差分法の数値実験 (1)
空間 1 次元熱方程式

桂田 祐史

2003 年 11 月 4 日

講義で説明した熱方程式の初期値境界値問題

$$u_t = u_{xx} \quad (x \in (0,1),\ t \in (0,\infty)), \tag{1}$$

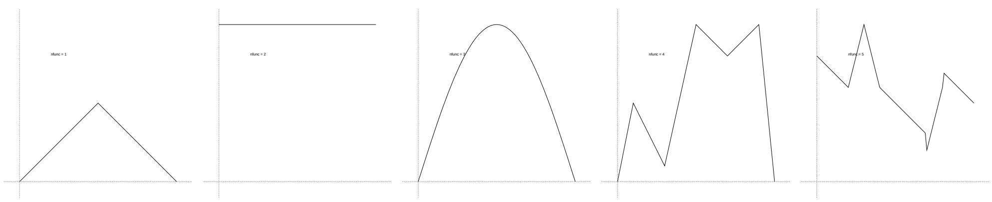
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty), \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x) \quad (x \in [0,1]) \tag{3}$$

を陰解法 (θ 法) で解くプログラム `heat1d-i.c` が以下の WWW ページにある。

`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/program/`

- これを入手して、読んで理解せよ。
  (連立 1 次方程式を解くための関数 `trilu()`, `trisol()` については次回解説する。)
- 次のようにコンパイル&実行できる。
  - コンパイルは `ccx` コマンドを使う (後の実行例参照)。
  - 初期データ f として 5 通りの関数をプログラムに組み込んである。番号で選択できるようになっている。それが最初に問われる `nfunc` である。$f_2(x) \equiv 1$, $f_3(x) = \sin \pi x$.



  - θ, N, λ については講義通りの意味である。
  - どの時刻まで計算するか指定する。その最終時刻を `Tmax` と呼んでいる。
  - 毎ステップにグラフを描くと、画面が黒く塗りつぶされて見にくくなるので、グラフを描く時間間隔 Δt を指定するようになっている。実際には τ の整数倍にしかできないので、そうでない値を指定すると適当に丸めた値が採用される。

– 画面に表示されたグラフを記録することができる。計算が終わった後で、その名前を最後に入力することになる。

– グラフの出ているウィンドウをクリックすることでプログラムの終了ができる。途中で中断したくなったら C-c を入力する。

```
oyabun% ccx heat1d-i.c
oyabun% ./heat1d-i
入力して下さい : nfunc(1..5)=1
入力して下さい : θ=0.5
入力して下さい : N=40
入力して下さい : λ=0.5
 時間の刻み幅τ= 0.0003125 になりました。
入力して下さい : 最終時刻 Tmax=0.3
入力して下さい : グラフ書き換え時間間隔 Δt=0.01
T=   0.0000e+00
  I     u(i)       I     u(i)       I     u(i)       I     u(i)       I     u(i)
  0  0.0000e+00    1  2.5000e-02    2  5.0000e-02    3  7.5000e-02    4  1.0000e-01
  5  1.2500e-01    6  1.5000e-01    7  1.7500e-01    8  2.0000e-01    9  2.2500e-01
 10  2.5000e-01   11  2.7500e-01   12  3.0000e-01   13  3.2500e-01   14  3.5000e-01
 15  3.7500e-01   16  4.0000e-01   17  4.2500e-01   18  4.5000e-01   19  4.7500e-01
 20  5.0000e-01   21  4.7500e-01   22  4.5000e-01   23  4.2500e-01   24  4.0000e-01
 25  3.7500e-01   26  3.5000e-01   27  3.2500e-01   28  3.0000e-01   29  2.7500e-01
 30  2.5000e-01   31  2.2500e-01   32  2.0000e-01   33  1.7500e-01   34  1.5000e-01
 35  1.2500e-01   36  1.0000e-01   37  7.5000e-02   38  5.0000e-02   39  2.5000e-02
 40  0.0000e+00
図を保存するファイル名: mytest.plot
マウスでウィンドウをクリックして下さい。
oyabun%
```

• `mytest.plot` というファイルを画面に表示するには

```
oyabun% cat mytest.plot | xplot
```

印刷するには

```
oyabun% plot2ps mytest.plot | lp -dlp2
```

• 初期値を色々変えてどうなるか確かめよ。(入力パラメーターは例えば $\theta = 0.5$, $N = 50$, $\lambda = 0.5$, $\mathrm{Tmax} = 1$, $\Delta t = 0.01$ とする。もっと長時間追跡したい場合は Tmax を大きくする。)

• 同じ WWW ページに境界条件を同次 Neumann 境界条件にしたプログラム `heat1n-i.c` がある (アルゴリズムはまだ説明していない)。それも同様に実行してみよ。

以下のことを調べよ。

(1) 差分解の (最大値ノルムに関する) 安定条件

$$0 < \lambda \le \frac{1}{2(1-\theta)}$$

について調べよ。上の条件だと差分解が安定であると保証されるがそうでない場合はどうか (特に $\theta = 0$ の場合の $0 < \lambda \le 1/2$ について) 実験で試せ。($\theta = 1/2$ の場合は、別のノルムの意味では無条件に安定であることが分かっている。確かめよ。$\theta = 1/4$ の場合はどうか？)

(2) 次のいずれか一つ以上を実行せよ。

(a) 初期値が簡単な時、例えば $f(x) = \sin \pi x$ や $f(x) = \sin \pi x + 2 \sin \pi x$ のような有限正弦 Fourier 級数で表される場合に、差分解と厳密解を比較するようなプログラムを書いて実験せよ。

(b) 熱方程式 $u_t = u_{xx}$ を $u_t = u_{xx} + ku$ (k は与えられた定数) で入れ替えた問題を解くプログラムを作成せよ。$t \to \infty$ のときの漸近挙動はどうなるか？また安定性はどうか？

(c) 境界条件を

$$u(0,t) = A, \quad u(1,t) = B \quad (t \in (0,\infty))$$

という非同次のものに変えて実験せよ。

サンプル・プログラムの使用しているグラフィックス命令については、以下のページを見よ。

`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/on-computer/fplot/index.html`