

__年__組__番 氏名_____ (解答は何ページでも可. 1つのPDFにして提出)

問 10 一部の問題を後回しにするかもしれない。授業中の解答指示に従うこと。

(1) 次の各関数 f について、単射であるかどうか、全射であるかどうか、理由をつけて答えよ。

全単射でない場合、定義域 $X(\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y(\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、 $g: X \rightarrow Y, g(x) := f(x)$ ($x \in X$) で定まる関数 g が全単射であるようにせよ。ただし X はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす X, Y が一通りでない場合は、どれか1つ答えれば良い。

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) (b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan^{-1} x$ (主値) ($x \in \mathbb{R}$)

(c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log(x^2 + 1)$ ($x \in \mathbb{R}$)

(2) 各自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ は何か。定義を記せ。

(3) すべての自然数 n に対して $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n} < x \leq 2n\}$ とする。

(a) A_1, A_2, A_3 を数直線上に表示せよ。 (b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ と $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求めよ。

(4) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 $g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$ ならば、 f と g は全単射であることを示せ。

(5) $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset Y$ とする。 $f(A), f^{-1}(B)$ の定義を記せ。それぞれ何と呼ばれるか。