

\_\_年\_\_組\_\_番 氏名\_\_\_\_\_ (解答は何ページでも可. 1つのPDFにして提出)

問 10 一部の問題を後回しにするかもしれない。授業中の解答指示に従うこと。

(1) 次の各関数  $f$  について、単射であるかどうか、全射であるかどうか、理由をつけて答えよ。

全単射でない場合、定義域  $X(\subset \mathbb{R})$  と終域  $Y(\subset \mathbb{R})$  を適当に小さく取って、 $g: X \rightarrow Y, g(x) := f(x)$  ( $x \in X$ ) で定まる関数  $g$  が全単射であるようにせよ。ただし  $X$  はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす  $X, Y$  が一通りでない場合は、どれか1つ答えれば良い。

(a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$  ( $x \in \mathbb{R}$ )      (b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan^{-1} x$  (主値) ( $x \in \mathbb{R}$ )

(c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log(x^2 + 1)$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

(2) 各自然数  $n$  に対して集合  $A_n$  が与えられているとき、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  は何か。定義を記せ。

(3) すべての自然数  $n$  に対して  $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n} < x \leq 2n\}$  とする。

(a)  $A_1, A_2, A_3$  を数直線上に表示せよ。 (b)  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  と  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  を求めよ。

(4)  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$  とする。 $g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$  ならば、 $f$  と  $g$  は全単射であることを示せ。

(5)  $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset Y$  とする。 $f(A), f^{-1}(B)$  の定義を記せ。それぞれ何と呼ばれるか。