

微分方程式2 レポート課題2

桂田 祐史

2013年11月25日, 2014年1月5日, 1月6日 (解説 Ver. 2)

締切は12月20日(金) 16:00, 提出先は数学科資料室(6607)。A4レポート用紙を用いること。学生同士で相談しても、教員に質問しても構わない(むしろ推奨する)が、最後は自力でレポートを書くこと。添削の上で返却するが、授業最終回までにそれを受け取る必要条件(提出のみは減点する)。

課題2 実定数 k と $f(1) = 0$ を満たす連続関数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ が与えられたとき、熱方程式の初期値境界値問題

$$(HE) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + ku(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)),$$

$$(BC) \quad u_x(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)),$$

$$(IC) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

について、以下の(1), (2)に答えよ。

(1) (HE), (BC), (IC) を満たす $u = u(x, t)$ を、Fourier の方法を用いて求めよ。実際に解になっていることを証明しなくても良い。

(2) $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ のとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ を求めよ (k で場合分けすることになる)。

注意 ある固有値問題を解くことになるが、得られた固有関数が確かに条件を満足することを検算せよ(間違えたまま計算をすると時間の浪費なので)。

おまけ(勉強の仕方) 期末試験に必ず出題する Fourier の方法であるが、採点すると半分も得点出来ない人が多い。この問題は、「正解」と字数で98%一致していても0点ということがあり得る。証明問題ではないが、論理が重要で(期末試験では、結果が間違っているでも合格点、結果が合っているでも点が伸びないということがある)、結局内容を理解する以外の道はない。解答に際しては何を参考にしても良いが、「見ながら写す」のだけは意味がない。最後は自分の言葉で書いて、添削されたものを受け取り、復習すること。

第2章の演習問題(10/28配布, WWWにも置いてある)の問題8(授業時間中にも取り上げた)は、ある程度自分で解いてみることに。

微分方程式が普通の熱方程式 $u_t = u_{xx}$ でなく、 $u_t = u_{xx} + ku$ となっているが、熱方程式の場合と同様にして解くことも出来るし、変数変換 $v(x, t) := e^{-kt}u(x, t)$ を施して簡単にしてから解くことも出来る。

ちなみに昨年度のレポート課題2は、熱方程式でなく、波動方程式 $\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx}$ で同様のことをしなさい、という問題であった。

1次元熱方程式、波動方程式に対する Fourier の方法の問題のバラエティは、以上でほぼ全部である(これらが理解出来れば、後は期末試験前に少し復習するだけで済むだろう)。

(2014年1月6日)

解説

(1) (Step1) (HE) と (BC) を満たす u で、

$$(1) \quad u(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$$

の形をしていて¹、条件

$$(2) \quad u \neq 0$$

を満たす²ものをすべて求める。

注意

(IC) を除外して、代わりに (1) を課しているわけで、この Step 1 での u は、解こうとしている問題“(HE), (BC), (IC)”の解では**ない**。この u は (HE), (BC) の変数分離解と呼ばれる ((IC) が入っていないのは、書き漏らしたわけではない)。

(HE) に (1) を代入すると、

$$\zeta(x)\eta'(t) = \zeta''(x)\eta(t) + k\zeta(x)\eta(t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)).$$

これから

$$\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = \frac{\zeta''(x)}{\zeta(x)} + k.$$

(このまま進めても良いけれど) 移項して

$$\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} - k = \frac{\zeta''(x)}{\zeta(x)}.$$

この等式の値は、左辺を見ると x に依存せず、右辺を見ると t に依存しないので、定数である。それを λ とおくと、 $\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = \lambda + k$ から

$$(3) \quad \eta'(t) = (\lambda + k)\eta(t),$$

$$(4) \quad \zeta''(x) = \lambda\zeta(x).$$

以上の式変形は、分母が 0 になる可能性を考えていないので厳密ではない。期末試験ではこの点は目をつむることにする。厳密な議論は講義ノートに掲載してある (命題 2.6.4)。

一方、(BC) に (1) を代入すると、

$$\zeta'(0)\eta(t) = \zeta(1)\eta(t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)).$$

もしも $\zeta'(0) \neq 0$ とすると $\eta \equiv 0$ となり、 $u \equiv 0$ が導かれ、(2) に矛盾する。ゆえに $\zeta'(0) = 0$ 。同様にして $\zeta(1) = 0$ も得られる:

$$(5) \quad \zeta'(0) = \zeta(1) = 0.$$

(4), (5) と $\zeta \neq 0$ を満たす ζ を求めよう。まず、(4) は定数係数線形常微分方程式であるので、特性根を s とおくと、特性方程式は $s^2 = \lambda$ 。ゆえに $s = \pm\sqrt{\lambda}$ 。特性根が重根であるかどうかで場合分けをする。

¹きちんとすると、 $\zeta: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $\eta: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ は

² $u \equiv 0$ というのは、 $\forall(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty) u(x, t) = 0$ ということの意味する。 $u \neq 0$ はその否定で、 $\exists(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty) u(x, t) \neq 0$ ということになる。

- (i) $\lambda = 0$ のとき。特性根は 0 (重根) で、 $\zeta(x) = A + Bx$ (A, B は任意定数) が (4) の一般解である。(5) に代入すると、

$$B = A + B = 0.$$

これから $A = B = 0$. ゆえに $\zeta \equiv 0$. 条件 $\zeta \neq 0$ に反するので解は存在しない。

- (ii) $\lambda \neq 0$ のとき。特性根 $\pm\sqrt{\lambda}$ は単根で、 $\zeta(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ (A, B は任意定数) が (4) の一般解である。(5) に代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \zeta'(0) = \sqrt{\lambda}(A - B), \\ 0 &= \zeta(1) = Ae^{\sqrt{\lambda}} + Be^{-\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

最初の方方程式から ($\lambda \neq 0$ に注意して) $A = B$. これを二つ目の方程式に代入して

$$A(e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0.$$

もしも $A = 0$ ならば、 $B = 0$, $\zeta \equiv 0$ となり、条件に反するので $A \neq 0$ とする。すると $e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$. これは

$$e^{2\sqrt{\lambda}} = -1$$

と同値である。 $e^{\pi i} = -1$ であるから、

$$e^{2\sqrt{\lambda} + \pi i} = 1.$$

これは (講義中に紹介した命題によって)

$$\exists n \in \mathbf{Z} \quad 2\sqrt{\lambda} + \pi i = 2n\pi.$$

と同値である。すなわち $\sqrt{\lambda} = (n - 1/2)\pi i$. ゆえに

$$\begin{aligned} \lambda &= -(n - 1/2)^2\pi^2, \\ \zeta(x) &= Ae^{(n-1/2)\pi ix} + Ae^{-(n-1/2)\pi ix} = 2A \cos((n - 1/2)\pi x). \end{aligned}$$

この ζ は確かに (4), (5) を満たし、 $A \neq 0$ であれば $\zeta \neq 0$ を満たす。 $k \in \mathbf{N}$ とするとき、 $n = k$ と $n = 1 - k$ は、同じ λ, ζ を与える。実際、

$$-((1 - k) - 1/2)^2\pi^2 = -(k - 1/2)^2\pi^2, \quad \cos[((1 - k) - 1/2)\pi x] = \cos[(k - 1/2)\pi x].$$

ゆえに n の範囲は $n \in \mathbf{N}$ だけで十分である³。

これで ζ を定めることが出来た (同時に λ も求まった)。

η を求めるのは簡単である。(3) 以外に η に関する条件はなく、 $\lambda = -(n - 1/2)^2\pi^2$ のとき、(3) の解は

$$\eta(t) = Ce^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \quad (C \text{ は任意定数}).$$

ゆえに

$$u(x, t) = \zeta(x)\eta(t) = C'e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cos[(n - 1/2)\pi x] \quad (n \in \mathbf{N}, C' \text{ は任意定数}).$$

³この辺をさばる人が多いのだけど…線形代数の基底を求める問題のようなもので、ダブると線型独立でなくなって係数が定まらなくなるし、足りないとい任意の関数が展開できなくなるし、きちんとやる必要がある。線形代数のテストでそこを間違えたら多分その問題は×になるよね。

(Step 2) (HE), (BC) は線形同次方程式であるから、任意の数列 $\{c_n\}$ に対して

$$(6) \quad u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cos [(n-1/2)\pi x]$$

とおくと、 u は (HE) と (BC) を満たす (ただし項別微分が成り立つと仮定する)。

線形同次方程式とは何か分からないのであれば、安全のため、以下のように計算で確認すること。

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cos [(n-1/2)\pi x] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cos [(n-1/2)\pi x] \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cos [(n-1/2)\pi x] \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cos [(n-1/2)\pi x] \\ &= u_{xx}(x, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} (n-1/2)\pi \sin [(n-1/2)\pi x] \Big|_{x=0} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} (n-1/2)\pi \sin 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(1, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cos [(n-1/2)\pi] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

(Step 3) (6) で定めた u が (IC) を満たすとして、 $\{c_n\}$ を定める。 $n \in \mathbf{N}$ に対して、 $\zeta_n(x) := \cos [(n-1/2)\pi x]$ とおき、(6) を (IC) に代入すると

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta_n(x) = f(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

区間 $[0, 1]$ 上で定義された複素数値連続関数 ϕ, ψ に対して、

$$(\phi, \psi) := \int_0^1 \phi(x) \overline{\psi(x)} dx$$

とおくと、 (\cdot, \cdot) は内積の公理を満たす。 $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ はこの内積に関して直交系をなす。実際 $n, m \in \mathbf{N}$, $n \neq m$ とすると、 $n+m-1 \neq 0$ ($\because n+m-1 \geq 1+1-1=1$), $n-m \neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} (\zeta_n, \zeta_m) &= \int_0^1 \cos [(n-1/2)\pi x] \cos [(m-1/2)\pi x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{ \cos [(n+m-1)\pi x] + \cos [(n-m)\pi x] \} dx \\ &= - \left[\frac{\sin [(n+m-1)\pi x]}{(n+m-1)\pi} + \frac{\sin [(n-m)\pi x]}{(n-m)\pi} \right]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

また $2m - 1 \neq 0$ であるから ($\because 2m - 1 \geq 2 \cdot 1 - 1 = 1$)

$$(\zeta_m, \zeta_m) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\cos[(2m-1)\pi x] + 1) dx = \frac{1}{2}.$$

(7) の両辺と ζ_m の内積を考えると、

$$(f, \zeta_m) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta_n, \zeta_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\zeta_n, \zeta_m) = c_m (\zeta_m, \zeta_m) = \frac{c_m}{2}. \quad (\text{きちんと理解すべし!!})$$

ゆえに

$$(8) \quad c_n = 2(f, \zeta_n) = \int_0^1 f(x) \cos[(n-1/2)\pi x] dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

逆に c_n をこの式で定めるとき、(7) が成り立つ。これは「対称な固有値問題の解として得られる関数系 $\{\zeta_n\}$ は完全である」という一般的な定理で保証されるが、証明は難しいので、この授業では証明ぬきで認めることにしてある (特別な場合は実解析 I で学んだ Fourier 級数に関する定理で証明できることもある)。

$\{c_n\}$ の候補が得られたので、上で棚上げにした項別微分が成り立つかどうかを調べることが出来て、「 $t > 0$ の範囲では項別微分が何回でも可能である」という結論が得られるが (講義で紹介した (H-IBP) の場合の証明とまったく同様である)、この問題ではそこまで要求していない (それを「実際に解になっていることを証明しなくても良い」としてある)。

以上をまとめると、

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cos[(n-1/2)\pi x], \quad c_n = \int_0^1 f(x) \cos[(n-1/2)\pi x] dx$$

で定めた u は (HE), (BC), (IC) を満たす。

- (2) $f(x) = \cos \pi x / 2$ (これは $\zeta_1(x)$ であることに注意) のとき、 $c_1 = 1$, $c_n = 0$ ($n \geq 2$) である。これは (8) で計算しても良いが (必要なことは上の問 (1) でやってあるので面倒なことではない: $c_n = 2(f, \zeta_n) = 2(\zeta_1, \zeta_n) = 2 \cdot \frac{1}{2} \delta_{1n} = \delta_{1n}$)、直交系で展開する場合は

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta_n = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \zeta_n \quad \Rightarrow \quad c_n = c'_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

という係数の一意性が成り立つので、理解していればさらっと書くことが出来る。

とにかく

$$u(x, t) = e^{(k-\pi^2/4)t} \cos \frac{\pi x}{2}.$$

これから $t \rightarrow \infty$ のとき

$$u(x, t) = e^{(k-\pi^2/4)t} \cos \frac{\pi x}{2} \rightarrow \begin{cases} 0 & (k < \pi^2/4, x \in [0, 1]) \\ \cos \frac{\pi x}{2} & (k = \pi^2/4, x \in [0, 1]) \\ \infty & (k > \pi^2/4, x \in [0, 1]) \\ 0 & (k > \pi^2/4, x = 1). \blacksquare \end{cases}$$

(その他)

1 厳密さについて

問題 (1) は、計算で得られたものが解であることの証明をするのが難しいので (固有関数の完全性は学んでいない定理に頼っている)、完全に厳密な答が書きにくい。しかし完全性の定理を使うところ以外は極力厳密に議論して欲しい。

より具体的に言うと、固有関数にもれや重複があってはいけないので、計算はかなり注意深くやる必要がある。

2 字の書き方

数学科の学生は将来教員になる人も多いし、字の書き方が変な場合は (字以外の表現が変な場合も)、煙たがられてもツッコミを入れることにしている。

ツッコミを入れられた人は自分で直すように努めて下さい。ギリシャ文字にしても、ローマ字 (英語アルファベット) にしても、ネットで検索すればすぐにお手本が見られる時代なので、割と簡単です (良い時代になったものです)。

3 (1) の書き出しについて

(1) の書き出しを「 $u(x, t) = X(x)T(t)$ とすると」とする人がかなり多い。授業ではそれはかくかくしかじかの理由でまずいから、そうしないで下さいと、少なくとも 2 回は説明しているのだけど…そう書いた人は、忘れん坊か、授業を聴いていないか、そもそも出席しなくてノートも読んでいないかのどれかなんでしょう。

僕個人はある程度書き方が固まっているのだけど、それが読み取れない人もいて (授業を聞いてもらえれば色々説明を補足するので分かると思うけれど、授業を聞き損ねている場合は分からなくても不思議ではないと思う)、そういう人向けに同じことの別表現を二三あげてみる (君達のレポートから)。

$u(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$ の形をした (HE), (BC) の解を求める。定数関数 0 は明らかに条件を満たしている。それ以外をすべて求める。

自分の言葉で明解に書いてあって良いと思います。

(HE), (BC) の変数分離解をすべて求める。定数関数 0 は条件を満たすので、以下ではそれ以外のものを求めるとする。 $u(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$ とおく。

このように「変数分離解」という言葉を使うのもありでしょう (x だけの関数と、 t だけの関数の積の形に表せる、ということを行っているわけですね)。そう言ってあれば「 $u(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$ とおく」というのも筋が通ります。

ドライに条件を列挙した方が結局は分かりやすいかも知れません。そこで

次の 4 つの条件を満たす u をすべて求める。

- (a) u は (HE) を満たす。
- (b) u は (BC) を満たす。
- (c) $u(x, t)$ は x だけの関数と t だけの関数の積の形に表せる。
- (d) $u \neq 0$.

$u(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$ とおく。

4 「恒等的に等しい」という概念について

講義で、 $u(x, t) \equiv 0$ や、 $\zeta(x) \neq 0$ のように、 \equiv, \neq という記号を用いた。この記号の意味は (もちろん) 説明したのだが、身につけていない人が多いので、再度説明する。

(この記号が嫌いならば、自分で書くときは、もちろん無理に使う必要はなくて、日本語で「恒等的に等しい」、「恒等的には等しくない」と書いたり、量称記号 \forall, \exists を使えば良い。でも、読めるようにしておいて下さい。)

ここでの \equiv は、関数として等しい、つまり関数の値が恒等的に等しい、という意味の記号である。つまり $f: X \rightarrow \mathbf{R}, g: X \rightarrow \mathbf{R}$ とするとき、

$$f(x) \equiv g(x) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} f = g \Leftrightarrow \forall x \in X \quad f(x) = g(x).$$

このことの否定は、習慣に従い / (あるいは \) をつけて表す:

$$\begin{aligned} f(x) \not\equiv g(x) &\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} f \neq g \Leftrightarrow \neg(\forall x \in X \quad f(x) = g(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X \quad f(x) \neq g(x). \end{aligned}$$

$\forall x \in X \quad f(x) \neq g(x)$ とは異なる、ということに注意すべきである。

以上のことを $f(x) = g(x)$ や $f(x) \neq g(x)$ と書くのは曖昧であることを理解しよう。 x はすべての値を表すのか、何かある値を表すのかはつきりしない。

Fourier の方法で $u(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$ としたときに、 $u(x, t) \neq 0$ から、 $\zeta(x) \neq 0$ かつ $\eta(t) \neq 0$ が導かれる。ほぼ繰り返しになるが、

$$u(x, t) \neq 0 \Leftrightarrow \exists(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty) \quad u(x, t) \neq 0.$$

$$\zeta(x) \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in [0, 1] \quad \zeta(x) \neq 0,$$

$$\eta(t) \neq 0 \Leftrightarrow \exists t \in [0, \infty) \quad \eta(t) \neq 0.$$

5 良くある重大な間違い

$$e^{2\sqrt{\lambda}} = e^{(2n-1)\pi i} \quad \text{であるから} \quad 2\sqrt{\lambda} = (2n-1)\pi i$$

というようなことをする人がいる。一般化すると

$$F(x) = F(y) \quad \text{であるから} \quad x = y$$

という論法になるが、これが成立するためには F が単射であるなどの条件が必要である。

複素関数としての \exp は単射でないので、この論法を使うことは出来ない。

ここら辺のことが理解してない人も、教員になるのはマズいと思う。

ともあれ $e^z = 1$ や $e^z = -1$ は、要求すればきちんと解けるようにしておいて下さい。

6 もう一つ良くある重大な間違い

Step 2 で

$$\therefore u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

のようなことを書く人が多い。以前説明したのでもう繰り返さないがひどい間違いである (10 点減点)。

7 気になったこと

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \int_0^1 f(x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx \right) e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

のように答を1行で書く人が大勢いた。なぜだろう。だれかの真似？

自分で記号を定義してそれを使うことに慣れて下さい。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(k-(n-1/2)^2\pi^2)t} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

ただし

$$b_n := 2 \int_0^1 f(x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx.$$

として構わないし、こうしておくとも色々 (例えば (2) の答を書くにも) 便利はず。

レポート課題1の解説 (配布したものを少し修正してある) なども、

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/pde/>

で読めるので適宜参考にして下さい。