

数理リテラシー 問 11 (2018 年 7 月 11 日出題, 7 月 16 日 13:30 レポート BOX に提出)

__年__組__番 氏名_____ (担当桂田) 裏面利用可

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) で定めるとき, 以下の問に答えよ。 $[-2, 1]$, $[-1, 3]$ は \mathbb{R} の区間を表す。

- (1) f の逆写像 f^{-1} は存在しない。その理由を述べよ。
- (2) $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ に対して、 $f(A)$, $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。それぞれ何と呼ばれるか。
- (3) $f(\{1\})$, $f(\{-2\})$, $f(\{-2, 1\})$, $f([-2, 1])$, $f(\emptyset)$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{-2\})$, $f^{-1}(\emptyset)$, $f^{-1}([-1, 3])$ を求めよ (f を含まない式で表せ)。

問 11 解説

- (1) $f(1) = f(-1)$ であるから、 f は単射でない。ゆえに f は全単射でないから、 f の逆写像は存在しない。

(解説) 一般に「 f の逆写像が存在 $\Leftrightarrow f$ は全単射」が成り立つので、 f が全単射でないことを示せば良い。「全単射でない \Leftrightarrow 単射でない、または全射でない」なので、単射でないこと、または全射でないこと、どちらか一方を示せば十分である(両方やった人もいるけれど、それは余計なこと)。

- (2) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ (あるいは、本当はこちらの方がきちんとした書き方だけど、 $f(A) = \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\}$). f による A の像 (または順像) と呼ぶ。

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\}$. f による B の逆像 (または引き戻し) と呼ぶ。

(解説) $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ と書いた人が多いけれど、問題文のどこにも X は出てこないなので、それはマズイ (まあ大目に見るけれど)。 X でなく \mathbb{R} と書くべきである。

- (3)

$$f(\{1\}) = \{f(x) \mid x \in \{1\}\} = \{f(x) \mid x = 1\} = \{f(1)\} = \{1\},$$

$$f(\{-2\}) = \{f(-2)\} = \{4\},$$

$$f(\{-2, 1\}) = \{f(x) \mid x \in \{-2, 1\}\} = \{f(x) \mid x = -2 \vee x = 1\} = \{f(-2), f(1)\} = \{1, 4\},$$

$$f([-2, 1]) = \{f(x) \mid x \in [-2, 1]\} = \{x^2 \mid -2 \leq x \leq 1\} = [0, 4],$$

$$f(\emptyset) = \emptyset,$$

$$f^{-1}(\{3\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{3\}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 3\} = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\},$$

$$f^{-1}(\{-2\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{-2\}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -2\} = \emptyset,$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$$

$$f^{-1}([-1, 3]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-1, 3]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x^2 \leq 3\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]. \blacksquare$$