

数理リテラシー 第5回

～ 論理 (5), 集合 (1) ～

桂田 祐史

2020年6月10日

連絡事項 & 本日の内容

- 本日の授業内容: (前半) 複数の量称を含む命題の否定, (後半) 集合 (けわしい道は終わり、しばらくは平坦?)
- 宿題 2, 3 の解説を行います。
宿題 3 の提出率は十分だと判断出来たので、今後は特別な理由がない限り、翌週に解説します。講義資料は前日までに公開することになっていますが、宿題を解説する動画は授業が始まってから公開します。
- 宿題 4 を出します。締め切りは 6 月 15 日 (月曜) 13:30 です。それ以降 6 月 17 日 15:20 までに提出されたものは $1/2$ にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい (katurada あっとまーく meiji.ac.jp)。
- これからアンケートは、何か特別に尋ねたいことがある場合のみ行います。質問や相談等は宿題余白に書くか、質問用 Zoom ミーティングで尋ねて下さい。

パラシュート降下 (2.6 で覚えるべきことをこの1枚で)

問 次の条件の否定を書け。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

(ただし I は \mathbb{R} の区間で、 f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは??

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

1年生は、そんなの知らない、というのが当たり前。しかし、内容は分からなくても、否定条件を書くことは簡単である。

解答

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in I)(\exists x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$$

自分が理解していない理論を使った議論はわからなくても、そこに現れる数式の計算自体はできることが珍しくない。論理についても、式で表現してあれば、(意味がわからなくても) その計算は機械的にできる。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題

以下の (1)~(7) が任意の述語 $P(x)$, $Q(x)$, $P(x, y)$ について成り立つ。

特に (1),(2),(3) が重要である。それ以外はその都度考えれば十分。

- ① $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x (\neg P(x))$
「任意の x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「ある x が存在して $P(x)$ が成り立たない」
- ② $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x (\neg P(x))$
「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「任意の x に対して、 $P(x)$ が成り立たない」
- ③ $\exists y \forall x P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$ (同値でないことだけでも覚える)
- ④ $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
- ⑤ $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

((3),(4),(5) は前回もチラッと出て来た。)

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

(このスライドはあまり気にしなくて良い)

$$\textcircled{6} \quad \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$$

$$\textcircled{7} \quad \exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$$

(6) で \wedge の代わりに \vee としたものは成り立たない。

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \quad (\text{真とは限らない})$$

(7) で \vee の代わりに \wedge としたものは成り立たない。

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \quad (\text{真とは限らない})$$

(例えば整数について考えていて、 $P(x)$ は「 x が偶数である」、 $Q(x)$ は「 x は奇数である」とすると、偽であることが分かる。)

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

上にあげた法則は、付帯条件つきでも成り立つ。(1), (2) の付帯条件つきバージョンは

$$\textcircled{i} \quad \neg((\forall x : P(x)) Q(x)) \equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x)$$

$$\textcircled{ii} \quad \neg((\exists x : P(x)) Q(x)) \equiv (\forall x : P(x)) \neg Q(x)$$

(i) の証明

$$\begin{aligned} \neg((\forall x : P(x)) Q(x)) &\equiv \neg(\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))) \\ &\equiv \exists x \neg(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\ &\equiv \exists x \neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \\ &\equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\ &\equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x). \end{aligned}$$

(ii) も同様に証明できる。興味あればやってみよう (解答はこの PDF の最後)。

論理式における演算の結合の優先順位 (1)

複数の論理記号が含まれる式を書くとき、結合の順番を表すために括弧を用いる。例えば、 $p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee r$ 。

しかし、括弧が多いと式が読みにくくなるので、数の四則演算でそうしたように、論理式についても、括弧を減らすために、演算に優先順位を設けて、括弧を適度に省略する。

ある本によると、優先順位の高い順に

① $=, \in$

② $\neg, \forall x, \exists x$

③ \wedge, \vee

④ \Rightarrow

⑤ \Leftrightarrow, \equiv

(\Leftrightarrow はテキストによっては、 \Rightarrow と同じ、となっている。)

論理式における演算の結合の優先順位 (2)

例えば、

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv (\neg(\neg q)) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p) \equiv (\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

において、上のルールを採用すると、すべての括弧が省略できる。

上のルールにおいても、 \wedge と \vee は同じ優先順位なので、 \wedge と \vee が混じる式では、やはりカッコ () をつけることが必要であることに注意しよう。(\wedge を論理積、 \vee を論理と呼ぶせいか、数の演算との類推から \wedge を優先して、 $(p \wedge q) \vee r$ を $p \wedge q \vee r$ と書ける、と誤解している人が多いような気がするが、そうではない。)

この講義では (練習時間は取れないので) 括弧を省略しない。
(ただし、 \equiv の優先順位が一番低いことは仮定している。)
理解している自信がある人が括弧を省略するのは認める。

集合は割と新しい。

Georg Cantor (1845–1918) が創始者。色々難しいことをやった。
ここでは数学の言葉としての集合を習得することが目的である。

次のキーワードは覚えておくべき(?)

素朴な集合論 \longleftrightarrow 公理的集合論

11.2 集合の定義、要素

集合 (set) とは、範囲が明確に定まったものの集まりのことである。

ただし、1個だけでも集合である。また0個でも集合である (後で説明する空集合)。

A, B, \dots などの文字で表す (大文字を使うことが多い)。

集合 A に属するものを A の**要素**あるいは^{げん}**元**とよぶ (どちらも英語の element の訳)。

a が集合 A の要素であることを

$$a \in A \quad \text{あるいは} \quad A \ni a$$

と表し、「 a は A に属する」、「 a は A に含まれる」、「 a belongs to A 」、「 a is in A 」、「 A は a を含む」、「 A includes a 」、「 A contains a 」などという。なるべく最初の「 a は A に属する」を使うことにする。

11.1 集合の定義、要素 (続き)

$a \in A$ の否定は、 $a \notin A$ あるいは $A \ni a$ と表す。

例

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (覚えているかな?)

例

「大きい数の全体の集合」は \mathbb{N} .

例

$1 \in \mathbb{N}, -1 \notin \mathbb{N}, -1 \in \mathbb{Z}, \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}, \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{3} \in \mathbb{R}, i \notin \mathbb{R}, i \in \mathbb{C}$.
(ただし i は虚数単位である。)

$x \in A$ を「 A に属する x 」, “ x which belongs to A ” と読むのが適当な場合がある。

「任意の $x \in A$ に対して、 $x \in B$ 」は「 A に属する任意の x に対して x は B に属する。」あるいは「 A の任意の要素 x に対して x は B に属する。」

その他の例をあげる。

$x \in \mathbb{R}$ を「 \mathbb{R} に属する x 」, 「実数 x 」 と読む。

$x > 0$ を「正の数 x 」 と読む。

II.3 集合の相等

2つの集合 A と B に対して、

$$\forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$$

が成り立つとき、 A と B は**等しい**と定義し、 $A = B$ で表す。

\Leftrightarrow を用いると

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

と書くこともできる。

教科書では、 A と B が等しいとは

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

が成り立つこと、と書いてあるが、 $\forall x$ が省略されていると考えるべき。

$A = B$ の否定は $A \neq B$ で表す。

II.4 集合の表し方, II.4.1 要素をすべて書き並べる方法 (外延的定義)

要素を書き並べて (複数あるときは, で区切る)、 $\{\}$ (braces) で囲む。

例

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{0\}.$$

このとき $1 \in A$. しかし $0 \notin A$.

順番は不問にする (変えても同じ集合), 重複も認める

例

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}.$$

この方法は、要素が無限にたくさんあるときは困る。

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

と書くこともあるが、あいまいなことは否めない。

11.4.2 要素の条件を書く方法 (内包的定義)

条件 $P(x)$ を満たす x 全体の集合は

$$\{x \mid P(x)\}$$

で表す。本によっては $\{x; P(x)\}$, $\{x : P(x)\}$ とも書く。

例

$$\{x \mid x \text{ は実数}\}$$

$$\{y \mid y \text{ は } 1 \text{ 以上 } 3 \text{ 以下の自然数}\}$$

$$\{n \mid n \text{ は自然数かつ } 2 \text{ で割り切れる}\}$$

例

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 0\}$$

1つの集合を表す内包的定義の書き方は無数にある。

例

$$\begin{aligned}\{1, 2, 3\} &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ かつ } 1 \leq x \leq 3\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ and } 0.3 < x < 3.7\} \\ &= \{x \mid x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\}\end{aligned}$$

問2, 問3 解説

これは手書きで説明します。

おまけ $\neg(\exists x : P(x)) Q(x) \equiv (\forall x : P(x))\neg Q(x)$ の証明

$$\begin{aligned}\neg((\exists x : P(x)) Q(x)) &\equiv \neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \\ &\equiv \forall x\neg(P(x) \wedge Q(x)) \\ &\equiv \forall x((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x))) \\ &\equiv \forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x)) \\ &\equiv (\forall x : P(x))\neg Q(x). \quad \square\end{aligned}$$

(解説) この証明では、次の3つのことを使っている。

- $(\exists x : P(x))Q(x) \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
- $(\forall x : P(x))Q(x) \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$
- $\neg(\exists xP(x)) \equiv \forall x\neg P(x)$