程式 $(1/c^2)u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ を満たすための条件は[3]

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \text{または} \quad U'' \equiv 0.$$

(後半は略。誰も解けなかったのでネタとして残そう。いわゆる平面波というもので、イメージはあざやかだけど…)

11　2003 年度期末試験

11.1　本試験問題

2004 年 1 月 26 日実施

[3]細かく言うと、$U''(ax+by+ct) = 0$ $(\forall(x,y,t) \in \mathbf{R}^3)$ でなければ (つまり $U''(ax+by+ct) \neq 0$ となる (x,y,t) が一つでもあれば)、$a^2+b^2=1$ であり、そのとき逆に波動方程式が成り立つことは明らか。$c \neq 0$ に注意すれば $U''(ax+by+ct) = 0$ $((x,y,t) \in \mathbf{R}^3)$ と $U'' \equiv 0$ (1 変数関数としての等式) が同値であることは容易に分かる。

1 実定数 k と、十分滑らかな関数 $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ が与えられたとき、初期値境界値問題

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)+ku \quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)) \tag{1}$$
$$u_x(0,t) = u_x(1,t)=0 \quad (t\in(0,\infty)) \tag{2}$$
$$u(x,0) = f(x) \quad (x\in[0,1]) \tag{3}$$

について、以下の問に答えよ。

(1) Fourier の方法で解 u を求めよ (実際に解であることを証明しなくてもよい)。

(2) $t\to\infty$ のとき u はどうなるか？

2 $\mathbf{R}^2$ の円盤領域 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ における Poisson 方程式の境界値問題

$$-\triangle u(x,y)=6x+12y^2 \quad (\text{in } \Omega),\quad u(x,y)=0 \quad ((x,y)\in\partial\Omega) \tag{$\sharp$}$$

について以下の問に答えよ。
(1) $-\triangle v(x,y)=6x+12y^2$ を満たす v を一つ求めよ (**注:** v は一意的には定まらない)。
(2) 境界値問題 ($\sharp$) の解 u を求めよ。— これには (1) の結果が必要だが、もしも (1) が解けない場合は、代りに次の境界値問題を解け。

$$\triangle w(x,y)=0 \quad (\text{in } \Omega),\quad w(x,y)=x^3 \quad ((x,y)\in\partial\Omega).$$

(Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解の公式は証明無しで用いてよい。)

3 波動方程式の初期値境界値問題

$$\text{(WN)}\qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t) & ((x,t)\in(0,1)\times\mathbf{R}),\\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0 & (t\in\mathbf{R}),\\ u(x,0)=\phi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x) & (x\in[0,1]) \end{cases}$$

について以下の問に答えよ。

(1) (WN) を満たす $u\in C^2([0,1]\times\mathbf{R})$ に対して、時刻 $t\in\mathbf{R}$ におけるエネルギー $E(t)$ を

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^1\left[u_t(x,t)^2+u_x(x,t)^2\right]dx$$

で定義するとき、E は (t によらない) 定数関数であることを示せ。

(2) (WN) を満たす $u\in C^2([0,1]\times\mathbf{R})$ はただ一つしかないことを示せ。

(3) $\phi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 1$ のとき、u を求めよ。

11.2　本試験問題解説

1 の略解

(1) もう注意は繰り返さない。

$$u(x,t)=\frac{a_0}{2}e^{kt}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{(k-n^2\pi^2)t}\cos n\pi x,$$

$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

(2) 場合わけをする。

(a) $k<0$ のときは $u(x,t)\to 0$ $(t\to\infty)$.

(b) $k=0$ のときは $u(x,t)\to a_0/2=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ $(t\to\infty)$.

(c) $k>0$ のときは、$a_0\neq 0$ ならば $|u(x,t)|\to\infty$ $(t\to\infty)$. (a_0=0 の場合は書かなくてもよい — 切りがないから。)

$n=0$ に対応する変数分離解 定数 $\times e^{kt}$ を落したり、定数 に間違えたりする人が多かった。$n\in\mathbf{N}$ に対応する 定数 $\times e^{(k-n^2\pi^2)t}\cos n\pi x$ で形式的に $n=0$ と置いたものに等しくなる。

2 の略解

(1) 例えば $v(x,y)=-(x^3+y^4)$ が $-\triangle v=6x+12y^2$ を満たす。(一般解は $v(x,y)=-(x^3+y^4)+1$ 次式 と書いた人もいたけれど、それは嘘です。これ以外に解もあるけれど、それが書けた人はいませんでした。書いた人は間違っていました。)

(2) $w(x,y)=u(x,y)-v(x,y)$ とおくと、w は

$$\triangle w=0 \quad (\text{in }\Omega),\quad w=x^3+y^4 \quad (\text{on }\partial\Omega)$$

を満たします (このことを指摘するだけで半分の点)。後は $W(r,\theta)=w(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおいたとき、

$$\begin{aligned}W(1,\theta)&=\cos^3\theta+\sin^4\theta=\frac14(\cos 3\theta+3\cos\theta)+\frac18(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta)\\&=\frac38+\frac34\cos\theta-\frac12\cos 2\theta+\frac14\cos 3\theta+\frac18\cos 4\theta\end{aligned}$$

から

$$W(r,\theta)=\frac38+\frac34 r\cos\theta-\frac12 r^2\cos 2\theta+\frac14 r^3\cos 3\theta+\frac18 r^4\cos 4\theta.$$

このままでも良いですが、x, y の式に直すのなら

$$\begin{aligned}r^2\cos 2\theta&=\mathrm{Re}\left[(x+iy)^2\right]=x^2-y^2,\\ r^3\cos 3\theta&=\mathrm{Re}\left[(x+iy)^3\right]=\mathrm{Re}\left[x^3+3x^2iy+3xi^2y^2+i^3y^3\right]=x^3-3xy^2,\\ r^4\cos 4\theta&=\mathrm{Re}\left[(x+iy)^4\right]=\mathrm{Re}\left[x^4+4x^3iy+6x^2i^2y^2+4xi^3y^3+i^4y^4\right]\\&=x^4-6x^2y^2+y^4\end{aligned}$$

を用いて

$$w(x,y)=\frac{3}{8}+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\frac{1}{4}(x^3-3xy^2)+\frac{1}{8}(x^4-6x^2y^2+y^4).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= w(x,y)+v(x,y)\\
&= \frac{3}{8}+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\frac{1}{4}(x^3-3xy^2)+\frac{1}{8}(x^4-6x^2y^2+y^4)-(x^3+y^4)\\
&= \frac{3}{8}+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}(x^2-y^2)-\frac{3}{4}(x^3+xy^2)+\frac{1}{8}(x^4-6x^2y^2-7y^4)
\end{aligned}$$

```
oyabun% math
Mathematica 4.0 for Solaris
Copyright 1988-1999 Wolfram Research, Inc.
 -- Motif graphics initialized --

In[1]:= u=3/8+3x/4-(x^2-y^2)/2-3(x^3+x y^2)/4+(x^4-6x^2y^2-7y^4)/8

                   2    2        3      2     4      2  2      4
        3   3 x   -x  + y    3 (x  + x y )   x  - 6 x  y  - 7 y
Out[1]= - + --- + -------- - ------------- + -------------------
        8    4       2             4                  8

In[2]:= D[u,{x,2}]+D[u,{y,2}]

                   2       2       2       2
              -12 x  - 84 y    12 x  - 12 y
Out[2]= -6 x + -------------- + -------------
                    8               8

In[3]:= Simplify[%]

                  2
Out[3]= -6 (x + 2 y )

In[4]:= Quit
```

計算法メモ (1)　$\cos\theta$, $\sin\theta$ の多項式で表わされた境界値を $\cos k\theta$, $\sin k\theta$ の線型結合で表わすには、一般的には Fourier 係数を計算するという手がありますが、あまり要領が良いとはいえないでしょう。この程度の関数ならば、三角関数の倍角の公式や、積を和に直す公式などを使って変形するのが良さそうです。

例えば $\cos^3\theta$ については、3 倍角の公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

を $\cos^3\theta$ について解いたり、複素数の指数関数を用いて

$$
\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}) \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta})+\frac{3}{2}(e^{i\theta}+e^{i\theta})\right] = \frac{1}{4}\left(\cos 3\theta + 3\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

のように計算できます。

$\sin^4\theta$ は半角の公式を 2 回使って、

$$
\begin{aligned}
\sin^4\theta &= \left(\sin^2\theta\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta\right)
\end{aligned}
$$

とするか、やはり複素数の指数関数を用いて

$$
\begin{aligned}
\sin^4\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{3i\theta}e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}-4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}\right)-\frac{4}{2}\left(e^{2\theta}+e^{-2i\theta}\right)+3\right] = \frac{1}{8}\left(\cos 4\theta-4\cos 2\theta+3\right)
\end{aligned}
$$

のように計算できます。

計算法メモ (2)　$r^k\cos k\theta$, $r^k\sin k\theta$ を $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ で表わすには、

$$
r^k\cos k\theta = \mathrm{Re}\left[\left(re^{i\theta}\right)^k\right] = \mathrm{Re}\left[(x+iy)^k\right], \quad r^k\sin k\theta = \mathrm{Im}\left[\left(re^{i\theta}\right)^k\right] = \mathrm{Im}\left[(x+iy)^k\right]
$$

という計算をするのが簡単でしょう。

3 の解答

(1)

$$
E'(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[(u_t)^2+(u_x)^2\right]dx = \int_0^1 u_t u_{tt}+u_x u_{xt}\,dx = \int_0^1 u_t u_{xx}+u_x u_{xt}\,dx.
$$

ところで部分積分をして、$u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$ を代入すると

$$
\int_0^1 u_t u_{xx}\,dx = [u_t u_x]_0^1 - \int (u_t)_x u_x\,dx = -\int_0^1 u_{tx}u_x\,dx
$$

が成り立つので、

$$
E'(t) = -\int_0^1 u_{tx}u_x\,dx + \int_0^1 u_x u_{xt}\,dx = 0.
$$

これから $E(t)$ は定数である。

(2) (WN) を満たす解 u_1, u_2 があったとする。このとき $u = u_1 - u_2$ とおくと、

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) & ((x,t) \in (0,1) \times \mathbf{R}), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & (t \in \mathbf{R}), \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 & (x \in [0,1]) \end{cases}$$

が成り立つ。このエネルギーは

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 u_x(x,0)^2 + u_x(x,0)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 0\,dx = 0.$$

$(u_x)^2 + (u_t)^2 \geq 0$ に注意すると、

$$(u_x)^2 + (u_t)^2 \equiv 0$$

が分かる。これから $u_x \equiv 0$, $u_t \equiv 0$ なので、u は定数。ところが $u(0,0) = 0$ なので、$u(x,t) \equiv u(0,0) = 0$. ゆえに $u_1 = u_2$.

(3) $u(x,t) = t$.

11.3　追試験問題

2004 年 2 月 2 日実施

1　二つの十分滑らかな関数 $f, g\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、波動方程式の初期値境界値問題

(1) $$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in (0,1) \times \mathbf{R})$$

(2) $$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \qquad (t \in \mathbf{R})$$

(3) $$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad (x \in [0,1])$$

について、以下の問に答えよ。

(1) Fourier の方法で解 u を求めよ (実際に解であることを証明しなくてもよい)。

(2) $t \to \infty$ のとき u が有界であるための条件を求めよ。

参考　授業では (2) の代りに $u(0,t) = u(1,t) = 0$ $(t \in \mathbf{R})$ という条件を課した問題で、

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)\sin n\pi x,$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 g(x)\sin n\pi x\,dx$$

という結果を導出した。

2　$\mathbf{R}^2$ の円盤領域 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ における Poisson 方程式の境界値問題

$$-\triangle u(x,y) = 1 \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x,y) = x+y \quad ((x,y) \in \partial\Omega)$$

について以下の問に答えよ。
(1) $v(x,y) = \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)$ とおくとき $\triangle v$ を計算せよ。(2) u を求めよ。
(Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解の公式は証明無しで用いてよい。)

3　連続関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u \quad ((x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)) \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)) \\ u(x,0) &= f(x) \quad (x \in [0,1]) \end{aligned}$$

について以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

(1) 放物境界とは何か。また古典解を定義せよ。(講義で解説した熱方程式の初期値境界値問題 (IBP) と基本的に同じでよい。)

(2) $f(x) \ge 0$ $(x \in [0,1])$ であると仮定する。任意の正数 $T>0$ を取って、$Q_T = [0,1]\times[0,T]$, $m = \displaystyle\min_{(x,t)\in Q_T} u(x,t)$ とおくとき、$m \ge 0$ を示せ。(ヒント: 最小値に到達する点を (x_0,t_0) として、(x_0,t_0) が放物境界上にある場合とそうでない場合で分けて考える。)

(3) この初期値問題の古典解の一意性を証明せよ。

解答 1　(1) Fourier の方法で現れる固有値問題は本試験と同じで、固有値・固有関数は $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $X_n(x) = \cos n\pi x$ $(n=0,1,2,\cdots)$ となる。微分方程式 $T''(t) = \lambda_n T(t)$ の一般解は

$$\begin{array}{ll} A\cos n\pi t + B\sin n\pi t & (n=1,2,3,\cdots) \\ A + Bt & (n=0) \end{array}$$

となる。これが要点で、結果は

$$u(x,t) = \frac{a_0+b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)\cos n\pi x,$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n &= \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^1 g(x)\cos n\pi x\,dx & (n \in \mathbf{N}) \\ 2\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx & (n=0) \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 上で得た級数解で、初項 $a_0/2$ と $\sum$ の部分は有界である。ところが $\dfrac{b_0 t}{2}$ は $b_0 \neq 0$ である限り有界でない。ゆえに周期的であるための必要十分条件は $b_0 = 0$. つまり

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 0.$$

(同次ディリクレ境界条件の場合は解は有界になる。同次ノイマン境界条件の場合はこのようなことが起る。なお、「有界」を「時間について周期的」としても同じことである。)

解答 2

(1)

$$\triangle\, v = v_{xx} + v_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

(2) $w = u + v$ とおくと、

$$\triangle\, w = \triangle\, u + \triangle\, v = -1 + 1 = 0 \quad (\mathrm{in}\ \Omega),$$

$$w(x,y) = x + y + \frac{x^2+y^2}{4} \quad ((x,y) \in \partial\Omega).$$

w は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題だから、講義で説明した公式で解ける。まず

$$\Psi(\theta) = w(\cos\theta, \sin\theta)$$

とおくと、

$$\Psi(\theta) = \cos\theta + \sin\theta + \frac{1}{4}.$$

これから

$$w(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta + r\sin\theta + \frac{1}{4}.$$

ゆえに

$$w(x,y) = x + y + \frac{1}{4}.$$

従って

$$u(x,y) = w(x,y) - v(x,y) = x + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(x^2+y^2).$$

12　2002年度 期末試験

12.1　本試験問題

3A, 3B はいずれか一方を選択する。

1　実定数 k と、十分滑らかな関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、初期値境界値問題

$$
\begin{array}{llcll}
(1) & u_t(x,t) & = & u_{xx}(x,t) + ku & ((x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)) \\
(2) & u(0,t) & = & u(1,t) = 0 & (t \in (0,\infty)) \\
(3) & u(x,0) & = & f(x) & (x \in [0,1])
\end{array}
$$

について、以下の問に答えよ。

(1) Fourier の方法で解 u を求めよ (実際に解であることを証明しなくてもよい)。

(2) $t \to \infty$ のとき u はどうなるか？

2　$\mathbf{R}^2$ の円盤領域 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ における Poisson 方程式の境界値問題

$$
-\triangle u = x \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \partial\Omega)
$$

について以下の問に答えよ。
(1) $-\triangle v = x$ を満たす v を一つ求めよ (v は一意的には定まらない)。
(2) 境界値問題の解 u を求めよ。

3A　3 次元波動方程式

$$
\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}
$$

の解 $u = u(x,y,z,t)$ が、適当な 2 変数関数 w を用いて

$$
u(x,y,z,t) = w(r,t), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}
$$

の形に書けるとしたとき、以下の問に答えよ。

(1) 次の式が成り立つことを示せ: $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = w_{rr} + \dfrac{2}{r}w_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(rw)$.

(2) $v(r,t) := rw(r,t)$ をおくとき、$v(r,t) = f(r-ct) + g(r+ct)$ を満たす関数 f, g が存在することを示せ。

3B　$\mathbf{R}^3$ の有界領域 Ω における 3 次元波動方程式の初期値境界値問題

$$
\begin{array}{rcl}
u_{tt}(x,y,z) & = & \triangle u(x,y,z,t) \quad ((x,y,z,t) \in \Omega \times \mathbf{R}) \\
u(x,y,z,t) & = & 0 \quad ((x,y,z,t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}) \\
u(x,y,z,0) & = & \phi(x,y,z), \quad u_t(x,y,z,0) = \psi(x,y,z) \quad ((x,y,z) \in \overline{\Omega}) \\
 & & (\phi,\, \psi \text{ は十分滑らか、 } \triangle u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})
\end{array}
$$

の解が $U \times \mathbf{R}$ で C^2 級であるとするとき (ただし U は $\overline{\Omega}$ を含むある開集合)、

$$
E(t) := \iiint_\Omega \left[u_t(x,y,z,t)^2 + u_x(x,y,z,t)^2 + u_y(x,y,z,t)^2 + u_z(x,y,z,t)^2\right] dxdydz \quad (t \in \mathbf{R})
$$

は t によらない定数であることを示せ。

12.2　本試験問題解説

1.　(Fourier の方法というのは、奇跡みたいな発見で、残念ながらそれほど単純ではないので、理解したり答案を書くのに苦労しますが、何とか喰らい付いてほしいわけです。「一問だけできれば通るらしい」というような安易な心構えでは困ります。普通の問題 3 つくらいの重要性があると思ってください。)

$v(x,t)=u(x,t)e^{-kt}$ という変数変換をした人が結構いました。もちろん、その後 Fourier の方法で v を求めてもらえば、それでも構いません。

この微分方程式が非同次であると勘違いして、特解を探そうとした人がいましたが、同次方程式です。特解の方法は使えません (使う必要はありません)。

今年は「(1), (2) を満たし、かつ $u(x,t)=X(x)T(t)$ の形をしていて、恒等的に 0 ではない u を求める。」という方針を書いた人が多くて、それは良かった。

$X(0)=X(1)=0$ はさすがにほとんどの人が導けましたが、理由が不完全な人は結構いました。(「恒等的に等しい」$\equiv$ と単なる「等しい」$=$ を混ぜて書く人もいて、それは少し気持ち悪い。$\forall$ などの記号を使って書くのが良いのかもしれません。)

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{T(t)}-k$$

を導いた後、この式の値が定数である理由がいい加減な人がちらほら (左辺と右辺を間違えて、「左辺は x によらず、右辺は t によらず」なんて書いている人が複数いました — 逆ですよ)。

以下、上の式の値を λ として話をします。

$\lambda=0$ のときは、$X(x)\equiv 0$ となってしまい、条件に適さないわけですが、それでも後で $n=0$ に対応する項を書いている人が結構いました。

$\lambda\neq 0$ の場合に $\sqrt{\lambda}=n\pi i$ となるわけですが、n が何であるか書いていない人が多い。ちゃんと

$$\exists n\in\mathbf{Z}\quad \text{s.t.}\quad \sqrt{\lambda}=n\pi i$$

と書いてください。

$$X(x)=Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x}\quad (A,\ B\ \text{は任意定数})$$

から $B=-A,\ \sqrt{\lambda}=n\pi i$ が分かって、

$$X(x)=A(e^{n\pi ix}-e^{-n\pi ix})=2iA\sin n\pi x$$

となるわけですが、$2i$ が落ちていたり、$\cos n\pi x$ になったり、$\sin n\pi ix$ のように複素変数になっていたり (おいおい)、結構色々な間違いをしてくれました。

それから $\lambda\neq 0$ なので $n\neq 0$ ですが (間違えないように)、n と $-n$ で同じ λ と $X(x)$ が得られるので、負の n は捨てて、$n\in\mathbf{N}$ だけで良くなるわけです。そのあたり曖昧な人が結構いました。

第一段で

$$u(x,t)=c_n e^{(k-n^2\pi^2)t}\sin n\pi x\quad (c_n\ \text{は任意定数},\ n\in\mathbf{N})$$

という変数分離解が求まるわけですが、$n=0$ を含めている人がちらほら。

次に講義ノートで言う第二段、これは「(1), (2) は線型同次方程式なので、

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{(k-n^2\pi^2)t}\sin n\pi x$$

とおくと、この u は (1), (2) を満たす。」とわずか 3 行程度ですが、重ね合せの原理の登場する、非常に重要なところです。この u は第一段の u とはまったくの別物であることを理解してください (本当は違う文字を使った方が良いくらいです [4] — 伝統的に同じ文字が使われているので、それに合せましたが)。ですから、「…とおくと」というような表現が適当です。これを

$$\therefore\quad u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{(k-n^2\pi^2)t}\sin n\pi x$$

と書くのはものすごい (ゆるせない) 乱暴です (こういうのは、事前に u が定義済みでないとナンセンスです)。

第三段は c_n を求めるのが目的ですが、ここは最後の講義で配ったプリントと同様で、$X_n(x)=\sin n\pi x$, $(\phi,\psi)=\displaystyle\int_0^1\phi(x)\overline{\psi(x)}dx$ としたときに、

$$(X_n,X_m)=\frac{1}{2}\delta_{nm}\quad(m,\,n\in\mathbf{N})$$

が成り立つことと、

$$(f,X_n)=\left(\sum_{m=1}^{\infty}c_mX_m,X_n\right)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m(X_m,X_n)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\frac{\delta_{mn}}{2}=\frac{1}{2}c_n\quad\text{(プリントに誤植ありました)}$$

ということの二つが要点です。

(今回は Fourier 正弦展開そのものなので、そのことをきちんと指摘してくれれば、結果のみ $c_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx$ でも OK としました。)

2. (1) $v(x,y)=-\dfrac{1}{6}x^3$ は $-\triangle v=x$ を満たします。(探し方として、x だけの関数と考えると、$-v''=x$ だから、積分して $v=-x^3/6+1$ 次式, となります。何か一つだけで良いのだから $v(x,y)=-x^3/6$ で良いでしょう。) もちろん他のものでも OK です。

(2) $w=u-v$ とおくと、

$$\triangle w=0\quad(\text{in }\Omega),\quad w(x,y)=x^3/6\quad(\text{on }\partial\Omega).$$

これから、境界値は

$$\Phi(\theta)=\frac{x^3}{6}=\frac{\cos^3\theta}{6}=\frac{1}{24}(\cos 3\theta+3\cos\theta).$$

(最後に $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ で書くのが大事 [5]。つまりは Fourier 級数展開です。)

[4] ある年度ではそうして説明しましたが、効果が上がったかというとそうでもないので…

[5] $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ を使いました。

Dirichlet 境界値問題の公式を使って ($\cos n\theta$ という項には r^n をかける)、

$$W(r,\theta)=\frac{1}{24}(r^3\cos 3\theta+3r\cos\theta).$$

ゆえに

$$U(r,\theta)=W(r,\theta)+V(r,\theta)=\frac{1}{24}(r^3\cos 3\theta+3r\cos\theta)-\frac{1}{6}(r\cos\theta)^3.$$

このままでも良いですが、x, y で書くためには、$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で書き直す必要があります[6]。

$$U(r,\theta)=\frac{1}{24}\left[r^3(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+3r\cos\theta\right]-\frac{1}{6}(r\cos\theta)^3=\frac{1}{8}(r\cos\theta-r^3\cos\theta).$$

これから

$$u(x,y)=\frac{1}{8}\left[x-(x^2+y^2)x\right]=\frac{x}{8}(1-x^2-y^2).$$

この u は確かに境界値問題の解であることを確かめるのは容易でしょう。■

3A (1) r だけの関数のラプラシアンの計算は、**??** f', f'' を w_r, w_{rr} と読み替えます) に載っているし、講義 (最終回) でもやったので省略します (暇があったら書き足します)。いわゆる合成関数の微分法です。

(2) $v=rw$ は一次元波動方程式 $\dfrac{1}{c^2}v_{tt}=v_{rr}$ を満たすので、ダランベールの公式から $v(r,t)=f(r-ct)+g(r+ct)$ を満たす関数 f, g が存在することが分かります。

3B 簡単だと思うけれど、だれもやってくれませんでした。この際だから、何次元でも通用する書き方で。

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(u_t^2+\nabla u\cdot\nabla u\right)dx\quad(\nabla u=\operatorname{grad}u)$$

なので、積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換) と、積の微分法[7] と、波動方程式の代入と、偏微分の順序交換をして、

$$E'(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2+\nabla u\cdot\nabla u\right)dx=\int_\Omega\left(u_tu_{tt}+\nabla u\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla u\right)dx=\int_\Omega(u_t\triangle u+\nabla u\cdot\nabla u_t)\,dx.$$

Green の公式と、$u=0$ (on $\partial\Omega$) より導かれる $u_t=0$ (on $\partial\Omega$) から、

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla u_t\,dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}u_t\,d\sigma-\int_\Omega\triangle u\,u_t\,dx=-\int_\Omega u_t\triangle u\,dx$$

であるから、

$$E'(t)=\int_\Omega(u_t\triangle u-u_t\triangle u)\,dx=\int_\Omega 0\,dx=0.$$

(波動方程式は本当に微積分の良い例題を提供してくれるな、と思います。) ■

[6]つまり Dirichlet 問題の解の公式を適用するには、$\cos n\theta$, $\sin n\theta$ で書き、x, y で表わすには $\cos^n\theta$, $\sin^n\theta$ で書くわけです。間違えやすい。

[7]1 次元でいうと $(f^2)'=2f'f$ という感じで、$\frac{\partial}{\partial t}(u_t)^2=2u_tu_{tt}$, $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla u\cdot\nabla u)=2\nabla u\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla u$.

12.3 追試験問題

1 実定数 k と、十分滑らかな関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、初期値境界値問題

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad & u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) + ku \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)) \\
&(2) \qquad & u_x(0,t) &= u(1,t) = 0 \qquad (t \in (0,\infty)) \\
&(3) \qquad & u(x,0) &= f(x) \quad (x \in [0,1])
\end{aligned}
$$

について、以下の問に答えよ。(**注意:** 本試験の問題と良く似ているが境界条件が異なる。)

(1) Fourier の方法で解 u を求めよ (実際に解であることを証明しなくてもよい)。(2) $t \to \infty$ のとき u はどうなるか？

2 C^2 級の $f\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ と $n \in \mathbf{N}$ が与えられたとき、$x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ に対して、$u(x)$ を

$$u(x) := f(r), \quad r = |x|$$

で定義する。以下の問に答えよ。

(1) $\triangle u$ を f とその導関数 (f, f', f'') で表わせ。(2) u が $\triangle u(x) = 0$ ($x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$) を満たすとき、$f$ を求めよ。

3 $f, g \in C^2(\mathbf{R})$ が与えられたとき、非同次の波動方程式の初期値問題

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= u_{xx}(x,t) + 1 \quad ((x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}) \\
u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad (x \in \mathbf{R})
\end{aligned}
$$

について以下の問に答えよ。

(1) $v_{tt} = v_{xx} + 1$ の特解 v を一つ求めよ (一意ではない)。(2) 初期値問題の解 u を求めよ。
注意: 波動方程式の <u>初期値問題</u> の解の公式はやや複雑なので、丸暗記したまま使わないこと (暗記で間違えたら点があげられない)。波動方程式 $w_{tt} = w_{xx}$ の一般解に関する d'Alembert の公式 $u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$ は使って良い。

4 講義で取り上げた問題 (H-IBP) を Fourier の方法で解くとき、$X(x)T(t) \not\equiv 0$, $X(0) = X(1) = 0$, そして、

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \qquad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty))$$

から

$$(\star) \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} \qquad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty))$$

を経て

$$(\heartsuit) \qquad \exists \lambda \in \mathbf{C} \quad \text{s.t.} \quad X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{かつ} \quad T'(t) = \lambda T(t) \qquad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty))$$

を導いたが、$(\star)$ の分母が 0 にならないか心配になる人もいるだろう。実は $(\star)$ を経ないで $(\heartsuit)$ を導けることを示せ。

13　2001年度 期末試験

13.1　本試験問題

次の 1〜 4 に答えよ (問 3 は選択問題であり、3A と 3B のいずれか一方のみ解答する)。

1　$f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を十分滑らかな関数、k を実定数とするとき、初期値境界値問題

$$
\begin{aligned}
&(1) & u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) + ku \quad ((x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)) \\
&(2) & u(0,t) &= u(1,t) = 0 \qquad (t \in (0,\infty)) \\
&(3) & u(x,0) &= f(x) \quad (x \in [0,1])
\end{aligned}
$$

について、Fourier の方法で解 u を求めよ (実際に解であることを証明しなくてもよい)。

2　問 1 の初期値境界値問題について以下の問に答えよ。

(1) 古典解を定義し、古典解についての正値性の保存「$f \geq 0 \Longrightarrow u \geq 0$」を証明せよ。(ヒント: $v(x,t) = e^{(-k+1)t}u(x,t)$ とおき、v についての初期値境界値問題を考え、$\displaystyle\min_{(x,t)\in Q_T} v(x,t) \geq 0$ となることを証明する。ただし $Q_T = [0,1]\times[0,T]$) (2) 解の一意性を証明せよ。

3A　円板領域 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2 < 1\}$ における次の境界値問題の解を求めよ。

$$\triangle\, u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \phi(x,y) \quad ((x,y) \in \Gamma := \partial\Omega)$$

(n は Γ の点における Ω の外向き単位法線ベクトルで、ϕ は与えられた連続関数とする。)

3B　Ω は滑らかな境界 Γ を持つ、$\mathbf{R}^2$ の有界領域であり、$f\colon \Gamma \to \mathbf{R}$ は連続関数とする。$X := \{u \in C^2(\overline{\Omega}); u(x) = f(x) \quad (x \in \Gamma)\}$ 上の関数 $J\colon X \to \mathbf{R}$ を次式で定める:

$$J(u) = \iint_\Omega u_x(x,y)^2 + u_y(x,y)^2\, dxdy.$$

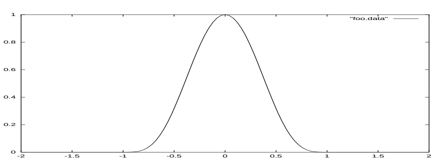
このとき、$u_0 \in X$ が J の最小値を与えるならば、$\triangle\, u_0 = 0$ (in Ω) が成り立つことを示せ。

4　次の波動方程式の初期値問題について、以下の問 (1), (2) に答えよ。

$$
(\mathrm{W}) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) & ((x,t) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}), \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) & (x \in \mathbf{R}) \end{cases}
$$

(1) 定数 c と C^2 級の関数 f を用いて、$u(x,t) := f(x-ct)$ で定義される関数 u が初期値問題 (W) の解であるならば $|c| = 1$ であることを示し、ϕ, ψ を f で表せ。

(2) $\psi(x) \equiv 0$ かつ ϕ のグラフが図のようになっているとき、$t = 4$ のときの u の様子をグラフに描け (関数 $u(\cdot,4) \ni x \mapsto u(x,4)$ のグラフを描け)。



13.2　本試験問題解説

1　ここでは結果のみ示す (宿題よりはむしろ (H-IBP) に近い)。

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(k-n^2\pi^2)t}\sin n\pi x,\quad b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx.$$

2　(略解) (1) 古典解の定義については、(H-IBP) と同様のものでよい。v は

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx}-v \quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)) \\ v(0,t) &= v(1,t)=0 \quad (t\in(0,\infty)) \\ v(x,0) &= f(x) \quad (x\in[0,1]) \end{aligned}$$

を満たすことになる。$f\geq 0$ から $v\geq 0$ が示せれば $u\geq 0$ が言える。任意の $T>0$ を固定して、$Q_T=[0,1]\times[0,T]$ で考える。$\min\limits_{Q_T} v=m<0$ と仮定すると、その最小値を取る点 (x_0,t_0) は Γ_T には含まれないことが分かる。それゆえ微分方程式に代入することができて、

$$v_t(x_0,t_0)=v_{xx}(x_0,t_0)-v(x_0,t_0).$$

左辺 ≤ 0, $v_{xx}(x_0,t_0)\geq 0$, $-v(x_0,t_0)=-m>0$ であるから、右辺 >0 となり、矛盾が導かれる。ゆえに $\min\limits_{Q_T} v\geq 0$ である。T は任意であったから $v\geq 0$.

(2) 略 (簡単)。■

3A　(略解) Fourier の方法を用いる。変数分離解の条件は講義で解説した Dirichlet 境界値問題とまったく同じなので、$\triangle u=0$ を満たす u として、

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

が得られる ($\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は任意定数)。後は境界条件を満たすように a_n, b_n を定めればよいが、領域が原点中心の単位円であることから、$\partial/\partial n=\partial/\partial r$ となることに注意すると、境界条件は

$$\phi(\cos\theta,\sin\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \tag{4}$$

となる。これから

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(\cos\theta,\sin\theta)\cos n\theta\,d\theta,\quad b_n=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(\cos\theta,\sin\theta)\sin n\theta\,d\theta\quad (n\in\mathbf{N}).$$

a_0 が定まらないが、これは任意定数のまま残ってしまう (もともと Neumann 境界値問題においては、解は定数だけの不定さを持つのは明らかである)。■

細かい注意　実は単に ϕ が滑らかなだけでは、この境界値問題は解を持たない。解が存在するためには、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = 0$$

であることが必要である ((4) をにらむと分かる)。これには気が付かなくても減点しない (気が付いたらボーナス点を進呈するが)。■

3B　講義内容そのものなので、??の「汎関数 J を最小にする関数は Laplace 方程式を満たすことの確認」が解答になる。■

4　(略解) (1) まず

$$u_{tt}(x,t) = c^2 f''(x-ct), \quad u_{xx}(x,t) = f''(x-ct)$$

なので、$u_{tt} = u_{xx}$ に代入すると

$$c^2 f''(x-ct) = f''(x-ct) \quad ((x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R})$$

となる。これから $c^2 = 1$.

(2) Stokes の公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x-t) + \phi(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy$$

を覚えていれば、すぐに

$$(☆) \qquad u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x-t) + \phi(x+t))$$

が得られる。これから $u(\cdot, 4)$ のグラフを描くのは簡単である (± 4 に頂を持つ、ϕ を $1/2$ に低くした山を二つ描けばよい)。Stokes の公式を覚えていなくても、(☆) は次のようにして導出できる。適当な関数 f, g を用いて、

$$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$$

と書けるはず (d'Alembert の解)。これから

$$\begin{aligned} \phi(x) &= u(x,0) = f(x) + g(x), \\ 0 = \psi(x) &= u_t(x,0) = -f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

後者から $g(x) = f(x) + C$ (C は定数) が得られ、これを前者に代入して $\phi(x) = 2f(x) + C$. ゆえに $f(x) = (\phi(x) - C)/2$, $g(x) = (\phi(x) + C)/2$. これから、

$$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t) = \frac{\phi(x-t) - C}{2} + \frac{\phi(x+t) + C}{2} = \frac{1}{2}(\phi(x-t) + \phi(x+t)).■$$

14　2000年度 期末試験

14.1　本試験問題

1　f を $[-\pi,\pi]$ 上定義された十分滑らかな実数値関数とするとき、初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) \quad ((x,t)\in(-\pi,\pi)\times(0,\infty)) \\ u(-\pi,t) &= u(\pi,t), \quad u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t) \quad (t\in(0,\infty)) \\ u(x,0) &= f(x) \quad (x\in[-\pi,\pi]) \end{aligned}$$

の解 $u=u(x,t)$ を Fourier の方法で求めよ (実際に解であることを証明しなくてもよい)。

2　連続関数 $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ が与えられたとき、初期値境界値問題

$$u_t = u_{xx}+1 \quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)) \tag{1}$$

$$u(0,t) = 1, \quad u(1,t)=1/2 \quad (t\in(0,\infty)) \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x) \quad (x\in[0,1]) \tag{3}$$

について以下の問に答えよ。

(a) (1), (2) の定常解 (時間によらない特解) v を求めよ。

(b) $t\to\infty$ のとき、u はどうなるか？理由をつけて答えよ。

3　$\mathbf{R}^2$ の単位円板 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ における Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in }\Omega), \quad u(x,y)=2x+x^2y^2 \quad ((x,y)\in\partial\Omega)$$

について以下の問に答えよ。
(1) u を求めよ。(2) 閉円板 $\overline{\Omega}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2\le 1\}$ における u の最大値、最小値を求めよ。

4　波動方程式の初期値境界値問題

$$\text{(W)} \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t) & ((x,t)\in(0,1)\times\mathbf{R}), \\ u(0,t)=u(1,t)=0 & (t\in\mathbf{R}), \\ u(x,0)=\phi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x) & (x\in[0,1]) \end{cases}$$

について以下の問に答えよ。

(1) (W) を満たす $u\in C^2([0,1]\times\mathbf{R})$ に対して、時刻 $t\in\mathbf{R}$ におけるエネルギー $E(t)$ を

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(u_t(x,t)^2+u_x(x,t)^2\right)dx$$

で定義するとき、 E は定数関数であることを示せ。

(2) (W) を満たす $u\in C^2([0,1]\times\mathbf{R})$ はただ一つしかないことを示せ。

(3) $\phi(x)=\sin\pi x\cos\pi x$, $\psi(x)=0$ のとき u を求めよ (結果だけで良い)。

14.2 特別試験問題

1 f を $[0,1]$ 上定義された十分滑らかな実数値関数とするとき、1 次元熱伝導方程式の初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) \quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)) \\ u_x(0,t) &= 0, \quad u(1,t)=0 \quad (t\in(0,\infty)) \\ u(x,0) &= f(x) \quad (x\in[0,1]) \end{aligned}$$

について、以下の問に答えよ。

(1) Fourier の方法で解 $u=u(x,t)$ を求めよ (実際に解であることを証明しなくてもよい)。

(2) $t\to\infty$ とするとき $u(x,t)$ はどうなるか。

2 $\triangle$ を $\mathbf{R}^2$ の Laplacian とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $v(x,y)=(x^2+y^2)^2$ に対して、$\triangle v$ を求めよ。

(2) $\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ とおき、$\partial\Omega$ を Ω の境界とするとき、Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u(x,y)=x^2+y^2 \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x,y)=0 \quad ((x,y)\in\partial\Omega)$$

の解を求めよ (必要があれば Laplace 方程式の解の公式を用いてもよい)。

3 $F\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を C^2 級の関数, c を正の定数とするとき、

$$u(x,y,z,t)=\frac{F(r-ct)}{r}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad ((x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ t\in\mathbf{R})$$

とおくと、u は波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\triangle u \quad ((x,y,z)\neq(0,0,0),\ t\in\mathbf{R})$$

を満たすことを示せ。ただし

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

とする。

15 1999年度 期末試験

15.1 本試験問題

1 f, g を $[0,1]$ 上定義された十分滑らかな実数値関数とするとき、初期値境界値問題

(1) $$u_{tt} = u_{xx} \quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty))$$

(2) $$u(0,t) = u(1,t)=0 \quad (t\in(0,\infty))$$

(3) $$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0)=g(x) \quad (x\in[0,1])$$

の解 $u=u(x,t)$ を Fourier の方法で求めよ (実際に解であることを証明しなくてもよい)。

2　連続関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)) \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)) \\ u(x,0) &= f(x) \quad (x \in [0,1]) \end{aligned}$$

について以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

(1) 放物境界とは何か。また古典解を定義せよ。(講義で解説した熱方程式の初期値境界値問題 (IBP) と基本的に同じでよい。)

(2) $f(x) \geq 0$ ($x \in [0,1]$) であると仮定する。任意の正数 $T > 0$ を取って、$Q_T = [0,1] \times [0,T]$, $m = \displaystyle\min_{(x,t) \in Q_T} u(x,t)$ とおくとき、$m \geq 0$ を示せ。(ヒント: 最小値に到達する点を (x_0, t_0) として、(x_0, t_0) が放物境界上にある場合とそうでない場合で分けて考える。)

(3) この初期値問題の古典解の一意性を証明せよ。

3　次の熱方程式の初期値境界値問題について以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)) \\ u_x(0,t) &= 1, \quad u_x(1,t) = -1 \quad (t \in (0,\infty)) \\ u(x,0) &= 0 \quad (x \in [0,1]) \end{aligned}$$

(1) 古典解 u に対して $J(t) := \displaystyle\int_0^1 u(x,t)\,dx$ とおくとき、$J(t)$ をなるべく簡単な式で表せ。

(2) $v(x,t) := u(x,t) - J(t)$ とおくとき、v はどういう初期値境界値問題の解となるか。

(3) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} v(x,t)$ を求めよ。

4　$\mathbf{R}^2$ の単位円板 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ における Dirichlet 問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x,y) = y^2 \quad ((x,y) \in \partial\Omega)$$

を解け。

16　1998 年度期末試験

16.1　本試験問題

1.　初期値境界値問題

$$\begin{aligned} &(1) & u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)) \\ &(2) & u(0,t) &= 0, \quad u_x(1,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)) \\ &(3) & u(x,0) &= f(x) \quad (x \in [0,1]) \end{aligned}$$

の解を Fourier の方法で求め (解であることを厳密に証明しなくてもよい)、漸近挙動を調べよ。

2. $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ は連続関数で $f \geq 0$ (on $[0,1]$) を満たすとするとき、問題 1 の古典解 u (u は $[0,1] \times [0,\infty)$ で連続、u_x は $(0,1] \times (0,\infty)$ で存在し連続、u_t, u_{xx} は $(0,1) \times (0,\infty)$ で存在し連続、そして u は方程式 (1), (2), (3) を満たす) について考える。

正定数 ε を固定して $w(x,t) := e^{-t}(u(x,t) + \varepsilon a(x,t))$, $a(x,t) := 1 - x(1-x) + 2t$ とおく。

任意の正数 $T > 0$ を固定し、$Q_T := [0,1] \times [0,T]$ とおき、Q_T における w の最小値を $m = u(x_0,t_0)$ ($(x_0,t_0) \in Q_T$) とする。$m \geq 0$ を背理法で示すために、$m < 0$ と仮定する。このとき以下の問 (i), (ii), (iii) に答えよ ((iii) までで矛盾が生じて背理法が完成する。)

(i) $w_t + w = w_{xx}$ (in Q_T) を確かめ、それを用いて $(x_0,t_0) \notin (0,1) \times (0,T]$ であることを示せ。

(ii) 任意の t に対して $w_x(1,t) > 0$ であることを確かめ、$x_0 \neq 1$ であることを示せ。

(iii) $x_0 \neq 0$ であること、$t_0 \neq 0$ であることを示せ。

3. $\mathbf{R}^2$ の円板領域 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ における Poisson 方程式の境界値問題

$$-\triangle u = 1 \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x,y) = x + y \quad ((x,y) \in \partial\Omega)$$

について以下の問に答えよ。

(1) $v(x,y) := \dfrac{1}{4}(x^2 + y^2)$ とおくとき、$\triangle v$ を計算せよ。

(2) $w(x,y) := u(x,y) + v(x,y)$ とおくとき、w はどのような境界値問題の解となるか。

(3) u を求めよ。

4. $u\colon \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \ni (x,y,z) \mapsto u(x,y,z) \in \mathbf{R}$ が C^2 級の 1 変数関数 $f\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ によって

$$u(x,y,z) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

と表わされるとき、以下の問に答えよ。

(1) u_x, u_{xx} を (u を用いず) f を用いて表わせ。

(2) $\triangle u = f''(r) + \dfrac{2}{r} f'(r)$ であることを示せ。

(3) $\triangle u = 0$ (in $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$) であるとき、$u$ を求めよ。

16.2 本試験問題解説

1 初期値境界値問題

$$\begin{aligned}
&(1) & u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)) \\
&(2) & u(0,t) &= 0, \quad u_x(1,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)) \\
&(3) & u(x,0) &= f(x) \quad (x \in [0,1])
\end{aligned}$$

の解を Fourier の方法で求め (実際に解であることを証明しなくてもよい)、漸近挙動を調べよ。

解答　まず微分方程式

$$U_t = U_{xx} \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)) \tag{4}$$

と境界条件

$$U(0,t) = 0, \quad U_x(1,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)) \tag{5}$$

を満たす U で $U(x,t) = X(x)T(t)$ の形をしているもので、恒等的に 0 ではないものを求める[8]。境界条件 (5) より

$$X(0)T(t) = X'(1)T(t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)).$$

これから

$$X(0) = X'(1) = 0 \tag{6}$$

である (もしそうでないならば、任意の t に対して $T(t) = 0$、従って $U \equiv 0$ となり、U が恒等的に 0 でないという仮定に反してしまう)。一方微分方程式 (4) から

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)).$$

ゆえに

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)).$$

この式の値は、左辺を見ると x によらないことがわかり、右辺を見ると t によらないことが分かるので定数である。それを λ とおくと、

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty))$$

から

$$T'(t) = T(t), \tag{7}$$

さらに

$$X''(x) = \lambda X(x). \tag{8}$$

まず X を求める。(8) は定数係数線型常微分方程式だから特性根の方法で一般解が求まる。特性方程式は

$$s^2 = \lambda$$

であるから、特性根は

$$s = \pm\sqrt{\lambda}.$$

(重根とそうでない場合で場合分けをする。)

[8] 当面、初期条件は無視して考えるということで、与えられた問題とは違う問題の解を求めることになっているので、大文字 U を使って区別することにしたが、**自分で理解しているのならば**、他の多くの本や講義ノートと同様に小文字の u のままにしても構わない (その方がほんの少し短く書けるであろう)。

1. $\lambda = 0$ の場合。(8) の一般解は
$$X(x) = Ax + B \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$
境界条件 (6) から $A = B = 0$ が分かり、
$$X(x) \equiv 0.$$
これは $U \not\equiv 0$ という仮定に反する。

2. $\lambda \neq 0$ の場合。(8) の一般解は
$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$
境界条件 (6) から
$$A + B = 0, \quad \sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}} - Be^{-\sqrt{\lambda}}) = 0.$$
これから
$$B = -A, \quad A\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0.$$
もし $A = 0$ ならば $B = 0$, ゆえに $X \equiv 0$ となり、やはり $U \not\equiv 0$ に反する。したがって $A \neq 0$ とすると
$$e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}} = 0.$$
すなわち
$$e^{2\sqrt{\lambda}} = -1.$$
これから
$$2\sqrt{\lambda} = (2n-1)\pi i \quad (n \in \mathbf{Z}).$$
ただし i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表わす。ゆえに
$$\sqrt{\lambda} = (n - 1/2)\pi i \quad (n \in \mathbf{Z}).$$
ゆえに
$$X(x) = A(e^{(n-1/2)\pi i x} - e^{(n-1/2)\pi i x}) = 2Ai\sin(n-1/2)\pi x.$$
A が任意定数であることに注意すれば、n と $1-n$ に対する X, λ は同じものを表わすことが分かるので、n として $n \in \mathbf{N}$ なるものを取れば十分である。つまり解は
$$\lambda = \lambda_n := -(n-1/2)^2\pi^2, \quad X(x) = X_n(x) := C\sin(n-1/2)\pi x \quad (n \in \mathbf{N})$$
となる (ここで C は任意定数)。

次に $T = T(t)$ を決定する。$\lambda = \lambda_n$ のとき、
$$T(t) = T_n(t) := De^{\lambda_n t} \quad (D \text{ は任意定数}).$$
こうして、条件を満たす U として
$$U_n(x,t) = c_n e^{-(n-1/2)^2\pi^2 t}\sin(n-1/2)\pi x \quad (n \in \mathbf{N},\ c_n \text{ は任意定数})$$

が得られた。

(4) と (5) はともに線型同次方程式であるから、

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-(n-1/2)^2\pi^2 t}\sin(n-1/2)\pi x$$

とおくと、u も同じ方程式の解である、つまり u は (1), (2) を満たすことが期待される。c_n をうまく選んで初期条件 (3) を満たすように、つまり

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n-1/2)\pi x=f(x)\quad(x\in[0,1]) \tag{9}$$

が成り立つようにする。

そのために

$$\int_0^1 X_n(x)X_m(x)\,dx=\frac{1}{2}\delta_{nm}\quad(n,\,m\in\mathbf{N})$$

に注意する (例えば計算で証明できるが、ここでは省略する — 試験では省略してはいけない)。任意の $m\in\mathbf{N}$ を取って、(9) の両辺に $X_m(x)$ をかけて $[0,1]$ で積分すると

$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n-1/2)\pi x\right)X_m(x)\,dx=\int_0^1 f(x)X_m(x)\,dx.$$

項別積分を認めれば

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_0^1 X_n(x)X_m(x)\,dx=\int_0^1 f(x)X_m(x)\,dx.$$

これから

$$\frac{1}{2}c_m=\int_0^1 f(x)X_m(x)\,dx.$$

ゆえに

$$c_m=2\int_0^1 f(x)X_m(x)\,dx.$$

まとめると、

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-(n-1/2)^2\pi^2 t}\sin(n-1/2)\pi x,\quad c_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n-1/2)\pi x\,dx\quad(n\in\mathbf{N}).$$

こうして得られた式から

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0$$

が分かる。

2　f は連続関数で $f \geq 0$ (on $[0,1]$) を満たすとするとき、問題 1 の古典解 u (u は $[0,1]\times[0,\infty)$ で連続、u_x は $(0,1]\times[0,\infty)$ で存在し連続、u_t, u_{xx} は $(0,1)\times(0,\infty)$ で存在し連続、そして u は方程式 (1), (2), (3) を満たす) について考える。

正定数 ε を固定して $w(x,t) := e^{-t}(u(x,t)+\varepsilon a(x,t))$, $a(x,t) := 1-x(1-x)+2t$ とおく。

任意の正数 $T>0$ を固定し、$Q_T := [0,1]\times[0,T]$ とおき、Q_T における w の最小値を $m = u(x_0,t_0)$ ($(x_0,t_0)\in Q_T$) とする。$m \geq 0$ を背理法で示すために、$m<0$ と仮定して以下の (i), (ii), (iii) に答えよ ((iii) までで矛盾が生じて背理法が完成する。以下 $\varepsilon\downarrow 0$ とすると $u \geq 0$ であることが分かる。)。

(i) $w_t + w = w_{xx}$ (in Q_T) を確かめ、それを用いて $(x_0,t_0)\notin(0,1)\times(0,T]$ であることを示せ。

(ii) 任意の t に対して $w_x(1,t)>0$ であることを確かめ、$x_0 \neq 1$ であることを示せ。

(iii) $x_0\neq 0$ であること、$t_0 \neq 0$ であることを示せ。

解答

(i) まず $a_t(x,t)=2$, $a_{xx}(x,t)=2$ であるから、a は熱方程式 $a_t = a_{xx}$ を満たす。ゆえに関数 $v(x,t) := u(x,t)+\varepsilon a(x,t)$ も熱方程式を満たす。$w(x,t)=e^{-t}v(x,t)$ に注意すると

$$w_t = -e^{-t}v(x,t)+e^{-t}v_t(x,t), \quad w_{xx} = e^{-t}v_{xx}(x,t).$$

これから

$$w_t+w-w_{xx} = -e^{-t}v(x,t)+e^{-t}v_t(x,t)+e^{-t}v(x,t)-e^{-t}v_{xx}(x,t) = e^{-t}(v_t(x,t)-v_{xx}(x,t)) = 0.$$

ゆえに

$$w_t + w = w_{xx}. \tag{10}$$

$(x_0,t_0)\notin(0,1)\times(0,T]$ を背理法で証明するため、$(x_0,t_0)\in(0,1)\times(0,T]$ と仮定する。t_0 を固定して x だけの関数と考えると、内点 x_0 で最小値を取ることから $w_x(x_0,t_0)=0$, $w_{xx}(x_0,t_0)\geq 0$ (もしこれが負の値をとれば狭義の極大となり矛盾する). 一方 x_0 を固定して t だけの関数として考えると、$t_0\in(0,T]$ で最小値を取ることから $w_t(x_0,t_0)\leq 0$ である (そうでないと t_0 の近傍で増加関数なので最小性に矛盾する)。一方 $w(x_0,t_0)=m<0$ である (背理法の仮定)。以上から (10) の左辺は負、右辺は 0 以上となり、矛盾が導かれる。

(ii) $a_x(x,t) = -1+2x$ であるから $a_x(1,t)=1$. ゆえに

$$w_x(x,t) = e^{-t}(u_x(x,t)+\varepsilon a_x(x,t))$$

に $x=1$ を代入すると $w_x(1,t)=e^{-t}(0+1)=e^{-t}>0$. これから $x=1$ の近傍で $w(\cdot,t)$ は増加関数であることがわかるので (t は固定して x だけの関数として考えている)、特に $w(\cdot,t_0)$ は $x=1$ で最小になることはありえない。ゆえに $x_0\neq 1$.

(iii) $w(0,t_0) = e^{-t_0}(u(0,t_0)+\varepsilon a(0,t_0)) = e^{-t_0}(0+\varepsilon(1+2t_0)) = \varepsilon e^{-t_0}(1+2t_0) > 0$ であり、$w(x_0,t_0)=m<0$ であるから $x_0\neq 0$. また $w(x_0,0)=f(x_0)\geq 0$ (仮定), $w(x_0,t_0)=m<0$ (仮定) から $t_0\neq 0$. ■

3　$\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$ における Poisson 方程式の境界値問題

$$-\triangle u = 1 \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x,y) = x+y \quad ((x,y)\in\partial\Omega)$$

について以下の問に答えよ。

(1) $v(x,y) := \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)$ とおくとき、$\triangle v$ を計算せよ。

(2) $w(x,y) := u(x,y)+v(x,y)$ とおくとき、w はどのような境界値問題の解となるか。

(3) u を求めよ。

解答

(1)

$$\triangle v = v_{xx}+v_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}v_x + \frac{\partial}{\partial y}v_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

(2)

$$\triangle w = \triangle u + \triangle v = -1+1 = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$
$$w(x,y) = x+y+\frac{x^2+y^2}{4} \quad ((x,y)\in\partial\Omega).$$

(3) w は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題だから、講義で説明した公式で解ける。まず

$$\Psi(\theta) = w(\cos\theta, \sin\theta)$$

とおくと、

$$\Psi(\theta) = \cos\theta+\sin\theta+\frac{1}{4}.$$

これから

$$w(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta + r\sin\theta + \frac{1}{4}.$$

ゆえに

$$w(x,y) = x+y+\frac{1}{4}.$$

従って

$$u(x,y) = w(x,y)-v(x,y) = x+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(x^2+y^2).$$

4　$u\colon \mathbf{R}^3\setminus\{0\} \ni (x,y,z) \mapsto u(x,y,z) \in \mathbf{R}$ が 1 変数関数 $f\colon (0,\infty)\to\mathbf{R}$ によって

$$u(x,y,z) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

と表わされているとするとき、以下の問に答えよ。

(1) u_x, u_{xx} を (u を用いず) f を用いて表わせ。

(2) $\triangle u = f''(r)+\dfrac{2}{r}f'(r)$ であることを示せ。

(3) $\triangle u = 0$ (in $\mathbf{R}^3\setminus\{0\}$) であるとき、$u$ を求めよ。

解答

(1)
$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=\frac{1}{2}\cdot 2x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}=\frac{x}{r}.$$

であるから

$$u_x=\frac{\partial}{\partial x}f(r)=f'(r)\frac{x}{r}.$$

$$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)\frac{x}{r}\right)=f''(r)\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{x}{r}+f'(r)\frac{r\cdot 1-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)$$

(2)
$$u_{yy}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right),$$
$$u_{zz}=f''(r)\frac{z^2}{r^2}+f'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right),$$

であるから

$$\begin{aligned}\triangle u &= u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}+f'(r)\left(\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right)\\ &= f''(r)+f'(r)\left(\frac{3}{r}-\frac{1}{r}\right)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r).\end{aligned}$$

(3) 上の結果から

$$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0.$$

簡単のため $g=f'$ とおくと

$$g'(r)+\frac{2}{r}g(r)=0$$

となる。これは

$$\frac{g'(r)}{g(r)}=\frac{-2}{r}$$

と変数分離形であるから、

$$\log|g(r)|=-2\log r+\log C \quad (C \text{ は任意の正定数}).$$

ゆえに

$$g(r)=\pm\frac{C}{r^2}=\frac{C'}{r^2} \quad (C'=\pm C \text{ とおいた})$$

もう一度積分して

$$f(r)=-\frac{C'}{r}+D \quad (D \text{ は任意定数}).$$

すなわち

$$u(x)=\frac{A}{|x|}+B \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).\blacksquare$$

17　1997 年度期末試験

17.1　本試験問題

1.　次の熱方程式の初期値境界値問題について、以下の問 (1), (2) に答えよ。

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)) \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 \quad (t \in (0,1)) \\ u(x,0) &= f(x) \quad (x \in [0,1]). \end{aligned}$$

(1) $f \in C[0,1]$ が与えられたとき、Fourier の方法で解 $u = u(x,t)$ を求めよ。 (2) 特に $f(x) = \cos^3 \pi x$ のとき、$u = u(x,t)$ を求めよ。

2.　k を実定数とするとき、次の初期値境界値問題について、以下の問 (1), (2), (3), (4) に答えよ。

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + ku \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)) \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \quad (t \in (0,1)) \\ u(x,0) &= f(x) \quad (x \in [0,1]). \end{aligned}$$

(1) $f \in C[0,1]$ が与えられたとき、変数変換 $v(x,t) = e^{-kt}u(x,t)$ を用いて、解 u を求めよ。(2) 正値性の保存 $f \geq 0 \Longrightarrow u \geq 0$ は成り立つか?理由をつけて答えよ。(3) $t \to \infty$ のとき、u の漸近挙動はどうなるか? (4) 初期条件 f が左右対称である、すなわち $f(x) = f(1-x)$ $(x \in [0,1])$ を満たすならば、u も左右対称である、すなわち $u(x,t) = u(1-x,t)$ $((x,t) \in [0,1] \times (0,\infty))$ が成り立つことを示せ。

3.　(1) $\mathbf{R}^2$ における Laplacian $\triangle$ を極座標 (r,θ) で表示せよ。 (2) 平面から原点を除いた領域 $\mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$ において調和な関数 u が、θ にはよらず r だけの関数になっているならば、$u(x,y) = C \log \sqrt{x^2+y^2} + C'$ の形をしていることを示せ。

4.　$\Omega = \{(x,y); x^2+y^2 < 1\}$ における次の Dirichlet 問題について、以下の問に答えよ。

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0 \quad (\text{in } \Omega) \\ u(x,y) &= y/4 + y^3 \quad ((x,y) \in \partial\Omega) \end{aligned}$$

(1) この問題の解を求めよ (解の公式を用いてよい)。 (2) 原点を中心とする半径 1/2 の閉円板 $\{(x,y); x^2+y^2 \leq 1/4\}$ における u の最大値、最小値を求めよ。

5.　非同次 Neumann 境界条件を課した次の問題について、以下の問に答えよ。

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)) \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 1 \quad (t \in (0,1)) \\ u(x,0) &= f(x) \quad (x \in [0,1]). \end{aligned}$$

(1) $t \to \infty$ のときの u の漸近挙動を調べよ。 (2) 境界条件を $u_x(0,t) = 2$, $u_x(1,t) = 1$ に変更すると、$t \to \infty$ のときの u の漸近挙動はどうなるか？

17.2 本試験問題解説

1. (1) (略解) 方程式に番号をふっておく。

$$
\begin{aligned}
&(11) & u_t &= u_{xx} \quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)) \\
&(12) & u_x(0,t) &= u_x(1,t)=0 \quad (t\in(0,1)) \\
&(13) & u(x,0) &= f(x) \quad (x\in[0,1]).
\end{aligned}
$$

(解き始める前に (11), (12) が同次方程式であることを目で確かめておく。) まず (11), (12) の解で

$$
(14) \qquad u(x,t)=\zeta(x)\eta(t)
$$

の形をしているもの (変数分離解と呼ぶ) をすべて求める。恒等的に 0 であるものは条件を満たすが、そうでないもの (非自明解と呼ぶ) を探すことにする。

(14) を (12) に代入すると

$$
\zeta'(0)\eta(t)=\zeta'(1)\eta(t)=0 \quad (t>0).
$$

これから

$$
(15) \qquad \zeta'(0)=\zeta'(1)=0.
$$

(もしそうでないとすると $\eta\equiv 0$ となり $u\equiv 0$. これは非自明解を探すという方針に反する。)

(14) を (11) に代入すると

$$
\zeta(x)\eta'(t)=\zeta''(x)\eta(t) \quad (0<x<1,\ t>0).
$$

$$
\frac{\eta'(t)}{\eta(t)}=\frac{\zeta''(x)}{\zeta(x)} \quad (0<x<1,\ t>0).
$$

この等式の値は左辺を見ると x によらず、右辺を見ると t によらないので定数である。それを λ とおくと、

$$
(16) \qquad \eta'(t)=\lambda\eta(t) \quad (t>0).
$$

$$
(17) \qquad \zeta''(x)=\lambda\zeta(x) \quad (0<x<1).
$$

(16) はすぐに解ける:

$$
(18) \qquad \eta(t)=Ce^{\lambda t} \quad (C\ \text{は任意定数}).
$$

以下 (17), (15) を満たす ζ で恒等的に 0 でないものを求める。

(17) の特性方程式は $s^2=\lambda$ で、特性根は $s=\pm\sqrt{\lambda}$. 重根の場合とそうでない場合で場合分けする。

(i) $\lambda = 0$ の場合　(17) の一般解は $\zeta(x) = A + Bx$ (A, B は任意定数). (15) から $B = 0$. ゆえに $\zeta(x) = A$.

(ii) $\lambda \neq 0$ の場合　(17) の一般解は

$$\zeta(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

(15) に代入して

$$\sqrt{\lambda}(A - B) = 0, \quad \sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}} - Be^{-\sqrt{\lambda}}) = 0.$$

$\lambda \neq 0$ に注意して

$$A = B, \quad A(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0.$$

もし $A = 0$ ならば $A = B = 0$, $\zeta \equiv 0$ となり非自明解を求める方針に反するので $A \neq 0$. ゆえに

$$e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}} = 0.$$

これから (途中省略 — 以前に解いた Dirichlet 境界条件の場合と同様)

$$\lambda = -n^2\pi^2, \quad \zeta(x) = 2A\cos n\pi x \quad (n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0).$$

絶対値が同じで、符号だけ異なる n が同じ λ, ζ を与えるので、 $n \in \mathbf{N}$ だけ取れば十分である。

(i), (ii) をまとめると、

$$\lambda = -n^2\pi^2, \quad \zeta(x) = A\zeta_n(x), \quad \zeta_n(x) := \cos n\pi x \quad (A \text{ は任意定数}, n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{19}$$

ゆえに (11), (12) の変数分離解は、(18) の η, (19) の ζ の積として

$$u(x,t) = a_n e^{-n^2\pi^2 t}\zeta_n(x) \quad (a_n \text{ は任意定数}; n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と求まる。

(11), (12) が同次方程式であることから、こうして求まった変数分離解の和

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_0\zeta_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t}\zeta_n(x)$$

も (11), (12) の解であることが期待される (重ね合わせの原理)[9]。

後は初期条件 (13) が満たされるように $\{a_n\}$ を決定する。(13) に代入すると

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0\zeta_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1). \tag{20}$$

$[0,1]$ 上定義された関数の内積を

$$(\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx \quad (\text{— は共役複素数を表す})$$

[9] ここで $n = 0$ の項に 1/2 をつけるのは、最後の結果で a_n を $n \geq 1$ の場合と $n = 0$ の場合で共通の式で表すためである。

で定義すると、直交性

$$(\zeta_j, \zeta_k) = 0 \quad (j \neq k)$$

が成り立つ (ここでは証明を略する)。さらに

$$(\zeta_0, \zeta_0) = \int_0^1 dx = 1, \quad (\zeta_j, \zeta_j) = \int_0^1 \frac{1 + \cos 2j\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \quad (j = 1, 2, \cdots).$$

(20) に ζ_j をかけて積分すると

$$(f, \zeta_j) = \frac{a_0}{2}(\zeta_0, \zeta_j) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\zeta_n, \zeta_j).$$

$j = 0$ の場合 $(f, \zeta_0) = (a_0/2) \cdot 1$ より $a_0 = 2(f, \zeta_0)$. $j \geq 1$ の場合 $(f, \zeta_j) = a_j \cdot (1/2)$ より $a_j = 2(f, \zeta_j)$.

ゆえに

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t} \cos n\pi x, \quad a_n = 2\int_0^1 f(x) \cos n\pi x \, dx \quad (n = 0, 1, \cdots).\blacksquare$$

(2) 初期条件 f は

$$f(x) = \cos^3 \pi x = \frac{3}{4}\cos \pi x + \frac{1}{4}\cos 3\pi x,$$

のように Fourier 級数展開されるので、

$$u(x,t) = \frac{3}{4} e^{-\pi^2 t} \cos \pi x + \frac{1}{4} e^{-9\pi^2 t} \cos 3\pi x.$$

2. (1) v は

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} \quad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)) \\ v(0,t) &= v(1,t) = 0 \quad (t \in (0,1)) \\ v(x,0) &= f(x) \quad (x \in [0,1]). \end{aligned}$$

を満たす。これは講義で扱った問題 (IBP) なので、解の公式より

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x, \quad b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

これから

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(k - n^2\pi^2)t} \sin n\pi x, \quad b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

(2) (IBP) についての正値性の保存から、$f \geq 0$ ならば $v \geq 0$. ゆえに $u \geq 0$.

(3) $k < \pi^2 \implies \lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0.$

$k = \pi^2 \implies \lim_{t\to\infty} u(x,t) = a_1 \sin \pi x.$

$k > \pi^2 \implies a_1 \neq 0$ のとき $\lim_{t\to\infty} |u(x,t)| = \infty.$

(4) $w(x,t) = u(1-x,t)$ は u と同じ問題の解。これは (2) から、一意な解しか持ち得ない。ゆえに $u = w$. すなわち $u(x,t) = u(1-x,t)$. これは u が $x = 1/2$ について対称なことを示している。

3.　(1)

$$\triangle U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}.$$

(2) $U(x,y) = f(r)$ とすると、

$$f'' + \frac{1}{r}f' = 0.$$

$f' = g$ とおくと

$$\frac{g'}{g} = -\frac{1}{r}$$

より

$$\log|g| = -\log r + C$$

より

$$g = \pm\frac{e^C}{r} = \frac{C'}{r}.$$

ゆえに

$$f = C'\log r + C.\blacksquare$$

4.　(1) まず境界条件は

$$U(1,\theta) = \frac{1}{4}\sin\theta + \sin^3\theta = \frac{\sin\theta}{4} + \frac{1}{4}(\sin 3\theta - \sin 3\theta) = \sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

のように Fourier 級数展開されるので

$$u(x,y) = U(r,\theta) = r\sin\theta - \frac{r^3}{4}\sin 3\theta = y - \frac{1}{4}(3x^2y - y^3).$$

17.3　特別試験問題

以下の 5 問の中から 3 問を選択して解答せよ。

1.　次の熱方程式の初期値境界値問題について、以下の問に答えよ。(ただし、f は与えられた C^1 級の関数とする)。

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) && ((x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)) \\ &u(0,t) = u_x(1,t) = 0 && (t \in (0,\infty)) \\ &u(x,0) = f(x) && (x \in [0,1]). \end{aligned}$$

(1) Fourier の方法で解を求めよ。(2) 境界条件を $u(0,t) = 1$, $u_x(1,t) = -1$ で置き換えた場合に、$t \to \infty$ のときの解 u の漸近挙動を調べよ。

2.　$u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbf{R}$ が C^2 級の関数で、$\mathbf{R}^2$ 上 $u_{tt} = u_{xx}$ を満たすとするとき、以下の問に答えよ。(1) 変数変換 $X = x - t$, $Y = x + t$, $u(x,t) = U(X,Y)$ により $U\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を定義するとき、$\dfrac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} = 0$ が成り立つことを示せ。(2) $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$ を満たす関数 f, g が存在することを示せ。

3. (1) $\mathbf{R}^2$ における Laplacian $\triangle$ を極座標 (r,θ) で表示せよ。(2) $\mathbf{R}^2$ 全体で調和な関数 u が n 次同次、すなわち

$$u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n u(x,y) \quad (\lambda > 0,\, (x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

であるとき、u を求めよ (結果は極座標で表示するだけでよい)。

4. k を実定数とするとき、次の初期値境界値問題について、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ ($f \in C[0,1]$ は与えられた関数とする)。

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) + k u_x(x,t) && ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)) \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 && (t \in (0,\infty)) \\ u(x,0) &= f(x) && (x \in [0,1]). \end{aligned}$$

(1) $v(x) = e^{kx/2} u$ と変数変換すると、v はどういう初期値境界値問題の解となるか調べよ。(2) v を求めよ (Fourier の方法を用いても良いし、変数変換で良く知られた問題に帰着させて解いても良い)。(3) u を求めよ。

5. $\Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 < 1\}$ における次の Dirichlet 問題について、以下の問に答よ。

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0 && (\text{in } \Omega) \\ u(x,y) &= y/4 + y^3 && ((x,y) \in \partial\Omega) \end{aligned}$$

(1) この問題の解を求めよ (解の公式を用いてよい)。(2) 原点を中心とする半径 1/2 の閉円板 $\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1/4\}$ における u の最大値、最小値を求めよ。