

応用数値解析特論 第3回

～Ritz-Galerkin 法～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2022/>

2022年10月10日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化 (続き)
 - 変分原理
 - 補題 3.2 の証明
- 3 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法
 - Galerkin 法
 - X_{g_1} , X の有限次元近似
 - 問題 (\widehat{W})
 - 問題 (\widehat{W}')
 - 連立 1 次方程式の導出
 - 連立 1 次方程式の一意可解性
 - Ritz 法
 - 問題 (\widehat{V}')
 - 誤差最小の原理
 - 古典的 Ritz-Galerkin 法
 - 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法
- 4 参考文献

- 前回は、菊地 [1] の第 2 章「微分方程式と変分原理」の内容のうち、Poisson 方程式の境界値問題 (P) とその弱定式化 (W) を説明した。
- 前回説明しそこねた変分問題 (V) を駆け足で紹介した後、[1] の第 3 章「Ritz-Galerkin 法」の内容を解説する。

2 Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化 (思い出し)

問題 (P)

次式を満たす u を求めよ:

$$(1a) \quad -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

$$(1b) \quad u = g_1 \quad \text{on } \Gamma_1,$$

$$(1c) \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2 \quad \text{on } \Gamma_2,$$

問題 (W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$(2) \quad \langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X).$$

ただし

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\}.$$

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad (u, v) := \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad [u, v] := \int_{\Gamma_2} u(x) v(x) d\sigma.$$

2.4 変分原理

(「有限要素法と変分法は近縁である」と言ったことを説明しておく。)
任意の $u \in X_{g_1}$ に対して、

$$I[u] := \frac{1}{2} \|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u]$$

とおく。次のような変分問題 (すなわち汎関数の最小問題) を考える。

問題 (V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t. $I[u] = \min_{w \in X_{g_1}} I[w]$.

(すなわち汎関数 $I: X_{g_1} \rightarrow \mathbb{R}$ の最小点を求めよ。)

定理 3.1 ((W) \Leftrightarrow (V))

u が (W) の解 $\Leftrightarrow u$ が (V) の解.

微分方程式の解が、変分問題の解になることがある。それが成り立つ時、**変分原理**が成り立つという。平凡社「世界大百科事典」によると、「一般的に、物理的な現象を法則として述べるのに関与するある基本スカラー量があつて、これを最小にするという条件から法則が導かれる場合、この法則の記述の仕方を変分原理と呼んでいる。」

ここまでのまとめ

Poisson 方程式の境界値問題 (P) を解こうとしているが、それと “ほぼ同値な” 2つの問題 (W), (V) を導出した。

- 問題 (W) と問題 (V) は厳密に同値である。
- 問題 (P) の解であれば、問題 (W), (V) の解となる。
逆に問題 (W), (V) の解が滑らかならば、問題 (P) の解になる。
滑らかさの問題に目をつむると

3つの問題 (P), (W), (V) は互いに同値である。

- 有限要素法では (W) にある弱形式を用いる。
- 初回に Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題に対する Dirichlet 原理の話をした。前者が (P), 後者が (V) に対応している ($f = 0, \Gamma_2 = \emptyset$ とすると、問題 (P) は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題になり、 $I[u]$ は Dirichlet 積分 $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ の $1/2$ である)。つまり初回にした話の一般化、詳細化をしたことになっている。

2.4 変分原理

定理の証明のための準備として、一つ公式を導いておく。

補題 3.2

$u \in X_{g_1}$, $v \in X$ とするとき、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$I[u + tv] = \frac{t^2}{2} \|v\|^2 + t\{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\} + I[u].$$

特に ($t = 1$ として)

$$I[u + v] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 + \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\}.$$

証明は単純な計算である (ある種の内積計算, 二次関数の整理)。少し後に書いておく。

(2022/10/10 午後補筆) 2022/10/10 の授業では、この補題から定理 3.1 が得られることを軽く説明した後、スライド 12 までスキップしました。補題については「証明は単なる計算なので省略します。知りたい場合はスライドを読んでください。」と言いました。

2.4 変分原理 定理 3.1 の証明 (1)

定理 3.1 の証明

(\Leftarrow) u を (V) の解とし、任意の $v \in X$ を取る。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$u + tv = g_1 + t \cdot 0 = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1).$$

ゆえに $u + tv \in X_{g_1}$. それゆえ

$$f(t) := I[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

が定義されるが、仮定よりこれは $t = 0$ で最小値を取る。補題 3.2 により

$$f(t) = I[u + tv] = \frac{t^2}{2} \|v\|^2 + t\{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\} + I[u].$$

この 2 次関数が $t = 0$ で最小となるには、1 次項の係数が 0 でなければならない:

$$\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

これは弱形式 (2) に他ならない。ゆえに u は問題 (W) の解である。

2.4 変分原理 定理 3.1 の証明 (2)

(\Rightarrow) u が (W) の解とする。任意の $w \in X_{g_1}$ に対して、 $v := w - u$ とおくと

$$v = w - u = g_1 - g_1 = 0 \quad (\text{on } \Gamma_1).$$

ゆえに $v \in X$. 補題 3.2 により

$$I[w] - I[u] = I[u + v] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 + \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\}.$$

u が弱形式 (2) を満たすという仮定から $\{\cdot\} = 0$ となることに注意すると

$$I[w] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 = \frac{1}{2} \|w - u\|^2 \geq 0.$$

ゆえに $I[u]$ は I の最小値である。すなわち u は問題 (V) の解である。 \square

2.4 変分原理

余談 1

要は 2 次関数 $I[u]$ の最小化である。 I の定義域は無限次元の空間であるが、そのような汎関数に対しても、(普通の微分を拡張した) Fréchet 微分というものが定義される。実は、 I の Fréchet 微分は

$$I'[u] = \langle u, \cdot \rangle - (f, \cdot) - [g_2, \cdot].$$

(Cf. $i(u) = \frac{1}{2}u^2 - fu - g_2u$ のとき、 $i'(u) = u - f - g_2$)

そして、 $I'[u] = 0$ は

$$\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0 \quad (v \in X)$$

となる。つまり、

弱形式は、変分問題の汎関数の Fréchet 微分係数 = 0 という条件

である。



2.4.1 補題3.2の証明

(1) $u \in X_{g_1}$, $v \in X$, $t \in \mathbb{R}$ とするとき、 Γ_1 上で

$$u + tv = g_1 + t \cdot 0 = g_1$$

であるから $u + tv \in X_{g_1}$.

$$\begin{aligned} I[u + tv] &= \frac{1}{2} \|u + tv\|^2 - (f, u + tv) - [g_2, u + tv] \\ &= \frac{1}{2} \langle u + tv, u + tv \rangle - (f, u) - t(f, v) - [g_2, u] - t[g_2, v] \\ &= \frac{1}{2} (\|u\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + \|tv\|^2) - t(f, v) - [g_2, u] - t[g_2, v] \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u] + t \{ \langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \} + \frac{t^2}{2} \|v\|^2 \\ &= I[u] + t \{ \langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \} + \frac{t^2}{2} \|v\|^2. \end{aligned}$$

2.4.1 補題3.2の証明

(2) $u, w \in X_{g_1}$ とするとき、 $v := w - u$ とおくと、 $w = u + 1 \cdot v$. また Γ_1 上で

$$v = w - u = g_1 - g_1 = 0.$$

ゆえに $v \in X$. (1) を用いて

$$\begin{aligned} I[w] - I[u] &= I[u + 1 \cdot v] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 + 1 \cdot \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\} \\ &= \frac{1}{2} \|v\|^2 + \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\}. \end{aligned}$$

□

3 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法

前回の講義で、Poisson 方程式の境界値問題を題材にして、弱定式化 (弱解の方法) を説明し、(最小型) 変分原理が成り立つことを確認した。

今回は、**同じ問題を題材に、Ritz-Galerkin 法** という近似解法を説明する。有限要素法は、Ritz-Galerkin 法の一つである、といえる。

先走って、もう少し詳しく説明すると次のようになる。

Ritz-Galerkin 法は、前回解説した弱解の方法の応用とも言える。

弱解の方法とは、微分方程式の境界値問題 (P) を考察するため、それを Euler-Lagrange 方程式とする変分問題 (V) やそれと同値な問題 (W) (弱形式で記述される) を導いて議論する、というものであった。

Ritz-Galerkin 法は、(V) や (W) を有限次元近似した問題 (\hat{V}), (\hat{W}) の解を、もとの問題 (P) の近似解に採用する、というものである。

変分問題の近似解法として、有名な Rayleigh ^{レイリー} などの研究 (“Theory of Sound” [2], [3]) もあったが、完成したのは Ritz である (**Ritz の方法**, Ritz [4])。

余談 私が勉強しはじめの頃は、Rayleigh-Ritz の方法とか、Rayleigh のみの名前がついたりしていた。Rayleigh 卿 (John William Strutt, “third Baron Rayleigh”, “Lord Rayleigh”, 1842–1919) は長生きした大物理学者、Ritz (Walter Ritz, 1878–1909) は若くしてなくなったという事情もあって、Ritz の名前は軽んじられ、そしてそれが孫引きされていたような気配が感じられる。

3.1 Galerkin 法 3.1.1 X_{g_1}, X の有限次元近似

弱解の有限次元近似版として微分方程式の近似解を求めよう、というのが **Galerkin 法** である。

いくつかの関数を選び、その 1 次結合で u や v の近似関数を作る。より具体的には関数空間 X_{g_1}, X の有限次元近似 \hat{X}_{g_1}, \hat{X} を作るため

$$(3) \quad \hat{g}_1 \doteq g_1 \quad \text{on } \Gamma_1$$

$$(4) \quad \psi_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

となる \hat{g}_1 と、1 次独立な $\psi_i \in X$ ($i = 1, \dots, m$) を適当に選び、

$$(5) \quad \hat{X}_{g_1} := \left\{ \hat{g}_1 + \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \mid (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\},$$

$$(6) \quad \hat{X} := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \mid (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

とおく。以下 $\{\psi_i\}$ のことを**基底関数** (basis functions) と呼ぶ。

3.1 Galerkin 法 3.1.2 問題 (\hat{W})

Poisson 方程式の境界値問題 (P) の解 u を \hat{X}_{g_1} の要素 \hat{u} で近似することを考える。弱形式 (W) を思い浮かべて、

問題 (\hat{W})

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$(7) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

という問題を考える。

ちなみに、この分野の言葉遣いでは、 \hat{u} を**試行関数 (trial function)**, \hat{v} を**試験関数 (test function)** と呼ぶ。

余談 2 (重み付き残差法)

ここでは試験関数の空間 \hat{X} として、試行関数の空間 \hat{X}_{g_1} とよく似たもの (ともに ψ_i で張られている) を採用したが、これは絶対必要というわけではない。実際に色々なものが使われている (もっとも、その場合は、Galerkin 法ではなく、**重み付き残差法 (method of weighted residuals, weighted residual methods)** と呼ばれることが多い)。この意味で Galerkin 法は、後で説明する Ritz 法よりも広い方法である、ということが出来る。

3.1 Galerkin 法 3.1.3 問題 (\widehat{W}')

問題 (\widehat{W}) の方程式 (7) が $\hat{v} \in \hat{X}$ につき線形で、 \hat{X} が $\{\psi\}_{i=1,2,\dots,m}$ で張られることから、(\widehat{W}) は、次の問題 (\widehat{W}') と同値であることが分かる。

問題 (\widehat{W}')

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$(8) \quad \langle \hat{u}, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

実際、 $\psi_i \in \hat{X}$ であるから、 $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ が、(7) を満たすならば、(8) を満たす。逆に $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ が (8) を満たすならば、任意の a_i をかけて i について加えることで

$$\sum_{i=1}^m a_i \langle \hat{u}, \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^m a_i (f, \psi_i) + \sum_{i=1}^m a_i [g_2, \psi_i].$$

内積の線形性から

$$\langle \hat{u}, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \rangle = \left(f, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right) + \left[g_2, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right].$$

これは (7) が成り立つことを意味する。

□

3.1 Galerkin 法 3.1.4 連立 1 次方程式の導出

方程式 (8) は、ある連立 1 次方程式と同値であることを示そう。 $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ であるから、ある a_j ($j = 1, \dots, m$) が存在して

$$\hat{u} = \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^m a_j \psi_j$$

と表せる。これを (8) に代入すると

$$\langle \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^m a_j \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

すなわち

$$(9) \quad \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

この (9) を行列とベクトルで表示すると

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix}.$$

3.1.4 連立1次方程式の導出

ゆえに

$$(10) \quad \mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

ただし、

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = (\langle \psi_j, \psi_i \rangle),$$

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a_i),$$

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = ((f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] - \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle).$$

$f, g_2, \hat{g}_1, \{\psi_i\}$ が与えられれば \mathbf{A}, \mathbf{f} は定まる。 \mathbf{u} は未知ベクトルである。
この連立1次方程式 (10) が解を持つかどうか、次の命題で一般的に解決する。

補題 3.3 (Galerkin 法の一意可解性)

$\Gamma_1 \neq \emptyset$ で、 $\{\psi_i\}$ は 1 次独立とする。このとき A は正値対称である。ゆえに連立 1 次方程式 (10) は一意可解である。

復習: 実対称行列 A に対して、 A が正値 $\stackrel{\text{def}}{=} A$ の固有値がすべて正 ($\Leftrightarrow (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}) \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0$). 特に正値対称行列は正則である。

($\{\psi_j\}$ を 1 次独立に取るのは、基底とするために当然である。一方、 $\Gamma_1 \neq \emptyset$ は、もとの問題の解の一意性のために必要であるから、これも自然な条件である。)

証明 A の対称性 ($\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_j, \psi_i \rangle$) は明らかである。 A の正値性を示す。任意の $\mathbf{b} = (b_1 \cdots b_m)^\top \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して

$$\hat{\mathbf{v}} := \sum_{j=1}^m b_j \psi_j$$

とおくと、 ψ_j の 1 次独立性から $\hat{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$ であり、実は $\|\hat{\mathbf{v}}\| > 0$ である。

(\because もしも $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 0$ ならば、 $\|\cdot\|$ の定義から、 $\hat{\mathbf{v}}$ は定数関数であるが、 $\Gamma_1 \neq \emptyset$ から、 $\hat{\mathbf{v}}$ は少なくとも 1 点 (Γ_1 の任意の点) で 0 に等しく、 $\hat{\mathbf{v}} \equiv 0$ が導かれ、矛盾が生じる。)

3.1 Galerkin 法 3.1.5 連立1次方程式の一意可解性

ゆえに

$$0 < \|\hat{v}\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^m b_j \psi_j, \sum_{i=1}^m b_i \psi_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m b_i \left(\sum_{j=1}^m \langle \psi_j, \psi_i \rangle b_j \right) = \mathbf{b}^\top \mathbf{A} \mathbf{b}$$

となる。従って \mathbf{A} は正値である。 □

注意 3.4 (記号 $\mathbf{b}^\top \mathbf{a}$)

ここで \mathbf{b}^\top は、縦ベクトル \mathbf{b} を転置して出来る横ベクトルである。ゆえに $\mathbf{b}^\top \mathbf{a}$ は、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ の内積に他ならない。この文書では、色々な内積が登場するので、それらを明確に区別するために、記号を使い分けている。同様に \mathbb{C}^m において、 $\mathbf{b}^* \mathbf{a}$ は \mathbf{a}, \mathbf{b} の内積である。

10月10日の授業では、次の §3.2 は省略して、§3.3 を説明し、そこで時間切れとなりました。§3.4 以降は、次回の授業に回します。

3.2 Ritz 法 3.2.1 問題 (\hat{V})

変分問題の有限次元近似版の解を求め、それを元の問題の近似解として採用しよう、というのが **Ritz 法** である。具体的には次の問題を考える。

問題 (\hat{V})

$$\text{Find } \hat{u} \in \hat{X}_{g_1} \text{ s.t. } I[\hat{u}] = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} I[\hat{w}].$$

前回証明した (W) と (V) の同値性と同様に、(\hat{W}) と (\hat{V}) も同値である。つまり、今考えている Poisson 方程式の境界値問題 (のような対称性のある) 問題では、Galerkin 法と Ritz 法、それぞれによる近似解を定める連立 1 次方程式は同じものである。そこで、**Ritz-Galerkin 法** と呼ばれる。

3.2 Ritz 法 3.2.1 問題 (\hat{V}')

ちなみに (\sum や係数を内積の外に出す、という方針で変形して)

$$\begin{aligned} I[\hat{u}] &= \frac{1}{2} \|\hat{g}_1\|^2 + \sum_{i=1}^m a_i \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_i a_j \langle \psi_i, \psi_j \rangle - (f, \hat{g}_1) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m a_i (f, \psi_i) - [g_2, \hat{g}_1] - \sum_{i=1}^m a_i [g_2, \psi_i] \end{aligned}$$

となる。これから極値の条件は¹

$$0 = \frac{\partial I[\hat{u}]}{\partial a_i} = \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle - (f, \psi_i) - [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

これは、もちろん Galerkin 法で得た (9) と同じである。

¹ $\frac{\partial}{\partial a_i} a_j = \delta_{ij}$ に注意。一般に $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$,
 $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ ($x \in \mathbb{R}^n$) とするとき、 $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)x + b$ となる。特に A
が対称ならば $\nabla f(x) = Ax + b$ 。1 変数の $(\frac{1}{2}ax^2 + bx + c)'$ = $ax + b$ の拡張。

やってみよう

$$\nabla\left(\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c\right) = \frac{1}{2}(A^T + A)x + b$$

微積分の授業などで聞いたことがあるかもしれないが、その覚えがなければ、多変数2次関数の微分をやってみることを勧める。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n a_{kj}x_k x_j + \sum_{k=1}^n b_k x_k + c.\end{aligned}$$

これを x_i で偏微分すると？(スライド PDF の末尾を見よ。)

3.3 誤差最小の原理

定理 3.5 (誤差最小の原理)

Ritz-Galerkin 解 \hat{u} は \hat{X}_{g_1} の中で (ある意味で) 最も u に近い。すなわち

$$\|\hat{u} - u\| = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} \|\hat{w} - u\|.$$

(授業では、証明の前に、 u から超平面 \hat{X}_{g_1} への射影 \hat{u} の図を板書する。)

3.3 誤差最小の原理

証明 まず \hat{u} は、 u から \hat{X}_{g_1} に下ろした垂線の足 (正射影) であることを示す。
弱形式

$$\langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X),$$

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

から ($\hat{X} \subset X$ に注意して)

$$\langle \hat{u} - u, \hat{v} \rangle = 0 \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

任意の $\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}$ に対して、 $\hat{u} - \hat{w} \in \hat{X}$ ゆえ、 \hat{v} のところに $\hat{u} - \hat{w}$ を代入して
(\hat{u} は垂線の足) $\langle \hat{u} - u, \hat{u} - \hat{w} \rangle = 0$.

ゆえにピタゴラスの定理の等式

$$\|\hat{w} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u} + \hat{u} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u}\|^2 + \|\hat{u} - u\|^2$$

が成り立つ。これから

$$\|\hat{u} - u\| \leq \|\hat{w} - u\|$$

を得る。

□

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

実際に問題を解くとき、 $\{\psi_j\}$ を適当に選ばなければならない。古典的な Ritz-Galerkin 法では、基底関数として、微分方程式の主要部の微分作用素の固有関数などを使用する。

例 3.6 (常微分方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法)

次の常微分方程式 (1 次元 Poisson 方程式?) の境界値問題を考えよう。

$$(11) \quad \begin{cases} -u'' = f & (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ここで f は开区間 $(0, 1)$ 上定義された既知関数である。

$\Omega = (0, 1)$, $\Gamma_1 = \Gamma = \{0, 1\}$, $\Gamma_2 = \emptyset$, $g_1 = 0$ である。

$\hat{g}_1 = 0$ とするのが自然である。 $\hat{X}_{g_1} = \hat{X} := \text{Span}\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ となる。

$$\psi_j(x) := \sin(j\pi x) \quad (1 \leq j \leq m)$$

とおくと $\psi_j(0) = \psi_j(1) = 0$ すなわち $\psi_j = 0$ on Γ_1 ($1 \leq j \leq m$) であり、1 次独立である (直交性から容易に証明できる)。

$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ は、次のように表せる。

$$(12) \quad \hat{u}(x) = \sum_{j=1}^m a_j \psi_j(x).$$

例 3.6 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

$\Gamma_2 = \emptyset$ であるから、 $[g_2, \cdot]$ という項は不要で、弱形式は

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

さて

$$\langle \psi_j, \psi_i \rangle = (\psi_j', \psi_i') = ij\pi^2 \int_0^1 \cos(j\pi x) \cos(i\pi x) dx = \frac{1}{2} ij\pi^2 \delta_{ij}$$

であるから

$$A = ((\psi_j, \psi_i)) = \frac{\pi^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & m^2 \end{pmatrix}.$$

これは対角行列であるから、逆行列は一目で

$$A^{-1} = \frac{2}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1/m^2 \end{pmatrix}.$$

例 3.6 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

以上を振り返って

- Fourier 級数に慣れていれば、(Ritz-Galerkin 法を知らなくても) (12), (13) を導くのは簡単である (やってみよう)。
- ψ_j は、同次 Dirichlet 条件を課した微分作用素 $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ の固有関数である。これは“対称な作用素”であるため、直交性

$$i \neq j \Rightarrow (\psi_i, \psi_j) = 0$$

が成り立つ。さらに

$$i \neq j \Rightarrow \langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$$

が成り立ち、係数行列 A が対角行列となって、計算が簡単になっている。

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

以下は 2 次元バージョン。時間があれば (同じことだから)。

例 3.7 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

正方形領域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ において、Poisson 方程式 $-\Delta u = f$ に同次 Dirichlet 境界条件を課した境界値問題を考える ($\Gamma_1 = \Gamma$, $g_1 = 0$ である)。このとき $\{\psi_k\}$ として

$$\varphi_{ij}(x, y) = \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

を採用するのが便利である (ここで $m \in \mathbb{N}$)。弱形式は上の例と同様に

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X} := \text{Span}\{\varphi_{ij}\}).$$

である。後のための準備として

$$\langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij} \rangle = \frac{\pi^2}{4} (ki + \ell j) \delta_{ki} \delta_{\ell j} \quad (1 \leq i, j, k, \ell \leq m)$$

さて

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m a_{k\ell} \varphi_{k\ell}$$

とおくと、

例 3.7 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

$$\begin{aligned}\langle \hat{u}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m a_{k\ell} \langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \\ &\Leftrightarrow a_{ij} \langle \varphi_{ij}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \\ &\Leftrightarrow a_{ij} = \frac{4}{\pi^2(i^2 + j^2)} (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m).\end{aligned}$$

例えば $f \equiv 1$ (定数関数) である場合、

$$\begin{aligned}(f, \varphi_{ij}) &= \int_0^1 \int_0^1 \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) dx dy = \frac{[(-1)^{i+1} + 1] [(-1)^{j+1} + 1]}{ij\pi^2} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{ij} & (i, j \text{ が共に奇数}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}\end{aligned}$$

ゆえに

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{16}{ij(i^2 + j^2)\pi^4} & (i, j = 1, 3, 5, 7, \dots). \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

ここで古典的 Ritz-Galerkin 法の特徴を列挙しておこう。

- ① 基底関数として固有関数を使うため、適用範囲が狭い。
- ② Neumann 境界条件の処理が楽。

…以上は有限要素法のテキスト (菊地 [1]) に書いてあったことであるが、次のこともぜひ指摘しておきたい。

- ③ 適用できる問題に対して、少ない手間 (それこそ手計算) で、意外と高精度な解を得ることが出来る。

余談 3 (棒の固有値問題)

ずっと以前、私が勤め始めた頃、よその研究室の学生が加藤 [5] の中の例題 (棒の振動の固有値問題) を数値計算することを卒業研究のテーマとして与えられて、それに付き合ったことがある。そのときの記録。

「I 君の固有値問題」 (1992/11)

そんな古くさい問題、差分法を使って、コンピューターで解けば楽勝だと未熟な桂田センセイは思ったが、古典的な Ritz-Galerkin 法は優秀で、ましてそれを Mathematica に載せると…という話。ずっと後になって、その 2 次元版 (板の固有値問題) に関わるとは…

3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

ようやく次回から有限要素法の話に突入する。

有限要素法は、次のような特徴を持つ Ritz-Galerkin 法である。

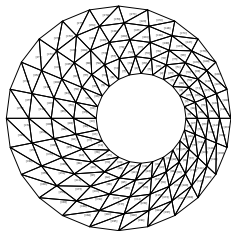
- 領域を

- 1次元の場合 区間

- 2次元の場合 三角形, 四角形

- 3次元の場合 三角錐, 四面体

などの簡単な図形 — **有限要素 (finite element)** と呼ぶ — に分割する:



$$\bar{\Omega} \doteq \hat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^m e_k \quad (e_k \text{ は有限要素}).$$

3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

- 連続な区分的多項式 ($\hat{\Omega}$ で連続、各有限要素上で多項式に等しいもの) を基底関数に採用する。

ただし、次の図 1 のように、重なりや、すき間、頂点が他の三角形の辺上にあることは避けることにする。各三角形を (有限) 要素とよぶ。

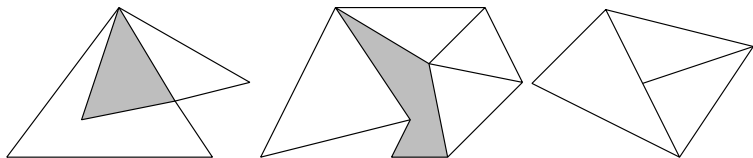


図 1: 重なり, すき間, 頂点が他の要素の辺上にある、なんてのはダメ

(有限要素というときは、試行関数、試験関数として、どういう近似関数を用いるかで考える場合がある。その辺の区別について言及すべきかも。)

やってみよう の解答

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} x_k \cdot x_j + x_k \frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ik} x_j + x_k \delta_{ij} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} (Ax, x) + (b, x) + c \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k x_j) + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial}{\partial x_i} x_k + \frac{\partial}{\partial x_i} c \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} (\delta_{ik} x_j + x_k \delta_{ij}) + \sum_{k=1}^n b_k \delta_{ik} + 0 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ik} + \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^n a_{kj} \delta_{ij} \right) + b_i \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^n a_{ki} x_k \right) + b_i \\ &= \frac{1}{2} \left(Ax \text{ の第 } i \text{ 成分} + A^\top x \text{ の第 } i \text{ 成分} \right) + b \text{ の第 } i \text{ 成分} \\ &= \frac{1}{2} (A + A^\top)x + b \text{ の第 } i \text{ 成分.} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\nabla \left(\frac{1}{2} (Ax, x) + (b, x) + c \right) = \frac{1}{2} (A + A^\top)x + b.$$

参考文献

- [1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [2] John William Strutt (third baron Rayleigh), : *The Theory of Sound, volume 1*, London, Macmillan and co. (1877).
- [3] John William Strutt (third baron Rayleigh), : *The Theory of Sound, volume 2*, London, Macmillan and co. (1878).
- [4] Walter Ritz, von : Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, *Annalen der Physik Volume 333, Issue 4*, pp. 737–786, (1909), Ritz の方法が述べられている.
- [5] 加藤敏夫：変分法, 寺沢貫一（編）, 自然科学者のための数学概論 — 応用編 —, C 編, 岩波書店 (1960).