3.12 集合についての定理, それらの証明

定理 7.11 (これで全部という訳でもないけれど)

以下 X は全体集合であり、A, B, C は X の部分集合とする。

1. $A \subset A$ (反射律), $A \subset B \land B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (推移律), $A \subset B \land B \subset A \Rightarrow A = B$ (反対称律)
2. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (冪等律)
3. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (交換律)
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (結合律)
5. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$, $A \cup X = X$
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (分配律)
7. $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$ (吸収律)
8. $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$, $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$ (ド・モルガン律)
9. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$, $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

3.12 集合についての定理, それらの証明

高校では、集合に関する命題は、**ヴェン図** (Venn diagram) を描いて考えた。前のスライドに載せた命題が正しいことは、ヴェン図を描けば「わかる」であろう。

この講義では、考えるときにヴェン図を参考にするかもしれないけれど、ヴェン図を使った説明は証明にはならない、というスタンスで進める。(無限個の要素からなる集合族については、ヴェン図も正確には描きようがないし、実は 4 つの集合くらいから、一般的な状況を図で表現することが難しくなる。)

以下の定義が議論の基礎となる。

1. $A \subset B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x \in A)\ x \in B.$
2. $A = B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x\, ((x \in A \Rightarrow x \in B) \land (x \in B \Rightarrow x \in A))$
   $\Leftrightarrow (\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)) \land (\forall x (x \in B \Rightarrow x \in A))$
   この条件は $A \subset B \land B \subset A$ と書ける。
3. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A^{\complement}$, $A \times B$, 2^A, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ などの定義

量称記号 $\forall$ を含む命題の証明になる、ことに注意しよう。

例 7.12

集合 A, B, C が $A \subset B$, $B \subset C$ を満たすとき、$A \subset C$ が成り立つことを示せ。
(証明) $A \subset B$, $B \subset C$ を仮定する。
x を A の任意の要素とする。$A \subset B$ であるから $x \in B$. $B \subset C$ であるから $x \in C$. ゆえに $A \subset C$. □

例 7.13

集合 A, B, C, D が $A \subset B$, $C \subset D$ を満たすとき、$A \times C \subset B \times D$ が成り立つことを証明せよ。
(証明) $A \subset B$, $C \subset D$ を仮定する。
x を $A \times C$ の任意の要素とすると、ある $a \in A$, $c \in C$ が存在して $x = (a, c)$. $A \subset B$ であるから、$a \in B$. $C \subset D$ であるから $c \in D$. ゆえに
$x = (a, c) \in B \times D$. 従って $A \times C \subset B \times D$. □

包含関係の証明は、こういう感じが多い ($A \subset B$ を示すには「x を A の任意の要素とする」から始める。はしょって「$x \in A$ とする」と書く人も多い)。等式 $A = B$ の証明は、$A \subset B$ と $B \subset A$ の証明をすれば良いが、一気にやれる場合もある (次のスライド)。

問　集合 A, B が $A \subset B$ を満たすとき、$B^{\complement} \subset A^{\complement}$ が成り立つことを証明せよ。

解答　$A \subset B$ を仮定する。
　x を $B^{\complement}$ の任意の要素とすると、$x \notin B$. このとき実は $x \notin A$ である。もしもそうでないとすると、$x \in A$. 仮定 $A \subset B$ より $x \in B$. これは矛盾であるので、$x \notin A$. すなわち $x \in A^{\complement}$. 以上より $B^{\complement} \subset A^{\complement}$. □

別解

$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow \forall x (\neg(x \in B) \Rightarrow \neg(x \in A)) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \in B^{\complement} \Rightarrow x \in A^{\complement}) \\ &\Leftrightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}. \end{aligned}$$

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ の証明

任意の x に対して

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \quad ((p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)
\end{aligned}
$$

が成り立つから、 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. □

ド・モルガン律 $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$ の証明

任意の x に対して

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^{\complement} &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\
&\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\
&\Leftrightarrow (\neg(x \in A)) \wedge (\neg(x \in B)) \quad (\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q) \\
&\Leftrightarrow (x \in A^{\complement}) \wedge (x \in B^{\complement}) \\
&\Leftrightarrow x \in A^{\complement} \cap B^{\complement}
\end{aligned}
$$

が成り立つから、 $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$. □

3.12 集合についての定理, それらの証明

空集合であることの証明は、知らないと戸惑いそうなので、一つ例をあげておく。

$A \cap A^{\complement} = \emptyset$ を示せ。

証明 1　背理法を用いて証明する。$A \cap A^{\complement} \neq \emptyset$ と仮定すると、ある x が存在して $x \in A \cap A^{\complement}$. ゆえに $x \in A$ かつ $x \in A^{\complement}$. すなわち $x \in A$ かつ $x \notin A$. これは矛盾である。ゆえに $A \cap A^{\complement} = \emptyset$. □

証明 2　(本質的には同じことであるが)

$$A \cap A^{\complement} = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \land x \in A^{\complement} \right\} = \{ x \mid x \in A \land x \notin A \}.$$

任意の x に対して $x \in A \land x \notin A$ は偽である。言い換えると、条件 $x \in A \land x \notin A$ を満たす x は存在しない。ゆえに $A \cap A^{\complement} = \emptyset$. □

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ を証明しよう。

準備として、一般に

$$(\sharp) \qquad X \cap Y \subset X$$

が成り立つことを注意する (上の定理に入ってない)。実際、$X \cap Y$ の任意の要素 x に対して、$x \in X$ かつ $x \in Y$ であるから、特に $x \in X$. ゆえに $X \cap Y \subset X$. □

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ の証明

$A \cap B = A$ と仮定する。($\sharp$) より $A \cap B \subset B$ が成り立つので ($X = B$, $Y = A$ とする)、$A \subset B$. □

$A \cap B = A \Leftarrow A \subset B$ の証明

(i) ($\sharp$) により、$A \cap B \subset A$ が成り立つ ($X = A$, $Y = B$ とする)。

(ii) $A \subset B$ と仮定すると、$A \subset A \cap B$ (実際、$x \in A$ とするとき、仮定から $x \in B$ が成り立つので、$x \in A \wedge x \in B$, すなわち $x \in A \cap B$ が成り立つ。).

(i), (ii) から $A \cap B = A$ が成り立つ。 □