数理リテラシー 第 2 回
～ 論理 (2) ～

桂田 祐史

2023 年 4 月 19 日

目次

連絡事項

- 今回からは出席を取る。原則 2/3 以上出席すべき ($14 \times \frac{2}{3} = 9.33\cdot$ なので 10 回以上で、初回は全員出席という扱いにする。後 9 回出席すること)。5 回以上欠席するとマズイ。
- 今回は、講義ノート [1] の §1.6〜§1.7 の範囲を解説します。
- 宿題 1(問 1) を出します。〆切は 4 月 22 日 (月曜) 13:30. 今回は (初めてなので) 〆切後 1 週間までの提出を認めます。

`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/toi1.pdf`

宿題についてのルール (WWW に置いてある)

- 授業中にプリントを配布するが、Oh-o! Meiji と授業 WWW サイトで PDF ファイルも公開する。授業に欠席した場合も、PDF を利用して取り組み、提出できる。
- 〆切は次回授業のある週 (普通は翌週) の月曜 13:30. それ以降も水曜 15:20 までは提出を認める。それ以後の提出は受け付けない。
- 宿題はまじめに取り組み、〆切を守って提出する限り、満点とする。〆切から水曜 15:20 までの提出は半分の得点。
- 提出は原則 A4 サイズの単一の PDF ファイル。PDF ファイル作成に慣れないうちは、画像フォーマット (JPEG 等) での提出も受け付けるが、なるべく早く PDF が作れるようになること。
- 添削結果を PDF ファイルで返却 (フィードバック) する。復習して下さい。
- 答を紙に書いてスキャナーやスマホアプリでスキャンして PDF を作ったり、タブレットで書いてから PDF 化したり、LaTeX や Word で書いた文書を PDF 化したり、どういうやり方でも OK とする (こちらが読めて添削できることが大事で、自分がやりやすい方法でやって下さい。やり方で評価を変えたりしません。)。

「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」

`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/how_to_pdf/`

前回を振り返る

(急ぐから飛ばすかも)

前回は、初回なのでこの科目のガイダンスを行い、それからパート I である「論理」の 1. 命題論理に入った。

以下を説明済みである。

1.1 命題とその真偽
1.2 「でない」, $\neg$
1.3 「かつ」, $\wedge$
1.4 「または」, $\vee$
1.5 かっこ，　論理演算の結合の優先順位

(言い忘れた注意) 教科書 (中島 [2]) では、2. 数学の論理と日常の言葉, 5. 命題論理, 6. 述語論理となっていて、論理を記号で表すことは 5 章以降で行われている。そういう順序の方が良いのかもしれないが (まず日常の言葉と数学での言葉遣いを考えて、慣れてから記号化する)、この講義では最初に論理の記号化をしてしまって、それを用いて集合と写像の説明をしている。このようにした理由は時間の節約のため。

2 つの命題 p と q が**同値**とは、命題の真偽が一致することである。そのことを $p \equiv q$ と表す。

例 2.1

$$1 + 1 = 2 \equiv \sin 1 < 1$$

$$\pi \text{ は有理数} \equiv 1 = 3$$

($\equiv$ は、数式の場合の等号 $=$ (値が一致) と似たようなものである。)

細かい話　$1 + 1 = 2 \equiv \sin 1 < 1$ は数式の混じった論理式で、$+$, $=$, $\equiv$, $\sin$, $<$ などの広い意味の “演算子” がたくさん現れる。数式の読み方は知っているとして、$\equiv$ の優先順位は一番低いことは言っておくべきかもしれない。すべてかっこをつけて結合の順序を明示すると、$((1 + 1) = 2) \equiv ((\sin 1) < 1)$ となる。

1.6.2 真理値表による証明

すべての命題 p に対して (「任意の命題 p に対して」ともいう)、p と $\neg(\neg p)$ の真偽は一致する。このことを $p \equiv \neg(\neg p)$ と表せる。

このことを以下のように証明できる。

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

第 1 列と第 3 列の真偽は一致する。ゆえに $p \equiv \neg(\neg p)$.

これは真理値表を使わずに書くと、次のようになる。

p が T であるとき、$\neg p$ は F であるから、$\neg(\neg p)$ は T である。
p が F であるとき、$\neg p$ は T であるから、$\neg(\neg p)$ は F である。
いずれの場合も p と $\neg(\neg p)$ の真偽は一致する。ゆえに $p \equiv \neg(\neg p)$.

1.6.3 論理の法則 (1)

一般に (「任意の命題 p に対して」という意味)

(1) $$p \equiv \neg(\neg p)$$

以下、同様にして証明できる。

(2) $$p \wedge (\neg p) \text{ はつねに偽}$$

(3) $$p \vee (\neg p) \text{ はつねに真}$$

(次の注意は、4/17 の授業ではカットした。)

細かい注意 (2) を $p \wedge (\neg p) \equiv \mathrm{F}$, (3) を $p \vee (\neg p) \equiv \mathrm{T}$ と書きたくなるかもしれない (そう書いてあるテキストも多い)。うるさく言うと、$\equiv$ は 2 つの命題の真偽が一致するときに用いる記号で、T や F は命題ではないので、記号の濫用である (と言う人も多い)。つねに T の真理値をもつ命題 $\top$, $\curlywedge$ や、つねに F の真理値をもつ命題 $\bot$, $\curlyvee$ を導入するテキストも多い。そうしておけば

$$p \wedge (\neg p) \equiv \curlyvee, \quad p \vee (\neg p) \equiv \curlywedge.$$

(高校数学と違って、使用する記号が統一されているわけではない。)

1.6.3 論理の法則 (2)

以下の「律」は英語では law で、「法則」と訳すこともよくある。

(4) $$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p \quad (\text{交換律}).$$

(5) $$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad (\text{結合律}).$$

約束 $(p \vee q) \vee r$ を $p \vee q \vee r$, $(p \wedge q) \wedge r$ を $p \wedge q \wedge r$ と表す。

(6) $$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad (\text{吸収律}).$$

(7) $$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad (\text{分配律}).$$

(8) $$p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p \quad (\overset{\text{べき}}{\text{冪}}\text{等律}).$$

(9) $$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q), \quad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \quad (\text{ド・モルガン律}).$$

Cf. 高校で集合のド・モルガン律を学んだかも (この講義でも後述)。

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

前のスライドに書いた法則は意味を考えればすぐ納得できるものも多いが、複雑なものはどのように確認すればよいだろう？

例題　真理値表を用いて $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ を示せ。

解答

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

第 4,7 列の真理値が一致しているので $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$. □

練習問題　真理値表を用いて $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$ を示せ。

1.6.3 論理の法則 (4)　例題: 分配律の証明

例題　真理値表を用いて $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ を示せ。

練習問題　真理値表を用いて $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。

例題　真理値表を用いて $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ を示せ。

証明

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

第 5, 8 列が一致するので、$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ が成り立つ。 □

練習問題　真理値表を用いて $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。→ 宿題

1.7 同値の証明法 (2) 同値変形による証明

1.7.1 推移律

真理値表による証明は、必ず出来る、という大きな特徴がある。

ところで数式の場合は、式変形による証明というのがある。論理式の場合も式変形による証明がある。**同値変形による証明**と呼ばれる。

以下に述べる 2 つの定理 (定理 2.2, 定理 2.3) が鍵となる。

定理 2.2 (推移律)

$p \equiv q$ かつ $q \equiv r$ ならば $p \equiv r$.

証明.

$p \equiv q$ かつ $q \equiv r$ と仮定する。
p が真ならば、$p \equiv q$ より q は真である。$q \equiv r$ より r は真である。
p が偽ならば、$p \equiv q$ より q は偽である。$q \equiv r$ より r は偽である。
ゆえにつねに p と r の真偽は一致する。ゆえに $p \equiv r$. □

1.7.2 代入

定理 2.3 (代入 (置き換え))

$p \equiv q$ ならば、次の (1), (2), (3) が成り立つ。

1. $(\neg p) \equiv (\neg q)$
2. $p \wedge r \equiv q \wedge r$
3. $p \vee r \equiv q \vee r$

証明.

上と同様である。(1) を示す。 $p \equiv q$ と仮定する。
p が真ならば、$p \equiv q$ により q も真である。ゆえに $\neg p, \neg q$ は共に偽である。
p が偽ならば、$p \equiv q$ により q も偽である。ゆえに $\neg p, \neg q$ は共に真である。
ゆえにつねに $\neg p$ と $\neg q$ の真偽は一致する。ゆえに $\neg p \equiv \neg q$.

(2), (3) は場合分けが増えるが同様である。 □

1.7.3 例題

1. 既に証明した $(p \land q) \lor r \equiv (p \lor r) \land (q \lor r)$ と交換律を用いて
$$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$$
を示せ。
2. (1) の結果を用いて
$$(p \land q) \lor (r \land s) \equiv (p \lor r) \land (p \lor s) \land (q \lor r) \land (r \lor s)$$
を示せ。

(解答) (1)

$$\begin{aligned}
p \lor (q \land r) &\equiv (q \land r) \lor p && (p \lor Q \equiv Q \lor p \text{ の } Q \text{ に } q \land r \text{ を代入}) \\
&\equiv (q \lor p) \land (r \lor p) && (\text{与えられた分配律を用いた}) \\
&\equiv (p \lor q) \land (p \lor r) && (\text{交換律と同値なもので置き換え, 推移律}).
\end{aligned}$$

ゆえに (推移律を使って)
$$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r).$$

例題 (続き)

(2)

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \vee (r \wedge s) &\equiv (p \vee (r \wedge s)) \wedge (q \vee (r \wedge s)) \\
&\equiv ((p \vee r) \wedge (p \vee s)) \wedge ((q \vee r) \wedge (q \vee s)) \\
&\equiv (((p \vee r) \wedge (p \vee s)) \wedge (q \vee r)) \wedge (q \vee s) \\
&\equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s).
\end{aligned}
$$

まず $r \wedge s$ を一つの命題とみなして、(1) の問題文中の式

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee r)$$

を使い、それから (1) の結果

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

を 2 回使い、結合律 $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ を使い、かっこを省略した。

$\square$

(急がないでゆっくり確かめることを勧めます。)

1.8 「ならば」($\Rightarrow$)

命題 p, q に対して、新しい命題を表す記号 $p \Rightarrow q$ を導入する。

読み方は「p ならば q (が成り立つ)」, "If p, then q (holds)."

(テキストによっては、$p \to q$ と表すこともある。また、$p \to q$, $p \Rightarrow q$ 両方導入し、違う意味にしたりすることもある。)

次のように $p \Rightarrow q$ の真理値を定める。

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例　「$1 + 1 = 2 \Rightarrow \pi$ は無理数」の真理値は、「$1 + 1 = 2$」と「π は無理数」のどちらの真理値も T であるから、T である。

注　数学では、普通 $\Rightarrow$ は "条件" (後で説明) について使う (例えば、x が実数 $\Rightarrow x^2 \geq 0$)。「$1 + 1 = 2$」や「π は無理数」のような命題について使うのは、違和感を感じるかもしれない。(現在の高校数学では、「ならば」は条件についてしか使ってない。)

(再掲 $p \Rightarrow q$ の真理値表)

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

前半の 2 行は、特に違和感は感じないであろう。

後半の 2 行は、(もしかすると) 不思議な感じがするかもしれない。

$p \Rightarrow q$ を考えるとき、p が成り立たない場合のことは考えないことが多いのでは？

p が成り立たないときは、q がどちらでも $p \Rightarrow q$ は真、と表を埋めておく (p が成り立たないときも $p \Rightarrow q$ の真偽を定める)。

　実は任意の命題 p, q に対して次式が成り立つ。

(10)　　$p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \lor q$　(覚えるべき式)

(証明) $(\neg p) \lor q$ の真理値表を書き、前のページの $p \Rightarrow q$ と比較する。

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \lor q$	$p \Rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

　(第 3 列は第 1 列から、第 4 列は第 2,3 列から求めた。第 5 列は前ページで紹介した定義である。) 第 4 列と第 5 列の真偽が一致するので、$(\neg p) \lor q \equiv p \Rightarrow q$. □

注　我々は $p \Rightarrow q$ の真偽を真理値表で与えて $p \Rightarrow q$ を定義したが、$p \Rightarrow q$ とは $(\neg p) \lor q$ のことである、として $p \Rightarrow q$ を定義するテキストもある。いずれにしても、違いは最初だけで、ここから後はどちらでも同じである。

$p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$ であるから

$$
\begin{aligned}
\neg(p \Rightarrow q) &\equiv \neg\left((\neg p) \vee q\right) \\
&\equiv (\neg(\neg p)) \wedge (\neg q) \\
&\equiv p \wedge (\neg q).
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q) \quad (\text{覚えるべき式}). \tag{11}$$

すなわち「p ならば q」の否定は、「p and not q」,「p かつ (q でない)」である。単に「p かつ q でない」と言うと $\neg(p \wedge q)$ のことと混同されてしまいそうなので、かっこ (　) を書いたが、苦しまぎれかもしれない。

逆接を用いて「p であるのに、q でない」と書くと、間違えにくく、覚えやすいかもしれない。— これは暗記術みたいで気が引けるけれど、「p かつ (q でない)」とかっこを使うよりは良いかもしれない。

$p \Rightarrow q$ に対して、$q \Rightarrow p$ を**逆**、$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ を**対偶**、$(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$ を**裏**と呼ぶ。

練習　$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv p \Rightarrow q$ を示せ。　　（「対偶は元の命題と同値。」）

注意 2.4 (念のため確認)

$p \Rightarrow q$ と、その逆 $q \Rightarrow p$ は同値ではない。また、$p \Rightarrow q$ と、その裏 $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$ も同値ではない。$p \Rightarrow q$ が真であっても、逆や裏は真でないことがある（「逆は必ずしも真ならず」）。

一方、裏は「逆の対偶」であるから、逆と裏は同値である。

参考文献

[1] 桂田祐史：数理リテラシー Part I. 論理, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/logic.pdf (2013–2024).

[2] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).