2022 年度 数理リテラシー 期末試験問題

2022 年 7 月 22 日 (金曜) 9:30〜11:30 施行, 担当　桂田 祐史

1.　次の各文を記号のみで表せ (e は自然対数の底、i は虚数単位、p, q は命題、 A, B, C は集合 X の部分集合、$f\colon X \to Y$ は写像、$a \in X$ とする)。
(1) $-ei$ は複素数であるが実数ではなく、$-e$ は実数であるが有理数でなく、$-\frac{27}{10}$ は有理数であるが整数ではなく、-3 は整数であるが自然数ではない。　(2) 「p または q」の否定は「p ではなく、q でもない」である。(3) すべての実数 x に対して、x より大きい実数 y が存在する。　(4) 「A と B の共通部分と C の合併集合は、A と C の合併集合と、B と C の合併集合の共通部分に等しい。　(5) a が A に含まれるならば、$f(a)$ は f による A の像に含まれる。

2.　以下では、交換法則 $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ や結合法則 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ は用いて良い。(1) 真理値表を用いて $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。　(2) (1) の結果を用いて、$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ を示せ。　(3) (1) と (2) の結果を用いて、次式を示せ。

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s).$$

(4) (3) を用いて連立方程式 $\begin{cases} x(x^2+3y^2-1)=0 \\ y(y^2+3x^2-1)=0 \end{cases}$ を解け。

3.　次の各命題を日本語で表し (数式の部分は数式のままで良い)、真である場合はそれを証明し、偽である場合はその否定命題を ($\neg$ を使わずに) 論理式で書いて証明せよ。
(1) $(\forall x \in \mathbb{Z})\ (\exists y \in \mathbb{Z})\ x + y = 0$ (2) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ y^2 = x$

4.　(1) A と B を集合とするとき、次の各集合の定義と呼び方を述べよ。
(a) $A \cup B$　(b) $A \cap B$　(c) $A \setminus B$　(d) $A^{\complement}$　(e) $A \times B$　(f) 2^A

(2) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 3\}$, $B = \{p, q, r\}$ とするとき、$A \times B$, 2^A を求めよ (要素を書き並べる方法で表せ)。

(3) 次の各命題の真偽を述べよ (証明は不要)。(a) $\emptyset \in \emptyset$　(b) $\emptyset \subset \emptyset$　(c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$　(d) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

5.　A, B が全体集合 X の部分集合とするとき、次の (1), (2) を証明せよ。
(1) $A \subset B \Rightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}$.　(2) $A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subset B$.

以下、必要ならば、アルキメデスの公理 $(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$ は用いて良い。

6.　(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ n > x$ を証明せよ。(2) 実数 x が条件 $(\forall \varepsilon > 0)\ |x| < \varepsilon$ を満たすならば、$x = 0$ であることを示せ。

7.　(1) $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を集合族とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。　(2) $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x \le \frac{1}{n}\right\}$ が成り立つとする。このとき、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ (なるべく簡単な形にせよ)。結果だけでなく、証明もすること。

8.　関数 $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ の定義域 X を高校数学ルールで定めるとき (終域は $\mathbb{R}$, つまり $f\colon X \to \mathbb{R}$ とする)、$f(X)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f(\emptyset)$, $f^{-1}(\emptyset)$, $f(\{0\})$, $f(\{3\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{4\})$, $f([-4,4])$ を求めよ。

9.　(1) 写像について次の言葉の定義を述べよ。(a) 単射　(b) 全射　(c) 全単射
(2) $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とするとき、以下の (i), (ii) を証明し、(iii) の反例を書け。
(i) f と g が単射ならば $g \circ f$ は単射である。　(ii) f と g が全射ならば $g \circ f$ は全射である。　(iii) $g \circ f$ が全射ならば、f は全射である。

忙しいので (くたびれたので) 略解です。

1 解説

(1) $-ei \in \mathbb{C} \wedge -ei \notin \mathbb{R} \wedge -e \in \mathbb{R} \wedge -e \notin \mathbb{Q} \wedge -\frac{27}{10} \in \mathbb{Q} \wedge -\frac{27}{10} \notin \mathbb{Z} \wedge -3 \in \mathbb{Z} \wedge -3 \notin \mathbb{N}$
$-ei \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \wedge -e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \wedge -\frac{27}{10} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \wedge -3 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

(2) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

(3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) y > x$

(4) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(5) $a \in A \Rightarrow f(a) \in f(A)$

(2) で $\equiv$ を $=$ と書く人がちらほら。反対に (4) で $=$ を $\equiv$ にしてしまったり。気をつけてください。$\cap$ を $\wedge$, $\cup$ を $\vee$ と書く人もちらほら。

2 解説

(1) 真理値表は

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

である。5 列目と 8 列目の真偽が一致するので $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

(2) まず交換律を使い、(1) の分配律を使い、さらに交換律を使うと

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\equiv (q \vee r) \wedge p \\ &\equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r). \end{aligned}$$

ゆえに $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(3) まず (1) を使い、それから (2) を 2 回使い、結合律を使い、最後にかっこを省略すると

$$\begin{aligned} (p \vee q) \wedge (r \vee s) &\equiv (p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s)) \\ &\equiv ((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge s)) \\ &\equiv (((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee (q \wedge r)) \vee (q \wedge s) \\ &\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s). \end{aligned}$$

ゆえに

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s). \blacksquare$$

(4) $(x, y) = (1/2, 1/2), (1/2, -1/2), (-1/2, 1/2), (-1/2, -1/2), (0, -1), (0, 1), (-1, 0), (1, 0), (0, 0).$ $\blacksquare$

(1), (2), (3) は宿題 1 そのものである。(4) は (3) の分配則の応用問題である (解が 9 個求まっていない人が時々いる)。

3 解説

(1) 「すべての整数 x に対して、ある整数 y が存在して $x+y=0$.」真である。(証明) x を任意の整数とする。$y=-x$ とおくと、y は整数であり $x+y=x+(-x)=0$. ゆえに $x+y=0$. ■

(2) 「すべての実数 x に対して、ある実数 y が存在して $y^2=x$.」これは偽である。否定命題は $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$ $y^2\neq x$. (証明) $x=-1$ とおくと x は実数であり、すべての実数 y に対して $y^2\geq 0>-1=x$ であるから $y^2>x$. ゆえに $y^2\neq x$. ■

(1) で x の説明 (紹介とでも言うのか) ができない人が少なくない。いきなり「$y=-x$ とする」から始めるのは NG です。

4 解説

1. (a) $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$　A と B の合併集合 (和集合)
   (b) $A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$　A と B の共通部分 (積集合)
   (c) $A\setminus B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$　A と B の差集合
   (d) $A^{\complement}=\{x\mid x\in X\wedge x\notin A\}$ (ただし全体集合を X とする。)　A の補集合
   (e) $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$　A と B の直積集合
   (f) $2^A=\{C\mid C\subset A\}$　A の冪集合
2. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{p,q,r\}$ であるから

$$A\times B=\{(1,p),(1,q),(1,r),(2,p),(2,q),(2,r),(3,p),(3,q),(3,r)\}$$
$$2^A=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{1,2,3\}\}$$

3. (a) 偽　(b) 真　(c) 真　(d) 真

(3)(d) を偽と間違える人が多いですが、「空集合は任意の集合の部分集合」という定理を証明してあるので、真と分かるはずです。

5 解説

(1) $A\subset B$ と仮定する。x を $B^{\complement}$ の任意の要素とすると、$x\notin B$. $x\notin A$ が成り立つことを背理法で証明する。$x\notin A$ が成り立たないと仮定すると、$x\in A$. 仮定 $A\subset B$ より $x\in B$. これは $x\notin B$ と矛盾する。ゆえに $x\notin A$. すなわち $x\in A^{\complement}$. 以上から $B^{\complement}\subset A^{\complement}$. ■

(2) $A\cup B=X$ と仮定する。x を $A^{\complement}=X\setminus A$ の任意の要素とする。$x\in X=A\cup B$ であるから $x\in A$ または $x\in B$. $x\notin A$ であるから $x\in B$. ゆえに $A^{\complement}\subset B$.

$A^{\complement}\subset B$ を仮定する、x を X の任意の要素とする。$x\in A$ または $x\notin A$ が成り立つ。後者が成り立つ場合、仮定より $x\in B$. ゆえに $x\in A\vee x\in B$. すなわち $x\in A\cup B$. ゆえに $X\subset A\cup B$. ゆえに $X=A\cup B$. ■

(1) は宿題に出したので簡単なはずですが、あまり出来ていなかったです。

6 解説

(1) x を任意の実数とする。$|x|+1>0, 1>0$ であるから、アルキメデスの公理より、ある自然数 n が存在して、$n\cdot 1>|x|+1$. $|x|+1>|x|\geq x$ であるから $n>x$. ■

(2) 背理法を用いる。$x=0$ でないと仮定すると、$|x|>0$. 仮定より $|x|<|x|$ (ε として $|x|$ を取り、$|x|<\varepsilon$ に代入した。). これは矛盾である。ゆえに $x=0$. ■

自然数の出て来る (1) ではアルキメデスの公理が必要ですが、(2) にアルキメデスの公理は必要ないです (使っても証明できますが)。背理法が 1 つのテーマです。

7 解説

(1) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$.

(2) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\}$.

(証明) 任意の自然数 n に対して $A_{n+1} \subset A_n$ が成り立つので、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ である。

実際、

- 一般に $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset A_1$.
- x を A_1 の任意の要素とする。$n = 1$ とおくと $n \in \mathbb{N}$ かつ $x \in A_n$. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義から $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
  ゆえに $A_1 \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

以上から $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$. ■

$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$.

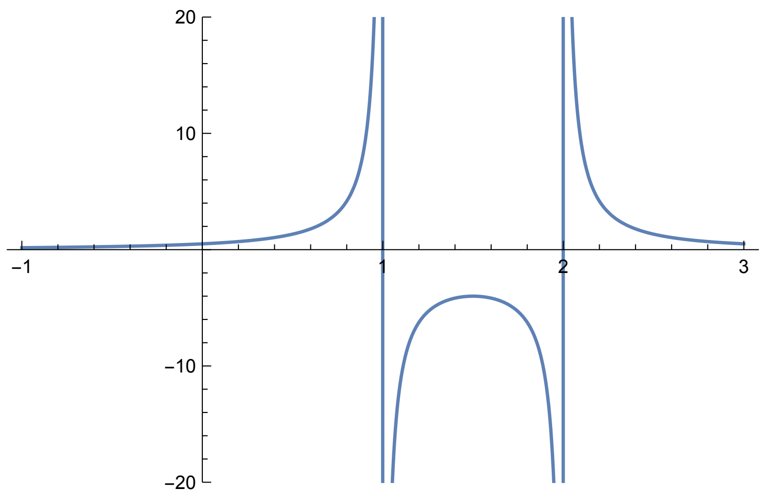
(証明)

- x を $\{0\}$ の任意の要素とすると $x = 0$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < 0 \leq \frac{1}{n}$ であるから $0 \in A_n$. ゆえに $x = 0 \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. したがって $\{0\} \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
- x を $\displaystyle\bigcap_{n\in A_n} A_n$ の任意の要素とすると、任意の自然数 n に対して $-\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n}$. 特に $|x| \leq \frac{1}{n}$. 実は $x = 0$ であることを背理法で示す。もしも $x \neq 0$ ならば $|x| > 0$. アルキメデスの公理から、ある自然数 N が存在して $N|x| > 1$. これから $|x| > \frac{1}{N}$. 上で示したことから $|x| \leq \frac{1}{N}$ であるから矛盾である。ゆえに $x = 0$. ゆえに $x \in \{0\}$. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \{0\}$.

以上から $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$. ■

(1) は何度もやっているはず (宿題、中間試験) ですが、集合の書き方から間違えている人がいます (こういうのは復習すべきです)。A_n が n が大きくなると “小さい” 集合になるので、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ はすぐ分かります。

8 解説



$f\left(\frac{3}{2}\right) = -4$ に注意

$x<1$ で単調増加, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to1-0} f(x)=\infty$, $1<x<\frac{3}{2}$ で単調増加, $\lim_{x\to1+0} f(x)=-\infty$, $f(3/2)=-4$, $\frac{3}{2}<x<2$ で単調減少, $\lim_{x\to2-0} f(x)=-\infty$, $2<x$ で単調減少, $\lim_{x\to2+0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

$$X=\mathbb{R}\setminus\{1,2\}.$$

$$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}=(-\infty,-4]\cup(0,\infty).$$

$$f^{-1}(\mathbb{R})=X=\mathbb{R}\setminus\{1,2\}.$$

$$f(\emptyset)=\emptyset.$$

$$f^{-1}(\emptyset)=\emptyset.$$

$$f\left(\{0\}\right)=\{f(x)\mid x\in\{0\}\}=\{f(x)\mid x=0\}=\{f(0)\}=\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

$$f\left(\{3\}\right)=\{f(x)\mid x\in\{3\}\}=\{f(x)\mid x=3\}=\{f(3)\}=\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

$$f^{-1}(\{0\})=\{x\in X\mid f(x)\in\{0\}\}=\{x\in X\mid f(x)=0\}=\emptyset.$$

$f(x)=4\Leftrightarrow(x-1)(x-2)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2-3x+\frac{7}{4}=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-7}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{2}}{2}$ であるから

$$f^{-1}(\{4\})=\{x\in X\mid f(x)\in\{4\}\}=\{x\in X\mid f(x)=4\}=\left\{\frac{3-\sqrt{2}}{2},\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

$f(x)=-4\Leftrightarrow(x-1)(x-2)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-9}}{2}=\frac{3}{2}$ であるから

$$f\left([-4,4]\right)=\left\{\frac{3}{2}\right\}\cup\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2},1\right)\cup\left(2,\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right].\blacksquare$$

耳にタコができるかもしれないですが、グラフを描けるくらい関数を分かることが必要なので、「まずグラフを描くことを目標にする」と良いです。

9 解説

(1) (a) $f\colon X\to Y$ が単射とは、$(\forall x\in X)\ (\forall x'\in X)\ (x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x'))$ が成り立つことをいう。

(b) $f\colon X\to Y$ が全射とは、$(\forall y\in Y)\ (\exists x\in X)\ f(x)=y$ が成り立つことをいう。

(c) $f\colon X\to Y$ が全単射とは、f が全射かつ単射であることをいう。

(2) (i) f と g が単射と仮定する。x,x' は X の任意の要素とする。$x\neq x'$ ならば、f が単射であることから $f(x)\neq f(x')$. g が単射であることから $g(f(x))\neq g(f(x'))$. すなわち $g\circ f(x)\neq g\circ f(x')$. ゆえに $g\circ f$ は単射である。

(ii) f と g が全射と仮定する。z を Z の任意の要素とすると、g が全射であることから、ある $y\in Y$ が存在して $z=g(y)$. f が全射であることから、ある $x\in X$ が存在して、$y=f(x)$. このとき $g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=z$. ゆえに $g\circ f(x)=z$. ゆえに $g\circ f$ は全射である。

(iii) $X=\{1\}$, $Y=\{-1,1\}$, $Z=\{1\}$, $f(1)=1$, $g(-1)=1$, $g(1)=1$ とすると、$g\circ f(1)=1$. $g\circ f(X)=\{1\}=Z$ であるから $g\circ f$ は全射である。$f(X)=\{1\}\neq Y$ であるから f は全射でない。