

__年__組__番 氏名_____ (解答は裏面も使用可)

問10 \mathbb{R}^2 の部分集合 D, E を次のように定める ($\{ \}$ の中のカンマ, は \wedge と解釈する)。

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2, -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \right\},$$
$$E = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 2, -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq v \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

また $f(x, y) = (x^2 - y^2, y/x)$ とおく。

(1) D を図示せよ。 (2) $(x, y) \in D$ のとき、 $f(x, y) \in E$ であることを示せ。

(3) f を D から E への写像 $f: D \rightarrow E$ とみなすとき、 f は全単射であることを示せ。

注: もし (1) が解けなくても、(2) と (3) は解けます。(2) は簡単です (難しく考えすぎないように)。これを言っておかないと $f: D \rightarrow E$ とみなせないのを入れておきました。(3) がメインの問題です。まずノーヒントで考えてみて下さい。7月23日(木曜) 19:00 にヒントを書き足します。(追記) 2ページ目を見て下さい。

(3) ヒント 逆関数を求めなさいと言われていないけれど、具体的に求めてしまいましょう。 $u = x^2 - y^2$, $v = y/x$ を u, v について解く。そうすれば…