

数理リテラシー 第9回

～ 写像 (2) ～

桂田 祐史

2020年7月8日

目次

- 1 期末レポートについて
- 2 宿題 6 へのコメント
- 3 写像
 - 写像の例 (続き)
 - 射影
 - 定値写像, 特性関数
 - 微分
 - 数列
 - 練習 値域を求める
 - 合成写像
 - 定義
 - 写像の合成についての結合律
- 4 宿題 8(問 8) 紹介
- 5 問 7 解説

本日の内容&連絡事項

- **期末レポート** について説明します。
- 本日の授業内容: 写像の例 (続き), 合成写像
- 宿題 7(問 7) の解説を行います。
- 宿題 8 を出します。締め切りは 7 月 13 日 (月曜)13:30 です。それ以降 7 月 15 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい (katurada あっと meiji.ac.jp)。
- 質問や相談等は宿題余白に書くか、質問用 Zoom ミーティングで。

期末レポートについて

- 課題の提示は 8 月 5 日 (水曜) 15:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく早くアクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 8 月 6 日 (木曜) 15:00 です。
- 課題文自体は、[▶ 授業 WWW サイト](#) でも公開します。
- 内容は問題を解いて解答をレポートする、というものです。問題の量は従来の期末試験程度で、90~120 分程度の時間で解答できるはずですが、もちろん締め切りに間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。
- 解答しているときに、講義資料や教科書、ノート、参考書などを見ても構いませんが、他人と相談することはしないで下さい。事前によく復習しておくことを勧めます。
- A4 サイズの PDF で提出してもらいます。
- ファイルサイズは Oh-o! Meiji では、10MB までという制限があります。それを超えた場合、ファイル・サイズを縮小するか、複数のファイルに分割して送って下さい。スキャンして作った PDF の場合、例えば [▶ how_to.pdf](#) で説明した方法が使えるかもしれません。
- 自分の宿題のファイルのサイズを確認しておいて下さい。1MB を大きく超える人は対策を考えて下さい。
- 何かトラブルが起こった場合は、締め切りまでにメールで連絡して下さい。

宿題6へのコメント

① $C = 2^B$ は私が思っていたよりも出来ている人が多かった。カンマ \square で叱られている人が多い。繰り返しになるけれど気をつけて下さい。

② $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ と間違えた人がいました。

左辺は $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (無限個の集合の合併), 右辺は $\bigcup_{k=1}^n A_k$ (n 個の集合の合併) です。

(c) は \emptyset が正解ですが、 $\{0\}$ 以外に $\{\emptyset\}$ という答案も結構ありました。 $\{0\}$ は \emptyset とは違います (要素数はそれぞれ 1, 0)。

③ 「対偶だから」という答案が多かったです。そういう方針で解くと

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \notin B \Rightarrow x \notin A) \quad (\text{一般に } p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p \text{ だから})$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in B^c \Rightarrow x \in A^c)$$

$$\Leftrightarrow B^c \subset A^c.$$

ゆえに $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.

3 写像の例 (前回からの続き) 射影

例 (射影)

X と Y は空集合でない集合とする。

$\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$ を $\text{pr}_X((x, y)) = x$ ($(x, y) \in X \times Y$),

$\text{pr}_Y: X \times Y \rightarrow Y$ を $\text{pr}_Y((x, y)) = y$ ($(x, y) \in X \times Y$)

で定める。

それぞれ X への射影、 Y への射影 と呼ぶ。

3 写像の例 定値写像, 特性関数

例 (定値写像)

X, Y は空でない集合で、 $c \in Y$ とするとき、 $f: X \rightarrow Y$ を

$$f(x) = c \quad (x \in X)$$

で定める。このような f を**定値写像** (constant map)、**定数写像**と呼ぶ。

例 (特性関数)

X は空でない集合、 $A \subset X$ とするとき、 $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

で定める。この χ_A を A の**特性関数** (the characteristic function of A) または**定義関数**と呼ぶ。

Dirichlet の関数 D は $\chi_{\mathbb{Q}}$ である。

例 (微分)

$C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ を \mathbb{R} から \mathbb{R} への C^∞ 級の (無限回微分可能な) 関数の全体とする。 $X := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $Y := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D: X \rightarrow Y$ が

$$D(f) = f' \quad (f \in X)$$

で定まる。ただし f' は f の導関数とする。

(無限回微分可能な関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を 1 回微分した f' も無限回微分可能であるので、 $D(f) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ である。)

$$D(\sin) = \cos.$$

$$F(x) = x^2, G(x) = 2x \text{ とするとき、 } D(F) = G.$$

3 写像の例 数列

例 (数列)

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする。このとき、写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ が $f(n) = a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) として定まる。

逆に $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、 $a_n = f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) で a_n を定めると、実数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が得られる。

結局のところ、**実数列は、 \mathbb{N} から \mathbb{R} への写像に他ならない。**

X から Y への写像全体の集合を Y^X と表すことがある。

$$Y^X := \{f \mid f: X \rightarrow Y\}.$$

この記号を使うと、実数列全体の集合は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と表せる。 □

練習 値域を求める (1)

写像 $f: X \rightarrow Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1 以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

$$(1) f_1(x) = x^2 - 3x + 4 \quad (2) f_2(x) = x + \frac{1}{x} \quad (3) f_3(x) = \sin x$$
$$(4) f_4(x) = \sqrt{x}$$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$. (b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{ x^2 - 3x + 4 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (b) $y = f_2(x)$ のグラフは…

$$f_2(X) = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}.$$

(3) (a) $X = \mathbb{R}$. (b) $f_3(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

(4) (a) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. (b) $f_4(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$. □

練習 値域を求める (2)

例題 2 次の各写像の値域を求めよ。

- ① Dirichlet の関数 $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
- ② 正則な 1 次変換 $ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$)
- ③ 恒等写像 集合 $X (\neq \emptyset)$ に対して、 $\text{id}_X: X \rightarrow X$, $\text{id}_X(x) = x$ ($x \in X$)
- ④ 微分 $D: C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D(f) = f'$ ($f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$) ただし f' は f の導関数とする。

解答 ((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになるろう。(4) は…)

- ① $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
- ② $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. (\because 任意の $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x, y)) = (u, v)$. ゆえに $(u, v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
- ③ $\text{id}_X(X)$ 出来るようになるろう
- ④ $D(C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})) = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. (\because 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ に対して、 $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ とおくと、 $F' = f$ かつ F は無限回微分可能 ($F \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$) であるから、 $D(F) = f$. ゆえに $D(C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})) \supset C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.)

4 合成写像

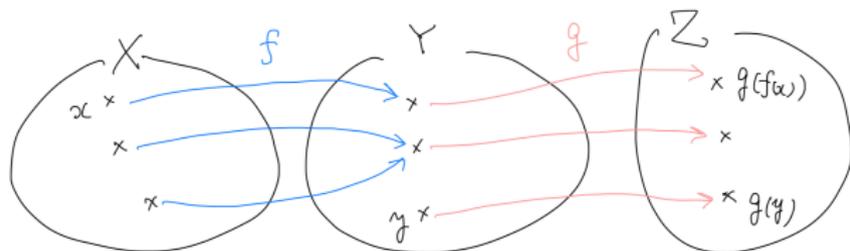
定義 (合成写像)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とするとき

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

で写像 $h: X \rightarrow Z$ が定まる。この h を f と g の**合成写像**と呼び、 $g \circ f$ で表す。すなわち

$$g \circ f: X \rightarrow Z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) \quad (x \in X),$$



4 合成写像 細かい注意

実は合成写像については、テキストごとに細かいところで違いがある。この講義では、教科書 (中島 [1]) と同じにしたが、私は別の講義では、次のように定義している。

定義 (合成写像の別の定義)

$f: X \rightarrow Y, g: Y' \rightarrow Z, f(X) \subset Y'$ であるとき、写像

$$h: X \rightarrow Z, \quad h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

が定義できる。この h を f と g の合成写像と呼ぶ。

一般に $f(X) \subset Y$ であるから、 $Y = Y'$ のときは $f(X) \subset Y'$ が成り立つことに注意しよう。 $Y = Y'$ でなくても $f(X) \subset Y'$ であれば、 $g(f(x))$ が意味を持つので h が定義できる。

4 合成写像 写像の合成についての結合律

定理 (写像の合成についての結合律)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？ **写像が等しいとはどういうことか。**

証明 $g \circ f: X \rightarrow Z$ で、 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ($x \in X$) である。ゆえに $h \circ (g \circ f): X \rightarrow W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x))$$

一方、 $h \circ g: Y \rightarrow W$ で、 $(h \circ g)(y) = h(g(y))$ ($y \in Y$) である。ゆえに $(h \circ g) \circ f: X \rightarrow W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x))$$

ゆえに、 $h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ では、定義域、終域、定義域に属する各々の要素の像、それぞれ等しいので、 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. \square

宿題 8(問 8) 紹介

問題文は以下においてある。

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi8.pdf>

宿題のソースも公開してある。

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi8.tex>

これに答えを書き加えて提出してくれても構わない。

問7解説

手書きで解説する。

-  中島 匠一, 集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).