数理リテラシー 第5回

～ 論理 (5), 集合 (1) ～

桂田 祐史

2020 年 6 月 10 日

連絡事項&本日の内容

- 本日の授業内容: (前半) 複数の量称を含む命題の否定, (後半) 集合 (けわしい道は終わり、しばらくは平坦？)
- 宿題 2, 3 の解説を行います。
  宿題 3 の提出率は十分だと判断出来たので、今後は特別な理由がない限り、翌週に解説します。講義資料は前日までに公開することになっていますが、宿題を解説する動画は授業が始まってから公開します。
- 宿題 4 を出します。締め切りは 6 月 15 日 (月曜)13:30 です。それ以降 6 月 17 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい (`katurada` あっとまーく `meiji.ac.jp`)。
- これからアンケートは、何か特別に尋ねたいことがある場合のみ行います。質問や相談等は宿題余白に書くか、質問用 Zoom ミーティングで尋ねて下さい。

パラシュート降下 (2.6 で覚えるべきことをこの 1 枚で)

パラシュート降下 (2.6 で覚えるべきことをこの 1 枚で)

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \big|f(x) - f(x')\big| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

パラシュート降下 (2.6 で覚えるべきことをこの 1 枚で)

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは??

パラシュート降下 (2.6 で覚えるべきことをこの 1 枚で)

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in I)(\forall x' : x'\in I\wedge|x-x'|<\delta)\quad \big|f(x)-f(x')\big|<\varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは??

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

パラシュート降下 (2.6 で覚えるべきことをこの 1 枚で)

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは??

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

1 年生は、そんなの知らない、というのが当たり前。しかし、内容は分からなくても、否定条件を書くことは簡単である。

パラシュート降下 (2.6 で覚えるべきことをこの 1 枚で)

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは??

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

1 年生は、そんなの知らない、というのが当たり前。しかし、内容は分からなくても、否定条件を書くことは簡単である。

解答

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in I)(\exists x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| \geq \varepsilon$$

パラシュート降下 (2.6 で覚えるべきことをこの1枚で)

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは??

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

1年生は、そんなの知らない、というのが当たり前。しかし、内容は分からなくても、否定条件を書くことは簡単である。

解答

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in I)(\exists x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| \geq \varepsilon$$

パラシュート降下 (2.6 で覚えるべきことをこの 1 枚で)

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \land |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは??

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

1 年生は、そんなの知らない、というのが当たり前。しかし、内容は分からなくても、否定条件を書くことは簡単である。

解答

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in I)(\exists x' : x' \in I \land |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| \geq \varepsilon$$

自分が理解していない理論を使った議論はわからなくても、そこに現れる数式の計算自体はできることが珍しくない。論理についても、式で表現してあれば、(意味がわからなくても) その計算は機械的にできる。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題

以下の (1)〜(7) が任意の述語 $P(x)$, $Q(x)$. $P(x,y)$ について成り立つ。

特に (1),(2),(3) が重要である。**それ以外はその都度考えれば十分。**

1. $\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\,(\neg P(x))$
「任意の x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「ある x が存在して $P(x)$ が成り立たない」
2. $\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x))$
「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「任意の x に対して、$P(x)$ が成り立たない」
3. $\exists y \forall x\ P(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y\ P(x,y)$　　(同値でないことだけでも覚える)
4. $\forall x \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y \forall x\ P(x,y)$
5. $\exists x \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y \exists x\ P(x,y)$

((3),(4),(5) は前回もチラッと出て来た。)

(このスライドはあまり気にしなくて良い)

6. $\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x)) \land (\forall x\ Q(x))$
7. $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\exists x\ P(x)) \lor (\exists x\ Q(x))$

(6) で $\land$ の代わりに $\lor$ としたものは成り立たない。

$$\forall x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x)) \lor (\forall x\ Q(x)) \quad \text{(真とは限らない)}$$

(7) で $\lor$ の代わりに $\land$ としたものは成り立たない。

$$\exists x(P(x) \land Q(x)) \equiv (\exists x\ P(x)) \land (\exists x\ Q(x)) \quad \text{(真とは限らない)}$$

(例えば整数について考えていて、$P(x)$ は「x が偶数である」, $Q(x)$ は「x は奇数である」とすると、偽であることが分かる。)

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

上にあげた法則は、付帯条件つきでも成り立つ。(1), (2) の付帯条件つきバージョンは

1. $\neg\left((\forall x : P(x))\, Q(x)\right) \equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x)$
2. $\neg\left((\exists x : P(x))\, Q(x)\right) \equiv (\forall x : P(x)) \neg Q(x)$

(i) の証明

$$\begin{aligned}
\neg\left((\forall x : P(x))\, Q(x)\right) &\equiv \neg\left(\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))\right) \\
&\equiv \exists x \neg (P(x) \Rightarrow Q(x)) \\
&\equiv \exists x \neg (\neg P(x) \vee Q(x)) \\
&\equiv \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \\
&\equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x).
\end{aligned}$$

(ii) も同様に証明できる。興味あればやってみよう (解答はこの PDF の最後)。

論理式における演算の結合の優先順位 (1)

複数の論理記号が含まれる式を書くとき、結合の順番を表すために括弧を用いる。例えば、$p \land (q \lor r)$ と $(p \land q) \lor r$.

しかし、括弧が多いと式が読みにくくなるので、数の四則演算でそうしたように、論理式についても、括弧を減らすために、演算に優先順位を設けて、括弧を適度に省略する。

ある本によると、優先順位の高い順に

1. $=$, $\in$
2. $\neg$, $\forall x$, $\exists x$
3. $\land$, $\lor$
4. $\Rightarrow$
5. $\Leftrightarrow$, $\equiv$

($\Leftrightarrow$ はテキストによっては、$\Rightarrow$ と同じ、となっている。)

論理式における演算の結合の優先順位 (2)

例えば、

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv (\neg(\neg q)) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p) \equiv (\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

において、上のルールを採用すると、すべての括弧が省略できる。

上のルールにおいても、$\wedge$ と $\vee$ は同じ優先順位なので、$\wedge$ と $\vee$ が混じる式では、やはりカッコ () をつけることが必要であることに注意しよう。($\wedge$ を論理積、$\vee$ を論理と呼ぶせいか、数の演算との類推から $\wedge$ を優先して、$(p \wedge q) \vee r$ を $p \wedge q \vee r$ と書ける、と誤解している人が多いような気がするが、そうではない。)

この講義では (練習時間は取れないので) 括弧を省略しない。
(ただし、$\equiv$ の優先順位が一番低いことは仮定している。)
理解している自信がある人が括弧を省略するのは認める。

いよいよ第 2 部　II.1 はじめに

集合は割と新しい。

Georg Cantor (1845–1918) が創始者。色々難しいことをやった。

ここでは数学の言葉としての集合を習得することが目的である。

次のキーワードは覚えておくべき (？)

素朴な集合論 $\longleftrightarrow$ **公理的集合論**

II.2 集合の定義、要素

集合 (set) とは、範囲が明確に定まったものの集まりのことである。

ただし、1 個だけでも集合である。また 0 個でも集合である (後で説明する空集合)。

$A, B, \cdots$ などの文字で表す (大文字を使うことが多い)。

集合 A に属するものを A の**要素**あるいは**元**(げん)とよぶ (どちらも英語の element の訳)。

a が集合 A の要素であることを

$$a \in A \quad \text{あるいは} \quad A \ni a$$

と表し、「a は A に属する」,「a は A に含まれる」, "a belongs to A", "a is in A", 「A は a を含む」, "A includes a", "A contains a" などという。なるべく最初の「a は A に属する」を使うことにする。

$a \in A$ の否定は、$a \notin A$ あるいは $A \not\ni a$ と表す。

例

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$　*(覚えているかな？)*

例

「大きい数の全体の集合」は *NG*.

例

$1 \in \mathbb{N},\ -1 \notin \mathbb{N},\ -1 \in \mathbb{Z},\ \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z},\ \frac{1}{3} \in \mathbb{Q},\ \sqrt{3} \notin \mathbb{Q},\ \sqrt{3} \in \mathbb{R},\ i \notin \mathbb{R},\ i \in \mathbb{C}.$
(ただし i は虚数単位である。)

読み方補足

$x \in A$ を「A に属する x」, "x which belongs to A" と読むのが適当な場合がある。

「任意の $x \in A$ に対して、$x \in B$」は「A に属する任意の x に対して x は B に属する。」あるいは「A の任意の要素 x に対して x は B に属する。」

その他の例をあげる。

$x \in \mathbb{R}$ を「$\mathbb{R}$ に属する x」, 「実数 x」と読む。

$x > 0$ を「正の数 x」と読む。

II.3 集合の相等

2 つの集合 A と B に対して、

$$\forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$$

が成り立つとき、A と B は**等しい**と定義し、$A = B$ で表す。

⇔ を用いると

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

と書くこともできる。

教科書では、A と B が等しいとは

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

が成り立つこと、と書いてあるが、$\forall x$ が省略されていると考えるべき。

$A = B$ の否定は $A \neq B$ で表す。

II.4 集合の表し方, II.4.1 要素をすべて書き並べる方法 (外延的定義)

要素を書き並べて (複数あるときは , で区切る)、{} (braces) で囲む。

例

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0\}$.
このとき $1 \in A$. しかし $0 \notin A$.

順番は不問にする (変えても同じ集合), 重複も認める

例

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}.$$

この方法は、要素が無限にたくさんあるときは困る。

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

と書くこともあるが、あいまいなことは否めない。

条件 $P(x)$ を満たす x 全体の集合は

$$\{x \mid P(x)\}$$

で表す。本によっては $\{x; P(x)\}$, $\{x : P(x)\}$ とも書く。

例

$\{x \mid x$ は実数$\}$
$\{y \mid y$ は 1 以上 3 以下の自然数$\}$
$\{n \mid n$ は自然数かつ 2 で割り切れる$\}$

例

$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 0\}$

1 つの集合を表す内包的定義の書き方は無数にある。

例

$$
\begin{aligned}
\{1, 2, 3\} &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ かつ } 1 \leq x \leq 3\} \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \ \mathit{and}\ 0.3 < x < 3.7\} \\
&= \{x \mid x = 1 \lor x = 2 \lor x = 3\} \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R} \land (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}
\end{aligned}
$$

問 2, 問 3 解説

これは手書きで説明します。

おまけ　$\neg(\exists x : P(x))\, Q(x) \equiv (\forall x : P(x)) \neg Q(x)$ の証明

$$
\begin{aligned}
\neg((\exists x : P(x))\, Q(x)) &\equiv \neg(\exists x (P(x) \wedge Q(x))) \\
&\equiv \forall x \neg (P(x) \wedge Q(x)) \\
&\equiv \forall x ((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x))) \\
&\equiv \forall x (P(x) \Rightarrow \neg Q(x)) \\
&\equiv (\forall x : P(x)) \neg Q(x). \quad \square
\end{aligned}
$$

(解説) この証明では、次の 3 つのことを使っている。

- $(\exists x : P(x)) Q(x) \equiv \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
- $(\forall x : P(x)) Q(x) \equiv \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$
- $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$