2018 年度 数理リテラシー 中間試験問題

2018 年 6 月 20 日 4 限施行 (15:25〜17:00 の予定), 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1.　次の各文を記号のみを用いて表せ。ただし、p, q は命題であり、A, B, X は集合である。
(1) -2 は自然数ではないが整数であり、$\sqrt{2}$ は有理数ではないが実数である。　(2) $z^2+2=0$ を満たす複素数 z が存在する。　(3) 「p ならば q である」は「p でないか、または q である」と同値である。　(4) A と B の合併集合が X に等しいためには、B の補集合が A に含まれることが必要十分である。　(5) 任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、$x+y=0$ が成り立つ。

2.　(1) 真理値表を用いて、$\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$, $\neg(p\wedge q)\equiv(\neg p)\vee(\neg q)$ を示せ。
(2) 「p ならば q である」の否定が「p であり、かつ q ではない」と同値であることを示せ。証明の方法は自分で選んで良い。

3.　次の各命題の真偽を述べ、真である場合は証明し、偽である場合はその否定命題を証明せよ。
(1) $(\forall x\in\mathbb{Z})\ (\exists y\in\mathbb{Z})\ x>y$　　(2) $(\forall x\in\mathbb{N})\ (\exists y\in\mathbb{N})\ x>y$

4.　アルキメデスの公理「$(\forall a>0)(\forall b>0)(\exists n\in\mathbb{N})\ na>b$」を用いて、$(\forall x>0)\ (\exists n\in\mathbb{N})\ \dfrac{1}{n}<x$ を示せ。

5.　(1) 次の各命題の真偽を述べよ。(a) $\emptyset\in\{\emptyset\}$　(b) $\{\emptyset\}\in\{\emptyset\}$　(c) $\{\emptyset\}\subset\{\emptyset\}$

(2) X を全体集合、A と B を X の部分集合とするとき、$A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, A^c, $A\times B$, 2^A の定義を書け。また、それぞれを何と呼ぶか答えよ。

(3) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$ とするとき、$A\times B$, 2^A を求めよ (要素を全て書き並べる方法で表せ)。

(4) $A=\emptyset$ とするとき、$B:=2^A$, $C:=2^B$ を求めよ。

6.　(1) 集合族 $\{A_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ の合併集合 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, 共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ の定義を書け。

(2) 集合族 $\{A_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ が $(\forall n\in\mathbb{N})\ A_n\supset A_{n+1}$ を満たすとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=A_1$ であることを示せ。

(3) $A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ 0<x\le\dfrac{1}{n}\right\}$ $(n\in\mathbb{N})$ とするとき、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ を求めよ。

7.　X を全体集合、A, B, C を X の部分集合とするとき、以下の命題を証明せよ。
(1) $A\cap B\subset A$　(2) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$　(3) $A\cap B=\emptyset\Leftrightarrow A\subset B^c$

注意事項

この面を表にして配ります。試験開始まで裏返さないこと。

- 筆記用具と時計以外はカバンにしまって下さい。
- 15:25 に試験を始め、17:00 に終了する予定です。もし始まりが遅れたら、その分終わりの時間もずらします。
- 問題は好きな順に解答して構いません。ただし一つの大問の解答は一ヶ所にまとめること。
- 解答用紙は裏面も使用して構いません。なるべく解答用紙 1 枚で済ませること。どうしても足りなくなった場合は試験監督に申し出ること。
- 遅刻は開始してから 30 分 まで認めます。開始してから 40 分後から試験終了 10 分前までは途中退室を認めます (手をあげて試験監督に知らせ、解答用紙を渡し、静かに荷物をまとめて退室して下さい)。

2018 年 7 月 4 日

講評・解説　最初に言っておく。

ギブアップも油断もしないこと。

数理リテラシーで中間試験をする理由の第一は、この後どのように学習するかの参考にしてもらうためである。(単に成績をつけるだけならば、期末試験だけで十分である。学習効果を考えている。) 自分の理解度・学習進度、弱点を把握して、この後の学習に生かしてもらいたい。

勉強は個人がするものではあり、人によって様子が異なるのは当たり前だが、それでも総じて次のことが言える。

- 早い段階で学んだことは (その後も時々出て来るせいか) 習熟度が高い。問題は (1 番を除き) ほぼ学習した時間順に並んでいるので、前の番号ほど得点が高めである。
  自分の答案を見て、どの辺が理解不十分になっているか、確認しよう。後半の問題は出来が悪くても (しかたない)、期末試験で同じような問題が出題されたら、解けるように準備すること。
- 宿題を通して注意したことについて、比較的よく対応してくれたという印象がある (例えば文字・記号はかなり読みやすくなっている)。宿題で注意されたことが修正されていない人も少数いるが、しっかり反省して直してもらいたい。
- 証明問題にてこずる人が多い。それは割と普通のことであるが、「こういう問題は、まずこうしてみよう」と言ったことを守れていない人が多い (いつもそれで解決するわけではないが、それが出来るようになることが第一歩なので、試験ではそれで解決する問題を相当な率で選んでいる)。その点はとても不満である (素直に言うことを聞いてほしい)。繰り返しになるが、
  - 量称記号 $\forall, \exists$ で表された命題を証明を書くとき、次の手順が有効なことが多い。(i) 式に書かれた順番を守る、(ii) $\forall x$ が来たら「x を任意の○○とする」と書く、(iii) $\exists x$ が来たら以下に書かれている条件を満たす x の発見問題と考える。
  - 集合の包含関係 $A \subset B$ の証明を書くとき、次の手順が有効なことが多い。「x を A の任意の要素とすると」あるいは「$x \in A$ とすると」から始めて、ゴールは「$x \in B$」、その間を埋める作業をする。
  - 集合の等式 (相等関係) $A = B$ の証明を書くとき、($A \subset B$ と $B \subset A$ を示せば良いので)、$x \in A$ から $x \in B$ を導くこと、$x \in B$ から $x \in A$ を導くこと、の両方をすれば良い。

140 点満点。4 は 10 点、5 は 28 点、6 は 22 点で、他はすべて 20 点。

答案用紙はコピーしてあるので、採点結果についてメールでも問い合わせ可能。

解答

1.

(1) $-2 \notin \mathbb{N} \land -2 \in \mathbb{Z} \land \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \land \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. または $-2 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \land \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(2) $(\exists z \in \mathbb{C})\ z^2 + 2 = 0$

(3) $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \lor q$

(4) $A \cup B = X \Leftrightarrow B^c \subset A$

(5) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$

2.

(1) 真理値表を書く。

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

どちらも、4 列目と 7 列目の真偽が一致するので $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$, $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.

(2) (同値変形で証明する。) $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$ であるから、

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg((\neg p) \vee q) \equiv \neg(\neg p) \wedge (\neg q) \equiv p \wedge (\neg q).$$

ゆえに $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q)$. ■

解説　今回は (2) で解き方を指定しなかったけれど、もし「同値変形で解け」と言われたら出来るようにしておいて下さい。

3.

(1) 真。(証明) x を任意の整数とするとき、$y = x - 1$ とおくと、y は整数であり、$x > x - 1 = y$ であるから $x > y$.

(2) 偽。否定命題は $(\exists x \in \mathbb{N})\ (\forall y \in \mathbb{N})\ x \leq y$. (証明) $x = 1$ とおくと x は自然数であり、任意の自然数 y に対して、$x = 1 \leq y$ であるから $x \leq y$. ■

解説

(1) は 「どんな◯数に対しても、それより大きい (小さい) ◯数がある。」。類題を授業でもやったし、過去問にも頻繁に登場している。証明もワンパターンである。

(2) (1) と似ているけれど、(1) の証明中の $y = x - 1$ が自然数にならないことがある。つまり $x = 1$ のとき、$y = 0$ でこれは自然数ではない。これに気づけば、否定命題の証明を最初から見当がつくだろう。

否定命題は、$(\forall y \in \mathbb{N})\ x \leq y$ を満たすような自然数 x が存在する、つまり自然数の最小値 x がある、という主張である。そういう意味が読み取れれば、$x = 1$ であることが分かる。

4.　x を任意の正の数とするとき、アルキメデスの公理によって、ある自然数 n が存在して、$n \cdot x > 1$. 両辺を $n (> 0)$ で割って $x > \dfrac{1}{n}$. ■

5. (1) 真, 偽, 真

(2)

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$. A と B の合併集合 (または和集合).
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$. A と B の共通部分 (または積集合, 交わり).
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. A と B の差集合.
- $A^c = \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\}$. A の補集合.
- $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$. A と B の直積集合.
- $2^A = \{C \mid C \subset A\}$. A の冪集合.

(3) $A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$, $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2,3\}\}$.
(4) $B = \{\emptyset\}$, $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

解説

(1) 宿題そのものだけど、相変わらず間違えた人が多い。

(a) a がどういう数学的対象であっても、$a \in \{a\}$ は真である ($\{a\}$ の定義により、a は $\{a\}$ の要素である)。$a = \emptyset$ でも、もちろん成り立つ。ゆえに $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

(b) 任意の数学的対象 x, a に対して、$x \in \{a\} \Leftrightarrow x = a$ が成り立つ。ゆえに $\{\emptyset\} = \emptyset$ であるか？という問になる。$\{\emptyset\}$ は要素が 1 個存在するので、空集合ではない。$\{\emptyset\} \neq \emptyset$. ゆえに $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}$.

(c) 任意の集合 A に対して、$A \subset A$ が成り立つ。$\{\emptyset\}$ は集合だから、当然 $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset\}$.

(2) さすがに出来は良かった。

(3) 2^A は出来たけれど、$A \times B$ が出来ない人が少なくない。全体を $\{\}$ でくくるのを忘れたり、順序対 $(1,4)$ でなくて集合 $\{1,4\}$ にしてみたり。宿題と同じミスをしているとしたら、学習の姿勢に反省が必要。

(4) マンネリ気味なので、新しい問題を作ってみたら、大勢の人が間違えた。$B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ という間違いが多かった。空集合の部分集合は空集合しかないので、$B = 2^A = 2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. 要素数チェックをすると: A の要素数は 0 だから、$B = 2^A$ の要素数は $2^0 = 1$ のはず。　　空集合は意外に難しいね。

6.

(1) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}$.

(2) (任意の x に対して) $x \in \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ とすると、ある自然数 n が存在して、$x \in A_n$. 仮定より $A_n \subset A_{n-1} \subset A_{n-2} \subset \cdots \subset A_2 \subset A_1$ であるから、$x \in A_1$. ゆえに $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A_1$.

(任意の x に対して) $x \in A_1$ とすると、$n = 1$ とおいたとき、$n \in \mathbb{N}$ かつ $x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_1 \subset \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

以上より $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$.

(3) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ である。もしも $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ と仮定すると、ある $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が存在する。任意の自然数 n に対して、$x \in A_n$. ゆえに $0 < x \le \dfrac{1}{n}$. $x > 0$ であるから、アルキメデスの公理によって、ある自然数 N が存在して、$\dfrac{1}{N} < x$ (問題 4 で証明した). これは任意の自然数 n に対して $x \le \dfrac{1}{n}$ であることに矛盾する。ゆえに $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. ■

解説　(1) はほぼ毎回出題している問題。間違えているケースは 2 つ。(a) そもそも集合になっていない。(b) $\forall$ と $\exists$ を逆にしている。

(2) と (3) は集合の等式の証明。(2) は割と標準的な証明が有効 ($x \in A$ と仮定して $x \in B$ を示す, $x \in B$ と仮定して $x \in A$ を示す) である。それをしている人は少しミスをしていても、どんまい、次回頑張って。標準的でないことをして失敗した人はやり方を改めること。(3) は空集合で、証明は少し変則的で難しいかも ($x \in \emptyset$??)。背理法を使うのが多分簡単。■

7.

(1) (任意の x に対して) $x \in A \cap B$ とすると、$x \in A$ かつ $x \in B$. ゆえに $x \in A$ であるから、$A \cap B \subset A$.

(2) (任意の x に対して)

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \cup C &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) && \text{(論理の分配法則を用いた)} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \wedge (x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)
\end{aligned}$$

であるから、$(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(3)

$$\begin{aligned}
A \cap B = \emptyset &\Leftrightarrow \neg\left((\exists x) x \in A \cap B\right) \\
&\Leftrightarrow \neg\left((\exists x) x \in A \wedge x \in B\right) \\
&\Leftrightarrow (\forall x) \neg\left(x \in A \wedge x \in B\right) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(x \in A)) \vee (\neg(x \in B)) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(x \in A)) \vee x \in B^c \\
&\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B^c) \\
&\Leftrightarrow A \subset B^c. \blacksquare
\end{aligned}$$

解説　(1) と (2) は集合の等式の証明なので、こちらとしては例の「$x \in A$ とすると…$x \in B$, $x \in B$ とすると $x \in A$」をやってほしい。

(1) は、$p \wedge q$ が真ならば、「かつ」($\wedge$) の定義によって、p が真、というのを使うということで、簡単なはずだけど、苦労していた人が多い (簡単なことほど、何をやったら証明になるのか分かりにくい…基本に立ち返ってみよう)。

(2) で

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup C &= \{x \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C\} \\
&= \{x \mid (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\
&= (A \cup C) \cap (B \cup C)
\end{aligned}
$$

のようにする答案が意外と多かった。上の解答例と本質的に同じと言えるけれど、式を書くのが面倒なのか、はしょっているのがほとんどだった。

(3) は色々な答えの書き方があるけれど (上のはあくまでも一例)、とにかく自力で出来れば、この段階としては、十分なレベルに達したと (個人的に) 考えている。