2023 年度 数理リテラシー 期末試験問題

2023 年 7 月 26 日 (水曜) 15:00〜17:00 施行, 担当　桂田 祐史

1.　次の各文を記号のみで表せ。ただし p と q は命題、A と B と C は集合、$f\colon A\to B$ と $g\colon B\to C$ は写像、$x\in A$ とする。
(1) $\sqrt{2}$ は有理数でない実数である。　(2) 「p かつ q」の否定は、「p でないか、または q でない」である。
(3) A と B の合併集合は A と B の共通部分を含む。　(4) f と g の合成写像による x の像は、f による x の像の g による像である。　(5) c が A と B の直積集合の要素であるためには、A のある要素 a と B のある要素 b が存在して、c が a と b の順序対に等しいことが必要十分である。

2.　(1) $p\Rightarrow q$ の真理値表を書け。　(2) $\neg(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge(\neg q)$ を示せ。　(3) $((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ の真理値表を書け。

3.　次の各命題を日本語で表し (数式の部分は数式のままで良い)、真である場合はそれを証明し、偽である場合はその否定命題を ($\neg$ を使わずに) 論理式で書いて証明せよ。
(1) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists y\in\mathbb{R})\ y^2=x$　(2) $(\exists x>0)\ (\forall y>0)\ y+\dfrac{1}{y}\neq x$

4.　(1) 部分集合の定義を述べよ。　(2) 2 つの集合の和集合、積集合、差集合、直積集合の定義を述べよ。
(3) (1 つの) 集合の補集合、ベキ集合の定義を述べよ。　(4) $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid 1\le x\le 3\}$, $B=\{p,q,r\}$ とするとき、$A\times B$ を求めよ (要素を書き並べる方法で表せ)。また $2^{A\times B}$ の要素数を求めよ。

5.　A, B, C, D を集合とするとき、以下の各命題を証明せよ。
(1) $A\subset B\wedge C\subset D\Rightarrow A\times C\subset B\times D$　(2) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$　(3) $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subset B$

以下、必要ならば、アルキメデスの公理 $(\forall a>0)\ (\forall b>0)\ (\exists n\in\mathbb{N})\ na>b$ を用いて良い。

6.　(1) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists n\in\mathbb{N})\ n>x^2$ を証明せよ。(2) 実数 x が条件 $(\forall\varepsilon>0)\ x<\varepsilon$ を満たすならば、$x\le 0$ であることを示せ。

7.　(1) $\{A_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ を集合族とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ の定義を書け。　(2) $n\in\mathbb{N}$ に対して $A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;-\frac{1}{n}<x<2n\right\}$ が成り立つとする。このとき、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ と $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ を求めよ (なるべく簡単な形にせよ)。結果だけでなく、証明もすること。

8.　(1) 写像について次の言葉の定義を述べよ。(a) 単射　(b) 全射　(c) 全単射
(2) $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ とするとき、以下の (i), (ii) を証明し、(iii) の反例を書け。
(i) f と g が全射ならば $g\circ f$ も全射である。　(ii) $g\circ f$ が単射ならば、f は単射である。(iii) $g\circ f$ が全射ならば、f は全射である。

9.　次の (1), (2) の f について、以下の (i), (ii), (iii), (iv) を答えよ (根拠も書くこと)。
(i) f の値域　(ii) f が単射であるかどうか　(iii) f が全射であるかどうか　(iv) f が全単射な場合は f の逆写像、f が全単射でない場合は $g\colon I\to J$, $g(x)=f(x)$ $(x\in I)$ が全単射であるような区間 I, J のうち、なるべく幅の広いもの
(1) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ $(x\in\mathbb{R})$　(2) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\text{ のとき})\\ 0 & (x=0\text{ のとき})\end{cases}$

宿題で添削したのに、それは読んでいないのか、間違いを改めない人が少なくない。

1 解説

(1) $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(2) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

(3) $A \cup B \supset A \cap B$

(4) $g \circ f(x) = g(f(x))$

(5) $c \in A \times B \Leftrightarrow (\exists a \in A)(\exists b \in B)\ c = (a, b)$

(1) で $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ と書いても良いが、$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ と書く人はさすがにアウト。
(4) で f と g の順番を間違える人結構いた。
(5) $c \in A \times B \Leftrightarrow$ の右側に集合とか、集合もどきのような式を書いた人が多い。ありうるのは 命題 $\Leftrightarrow$ 命題 または 条件 $\Leftrightarrow$ 条件 であって、$\Leftrightarrow$ の左右に集合のようなモノが来ることはありえない。

2 解説

(1) 真理値表は

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(2) (1) の結果から次の表の 3 列目を得る。

p	q	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	F	T	F

この表の 3 列目と 5 列目の真理値が一致するので、$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q)$.

(3) 真理値表は次のようになる。

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

辞書式順序については割とまともだった。
(3) で「第○列と第□列が等しいので」とやっている人がいたけれど、同値性を示せという問題ではない。「真理値表を書け」である。

3 解説

(1) 「すべての実数 x に対して、ある実数 y が存在して、$y^2 = x$ が成り立つ。」この命題は偽である。否定命題は

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ y^2 \neq x.$$

(証明) $x = -1$ とおくと、$x \in \mathbb{R}$. また任意の実数 y に対して、$y^2 \geq 0 > -1 = x$ であるから $y^2 \neq x$.

(2) 「ある正の数 x が存在して、任意の正の数 y に対して、$y + \dfrac{1}{y} \neq x$ が成り立つ。」これは真である。(証明) $x = 1$ とおくと、$x > 0$. また任意の正の数 y に対して、相加平均と相乗平均の関係から $y + \frac{1}{y} \geq 2 \cdot \dfrac{y + 1/y}{2} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{1}{y}} = 2 > 1 = x$ であるから $y + \dfrac{1}{y} \neq x$. ■

出来不出来の差が激しい。スラスラ解く人がいる一方で、0 点という人も。まず日本語の文にしない人が結構いた (問題文を読みなさい)。命題の真偽を間違える人も結構いた (x が実数というだけでは、負の数かもしれないので、$\sqrt{x}$ は実数と限らない、それくらいは気づいて欲しい。類題の真似をしてもダメ。)。量称記号のある命題の証明の書き方というのを説明して、ずいぶん時間が経った。時間が経ったから忘れても仕方がない、というのはこの件に関してはおかしい。これは本当に基本的なことで、最初に説明してから、何度も何度も現れるもので、身に付くのが自然だ。車の運転だったら、道の曲がり方みたいなもので、最初はギクシャクしても (右折と左折でも全然違うし…)、運転する限り、毎回しているはず。

4 解説

(1) A, B を集合とする。A が B の部分集合であるとは、$(\forall x \in A)\ x \in B$ が成り立つことをいう。

(2) A, B を集合とする。

- $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ を A と B の和集合と呼び、$A \cup B$ で表す。
- $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ を A と B の積集合と呼び、$A \cap B$ で表す。
- $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ を A と B の差集合と呼び、$A \setminus B$ で表す。

(3) A を集合、X を全体集合とする。$X \setminus A$ を A の補集合と呼び、$A^{\complement}$ で表す。$\{B \mid B \subset A\}$ を A の冪集合と呼び、2^A あるいは $P(A)$ で表す。

(4) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, q, r\}$ であるから、$A \times B = \{(1,p), (1,q), (1,r), (2,p), (2,q), (2,r), (3,p), (3,q), (3,r)\}$ である。

以下、任意の有限集合 X の陽素数を $|X|$ で表すことにする。

- p, q, r が相異なるならば、言い換えると $|B| = 3$ ならば、$|A \times B| = |A||B| = 3 \cdot 3 = 9$ であるから、$\left|2^{A \times B}\right| = 2^{|A \times B|} = 2^9 = 512$.
- p, q, r のうちの 2 つが互いに等しく、残りの 1 つと異なるならば、言い換えると $|B| = 2$ ならば、$|A \times B| = |A||B| = 3 \cdot 2 = 6$ であるから、$\left|2^{A \times B}\right| = 2^{|A \times B|} = 2^6 = 64$.
- p, q, r がみな等しいならば、言い換えると $|B| = 1$ ならば、$|A \times B| = |A||B| = 3 \cdot 1 = 3$ であるから、$\left|2^{A \times B}\right| = 2^{|A \times B|} = 2^3 = 8$. ■

得点を稼いでもらいたい問題。

5 解説

(1) $A \subset B \wedge C \subset D$ を仮定する。x を $A \times C$ の任意の要素とすると、ある $a \in A$ と $c \in C$ が存在して、$x = (a, c)$. $A \subset B$ であるから、$a \in B$. また $C \subset D$ であるから、$c \in D$. ゆえに $(a, c) \in B \times D$. ゆえに $x \in B \times D$. 以上より $A \times C \subset B \times D$.

(2) 任意の x に対して

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cup C) \wedge (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

が成り立つので、$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(3) $(\Rightarrow)$ の証明: $A \cap B = A$ を仮定する。x を A の任意の要素とすると、仮定より $x \in A \cap B$ であるから、$x \in A \wedge x \in B$. 特に $x \in B$ である。ゆえに $A \subset B$.

$(\Leftarrow)$ の証明。$A \subset B$ を仮定する。

(i) 一般に (つまりその仮定なしで) $A \cap B \subset A$ が成り立つ。

(ii) 一方、A の任意の要素 x に対して、仮定より $x \in B$. ゆえに $x \in A \wedge x \in B$ が成り立つ。ゆえに $A \subset A \cap B$.

(i), (ii) より $A = A \cap B$.

集合に関する命題の証明。

一番の基本は $A \subset B$ の証明で、「x を A の任意の要素とすると」から始めて、最終的に $x \in B$ を示すのが基本、と何度も言っているけれど、完全スルーという人がかなりいる。それで点が取るのはとても難しい (率直に言えば、ほとんど不可能だ)。

宿題に出した問題が解けないのはおかしい。勉強のやり方を間違えているのだろう。

6 解説

(1) 任意の実数 x に対して、$x \neq 0$ または $x = 0$ が成り立つ。

(a) $x \neq 0$ のとき $x^2 > 0$. アルキメデスの公理で、$a = 1$, $b = x^2$ とすると、ある自然数 n が存在して、$n \cdot 1 > x^2$ が成り立つ。ゆえに $n > x^2$.

(b) $x = 0$ のとき、$n = 1$ とおくと、$n = 1 > 0 = x^2$ であるから $n > x^2$.

(a), (b) より、いずれの場合も、ある自然数 n が存在して、$n > x^2$ が成り立つ。

(2) 実数 x が $(\forall \varepsilon > 0)\ x < \varepsilon$ を満たすと仮定する。$x \leq 0$ を背理法を用いて証明する。もしも $x \leq 0$ でないと仮定すると、$x > 0$. すると仮定より (ε として x を取って) $x < x$. これは矛盾であるから、$x \leq 0$. ■

(1) はアルキメデスの公理を使うが (2) はそうでない。(2) に自然数なんて出て来ないので、「明らか」である。

「x が実数なので $x^2 > 0$」とした人が多い (残念なことだけど、本当に多い)。しっかりして欲しい。$x = 0$ ならば (当然 $x \in \mathbb{R}$ なのは良いとして) $x^2 = 0$ であり、$x^2 > 0$ は成り立たない。

(2) は背理法を使うだけ。

7 解説

(1) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$.

(2) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$.

(証明)

(i) $x \in [0,2)$ とすると、$x \in \mathbb{R}$ かつ $0 \leq x < 2$. 任意の自然数 n に対して、$-\frac{1}{n} < 0$ かつ $2 \leq 2n$ であるから、$-\frac{1}{n} < 0 \leq x < 2 \leq 2n$. ゆえに $-\frac{1}{n} < x < 2n$. すなわち $x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(ii) $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の自然数 n に対して $x \in A_n$ であるから、$-\frac{1}{n} < x < 2n$.

(a) 特に $n = 1$ の場合に成り立つことから $x < 2$.

(b) 実は $0 \leq x$ が成り立つことを背理法により証明する。もしも $0 > x$ ならば $-x > 0$. アルキメデスの公理より、ある自然数 n が存在して、$n(-x) > 1$. ゆえに $-x > \frac{1}{n}$. ゆえに $x < -\frac{1}{n}$. これは矛盾んであるから、$0 \leq x$.

(a), (b) から $0 \leq x < 2$. すなわち $x \in [0,2)$.

(i), (ii) から $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0,2)$.

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-1,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x\}$.

(証明)

(i) $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ とすると、ある自然数 n が存在して、$x \in A_n$. ゆえに $-\frac{1}{n} < x < 2n$. $-1 \leq \frac{1}{n}$ であるから、$-1 < x$. ゆえに $x \in (-1,\infty)$.

(ii) $x \in (-1,\infty)$ とすると、$-1 < x$.

(a) $x \leq 0$ ならば、$-1 < x \leq 0 < 2$ より $-1 < x < 2$ であるから $x \in A_1$.

(b) $x > 0$ ならば、アルキメデスの公理から、ある自然数 n が存在して、$n \cdot 1 > x$ であるから、$n > x$. このとき $-\frac{1}{n} < 0 \leq x < n \leq n^2$ であるから、$x \in A_n$.

(a), (b) いずれの場合も、ある自然数 n が存在して、$x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(i), (ii) から $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-1,\infty)$. ■

8 解説

(1) (a) $f\colon X \to Y$ が単射とは、$(\forall x \in X)(\forall x' \in X)\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ が成り立つことをいう。

(b) $f\colon X \to Y$ が全射とは、$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x)$ が成り立つことをいう。

(c) $f\colon X \to Y$ が全単射とは、f が全射かつ単射であることをいう。

(2) (i) f と g が全射と仮定する。z を Z の任意の要素とすると、g が全射であるから、ある $y \in Y$ が存在して、$g(y) = z$. f が全射であるから、ある $x \in X$ が存在して、$f(x) = y$. このとき、$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. ゆえに $g \circ f$ は全射である。

(ii) f と g が単射と仮定する。x と x' を $x \neq x'$ を満たす X の任意の要素とする。f が単射であるから、$f(x) \neq f(x')$. g が単射であるから、$g(f(x)) \neq g(f(x'))$. ゆえに $g \circ f(x) = g(f(x)) \neq g(f(x')) = g \circ f(x')$. ゆえに $g \circ f$ は単射である。

(iii) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x\ (x \in [0,\infty)$ で、$g\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ を $g(y) = y^2\ (y \in \mathbb{R})$ とすると、$g \circ f\colon [0,\infty] \to [0,\infty)$, $g \circ f(x) = x^2\ (x \in [0,\infty))$. $g \circ f$ は全単射であるが ($\because$ 狭義単調増加なので単射、また任意の $z \in [0,\infty)$ に対して、 $x := \sqrt{z}$ とおくと、$x \in [0,\infty)$ かつ $g \circ f(x) = z$ となるので全射)、f は全射ではない ($\because y = -1$ とするとき、$y \in \mathbb{R}$ であるが、任意の $x \in [0,\infty)$ に対して、$f(x) = x \geq 0 > -1 = y$ であるから $f(x) \neq y$.)。

9 解説

(1) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

(i) $f(\mathbb{R})=[-1,1]$. ($\because$ $-1\leq \sin x\leq 1$ であるので、$[-1,1]\subset f(\mathbb{R})$. 一方 $f(-\pi/2)=-1$, $f(\pi/2)=1$ であるから、中間値の定理より $f(\mathbb{R})\supset[-1,1]$.)

(ii) f は単射でない。実際 $x=\pi$, $x'=-\pi$ とするとき、$x,x'\in\mathbb{R}$ かつ $x\neq x'$ かつ $f(x)=f(x')$.

(iii) f は全射でない。$f(\mathbb{R})\neq\mathbb{R}$ であるから。

(iv) $X=[-\pi/2,\pi/2]$, $Y=[-1,1]$.

(2) (i) $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. (証明) (iii) による。

(ii) f は単射である。(証明) $x,x'\in\mathbb{R}$, $x\neq x'$ とする。x,x' のうち大きい方を x_2, 小さい方を x_1 とする。$f(x_1)\neq f(x_2)$ を示せばよい。$x_2<0$ ならば、$x_1<x_2<0$. $(-\infty,0)$ で f は狭義単調増加なので、$f(x_1)>f(x_2)$. $f(x_1)\neq f(x_2)$. $x_2=0$ ならば、$x_1<0=x_2$. $f(x_1)<0$, $f(x_2)=0$ であるから $f(x_1)\neq f(x_2)$. $x_1<0<x_2$ ならば $f(x_1)<0<f(x_2)$ $f(x)=f(x')=0$ ならば $x=0$, $x'=0$. であるから $x=x'$. $f(x)=f(x')\neq 0$ ならば $x=0$, $x'=0$. であるから $x=x'$.

(別証明) まず任意の x に対して、x と $f(x)$ の符号が同じことに注意する。つまり $x>0\Leftrightarrow f(x)>0$, $x<0\Leftrightarrow f(x)<0$, $x=0\Leftrightarrow f(x)=0$.

$x\neq x'$ とする。もしも x と x' の符号が異なるならば、$f(x)$ と $f(x')$ の符号も異なるので $f(x)\neq f(x')$. x と x' の符号が同じ場合を考える。$x=0$, $x'=0$ はありえない ($x\neq x'$ なので)。ゆえに $x,x'>0$ か、$x,x'<0$ の 2 つの場合がある。前者の場合、$(0,\infty)$ では f は狭義単調減少であるから、$x\neq x'$ より $f(x)\neq f(x')$. 後者の場合も $(-\infty,0)$ で狭義単調減少なことから $f(x)\neq f(x')$ が導かれる。以上より、いずれの場合も $f(x)\neq f(x')$. ゆえに f は単射である。

(iii) f が全射である。(証明) 任意の実数 y に対して、$y\neq 0$ または $y=0$ のどちらかが成り立つ。$y\neq 0$ の場合、$x=\frac{1}{y}$ とおくと、$x\neq 0$. このとき $f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{1/y}=y$. 一方 $y=0$ の場合、$x=0$ とおくと $f(x)=f(0)=0=y$. どちらの場合も $f(x)=y$ を満たす実数 x が存在するので、f は全射である。ゆえに $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

(iv) f の逆写像は f 自身である。実際、$f\circ f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ が成り立つことを証明できる。任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して、$x\neq 0$ または $x=0$. $x\neq 0$ のとき $f(x)=\frac{1}{x}$. これは 0 でないので $f(f(x))=\frac{1}{1/x}=x$. 一方 $x=0$ のとき、$f(f(x))=f(f(0))=f(0)=0=x$. いずれの場合も $f\circ f(x)=x$ が成り立つ。■

(2) の f は狭義単調減少ではない ($\because$ $x=-1$, $x'=1$ とすると、$x<x'$ かつ $f(x)<f(x')$)。狭義単調増加と書いた人がとても多い。