微分方程式2 レポート課題1

桂田 祐史

2013年10月21日

締切は11月18日(月) 授業開始時。A4レポート用紙を用いること。学生同士で相談しても、教員に質問しても構わない (むしろ推奨する) が、最後は自力でレポートを書くこと。添削の上で返却するが、授業最終回までにそれを受け取ることが必要条件 (提出のみは減点する)。

記号: $F \in C^k(I; J)$ は $F\colon I \to J$ で、F が I で C^k 級であることを意味する。

課題1　$c > 0$, $I = (0, \infty)$, $\phi \in C^2(\overline{I}; \mathbf{R})$, $\psi \in C^1(\overline{I}; \mathbf{R})$ とするとき、I における波動方程式の初期値境界値問題

(WE) $$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in I \times (0,\infty)),$$

(DBC) $$u(0,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)),$$

(IC) $$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (x \in \overline{I})$$

を考える。ただし簡単のため ϕ と ψ は 0 のある近傍で 0, すなわち

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, \varepsilon] \quad \phi(x) = \psi(x) = 0$$

とする。このとき以下の問に答えよ。

(1) $f, g \in C^2(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ に対して、

$$u(x,t) := f(x - ct) + g(x + ct) - g(-(x - ct)) \quad (x \in \mathbf{R},\ t \in [0,\infty))$$

とおくとき、u は

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in \mathbf{R} \times (0,\infty)),$$
$$u(0,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty))$$

を満たすことを示せ。また $x \geq 0$ に対して、$u(x,0)$, $u_t(x,0)$ を f と g で表せ。ただし

$$\forall x \leq 0 \quad f(x) = g(x) = 0$$

と仮定する。

(2) (1) の f と g をうまく選ぶことによって、初期値境界値問題 (WE), (DBC), (IC) の解を求めよ。

ヒント: d'Alembert の解の公式の導出を参考にせよ。結果は次のようになるはず:

$$(*) \quad u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\,dy & (x - ct \geq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\left(\phi(x+ct) - \phi(ct-x)\right) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y)\,dy & (x - ct < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(3) $(*)$ で u を定めるとき、u が (W-IBP) の解であることを計算で確認せよ (いわゆる検算です)。