微分方程式入門

桂田 祐史

2004 年 3 月, 2024 年 4 月 29 日

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kiso4/kiso4ode.pdf

目 次

1 微分方程式とは何か？ 6

1.1 例 . . . 6

1.1.1 自由落下 . . . 6

1.1.2 単振動 (調和振動) . . . 7

1.2 基本的な用語 . . . 8

2 変数分離形微分方程式 11

2.1 解き方 . . . 11

2.2 例 . . . 12

3 1 階線型微分方程式, 定数変化法 18

3.1 同次方程式の解法 . . . 18

3.2 非同次方程式の解法 . . . 20

4 変数分離形, 1 階線形に帰着できるもの 22

4.1 同次形方程式 . . . 22

4.2 ベルヌーイ (Bernoulli) の方程式 . . . 23

4.3 リッカチ (Riccati) の方程式 . . . 23

4.4 その他 . . . 23

5 定数係数 2 階線型常微分方程式 (1) 同次方程式の解法 24

5.1 定義と例 . . . 24

5.2 特性方程式, 特性根 . . . 25

5.3 相異なる特性根を持つ場合 . . . 26

5.4 特性根が重根である場合 . . . 27

5.5 特性根が虚数である場合 . . . 28

5.6 まとめ . . . 32

6 定数係数 2 階線型常微分方程式 (2) 非同次方程式と重ね合せの原理 32

6.1 重ね合せの原理 . . . 33

6.2 「特解を求めればよい」原理 . . . 34

6.3 簡単な特解の発見法 (未定係数法) . . . 35

7 定数係数 2 階線型常微分方程式 (3) 非同次方程式の特解の求め方 36

8 初期値問題の基礎理論 39
8.1 はじめに . . . 39
8.2 解の存在 . . . 39
8.3 解の存在範囲 . . . 40
8.4 解の一意性 . . . 43
8.4.1 初期値問題の解の一意性のありがたみ . . . 44

A そのほか 49
A.1 階数低下法 . . . 49
A.2 完全微分方程式 . . . 49

B 定数係数 2 階線型非同次方程式の特解の発見法 49
B.1 定数変化法 . . . 49
B.2 演算子法 . . . 51
B.3 Laplace 変換の利用 . . . 52
B.4 微分演算子の因数分解に基づき一階ずつ積分していく方法 . . . 52
B.5 Green 関数を用いる方法の n 階方程式への拡張 . . . 53

C 最近の情勢 53

D 2003 年度基礎数学 IV のメモ 54
D.1 ガイダンス . . . 54
D.1.1 今日からパート 2 . . . 54
D.1.2 勉強の仕方 . . . 54
D.2 基礎数学 IV の微分方程式のあらすじ (授業最後のまとめ) . . . 54

E 定数係数 2 階線型非同次方程式の特解の発見法 56
E.1 定数変化法 . . . 56
E.2 演算子法 . . . 58
E.3 Laplace 変換の利用 . . . 59
E.4 畳み込みを用いる方法 . . . 59
E.5 Green 関数を用いる方法の n 階方程式への拡張 . . . 63

F Laplace 変換 64
F.1 定義と基本的な公式 . . . 65
F.2 計算例 . . . 70
F.3 存在条件 . . . 73
F.4 Fourier 変換との関係, 逆 Laplace 変換 . . . 74
F.5 Laplace 変換の逆変換の積分の留数計算 . . . 75
F.6 超関数の Laplace 変換 . . . 77
F.7 作用素半群 . . . 78
F.8 公式 . . . 79

G 定数係数線型常微分方程式 79
G.1 作用素代数 . . . 80
G.2 微分演算子 D . . . 82

G.3 準備 . . . 83
G.3.1 畳み込み . . . 83
G.3.2 関数 $e_{m,\alpha}$ . . . 85
G.4 方程式 $(D-\alpha)^m u = f$ . . . 86
G.5 一般の方程式 $p(D)u = f$ の場合 . . . 88
G.5.1 2 階の場合の特解の求め方の説明 . . . 93
G.6 終りに？ . . . 95

H 定数係数 2 階線型同次方程式の解法 (がらくた箱?) 95
H.1 なぜこの節があるか . . . 95
H.2 第一積分を利用する . . . 96
H.2.1 1 階微分の項がなければ第一積分がすぐ求まり解決 . . . 96
H.2.2 1 階微分の項がある場合は変数変換で消去 . . . 97
H.3 定数係数 1 階線型方程式の解の公式を用いて一回ずつ積分する方法 . . . 98
H.4 一意性を素朴に証明 . . . 100
H.4.1 方針 . . . 100
H.4.2 $y'' + \omega^2 y = 0$ の場合 . . . 100
H.4.3 $y'' = 0$ の場合 . . . 100
H.4.4 $y'' - \omega^2 y = 0$ の場合 . . . 100
H.5 一意性定理を用いる証明 . . . 101
H.6 演算子を駆使する方法 . . . 102
H.7 どれが良いか . . . 102

I 演習問題 103
I.1 変数分離形 . . . 103
I.2 一階線型微分方程式 . . . 105
I.3 定数係数 2 階線型非同次方程式 . . . 109

J 微分方程式歴史覚え書き 111
J.1 微分方程式のはじまり — Newton . . . 111

K 数式処理系で常微分方程式の一般解を求める 112
K.1 変数分離形 . . . 112

L Kepler 運動 115

M 水素原子のエネルギー準位 115

N 適切性 115
N.1 一意性 . . . 115

O 問題 116
O.1 2003 年度基礎数学 IV 練習問題 . . . 116
O.1.1 問題 . . . 117
O.1.2 解答と解説 . . . 117
O.2 2003 年度基礎数学 IV 期末試験 . . . 121
O.2.1 問題 . . . 121
O.2.2 解答 . . . 122

O.3 2007 年度「微分方程式」参考問題 125
O.4 2007 年度「微分方程式」期末試験 128
O.4.1 問題 128
O.4.2 解答 129

P 参考文献案内 **133**
P.1 1 年生にむけて 133
P.1.1 参考書 133

はじめに

これは明治大学理工学部 1 年生向けの基礎数学 IV の中の常微分方程式の講義内容を作るためのノートである。この文書から必要なものを抜き出して、教科書を作るつもりである。実は既に抜粋して一応の体裁は整えた。その内容をこちらに書き戻すのはやめておく (そちらの内容はフリーにしておくのが困難かもしれないので)。

記号表

$\exp x$	指数関数 e^x
$\log x$	x の自然対数 ($y=\log x \Leftrightarrow x=e^y$)
$\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$	それぞれ x の余接 $=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, x の正割 $=\dfrac{1}{\cos x}$, x の余割 $=\dfrac{1}{\sin x}$
$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$	それぞれ sin, cos, tan の逆関数 (しばしば $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書かれる)
$\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctan} x$	それぞれ $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ の主値 ($[-\pi/2,\pi/2]$, $[0,\pi]$, $(-\pi/2,\pi/2)$ の範囲の値)
$y\equiv 0$	定義域に属するすべての変数の値 x について $y(x)=0$.

この講義の目標

- 扱うのは独立変数が 1 個の場合 (**常微分方程式**) に限定する。
- 式変形 (**求積法**) で具体的に解ける問題に限定する。特に次の二つが重要である。
  1. 変数分離形の常微分方程式
  2. 定数係数線型常微分方程式 (単振動の方程式が身近な例)
     (a) 同次方程式の解法 (特性根の方法) のマスター
     (b) 重ね合せの原理の理解
     (c) 複素数に慣れる

1　微分方程式とは何か？

未知関数とその導関数を含む方程式を**微分方程式** (differential equation) という[1]。

微分方程式は微分積分学とほぼ同じくらいの長い歴史を持つ[2]。当初は主に物理学由来の問題 (有名なものは、万有引力の働く二つの天体の運動に関する Kepler 問題) を解くために使われたが、今では他の自然科学 (化学, 生物学, ⋯), 工学, 医学, 農学はもちろん、経済学など社会科学の分野にも広く応用されている。特に近年コンピューター・シミュレーションが普及したため、その適用範囲はますます広がっている。

1.1　例

物理的イメージのわきやすい例を二つほどあげる。

1.1.1　自由落下

質点を**自由落下**させたとき、時刻 t における高さを $h(t)$ とすると、速度は $h'(t)$, 加速度は $h''(t)$ である (これは速度や加速度の定義であると考えると良い)。

適当な理想化のもとでは[3]

$$h''(t) = -g \tag{1.1}$$

が成り立つ。ここで g は重力加速度とよばれる正の定数である (MKS 単位系で $g \fallingdotseq 9.8\mathrm{m/s}^2$ という値を持つ)。

(1.1) を t で積分すると

$$h'(t) = \int h''(t)dt = -gt + C_1. \tag{1.2}$$

ここで C_1 は積分定数である。これをもう一度積分すると

$$h(t) = \int h'(t)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2. \tag{1.3}$$

この C_2 も積分定数である。

(1.2) に $t = 0$ を代入することで

$$C_1 = h'(0).$$

つまり C_1 は時刻 0 における速度に他ならない。力学の習慣に従って v_0 という記号で表すことにする。

$$C_1 = h'(0) = v_0.$$

一方 (1.3) に $t = 0$ を代入して、

$$C_2 = h(0).$$

つまり C_2 は時刻 0 における高さである。これを h_0 という記号で表すことにすると

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0.$$

---

[1]これは正確とは言いかねる説明だが、とりあえずはこれで我慢しておこう。
[2]微分積分学を確立したニュートン (Sir Isaac Newton, 1642–1727) が微分方程式の創始者と考えられる。
[3]まず空気抵抗が無視できるとする。また重力加速度は本当は場所により変化するがそれも無視する。

以上の計算を振り返ると、物体の高さ $h(t)$ について、

$$h''(t) = -g \tag{1.4}$$

を満たすという条件から、その具体的な形

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$$

を見出したことになる。このように未知関数 (ここでは $h(t)$) の導関数 (ここでは 2 階導関数 $h''(t)$) についての方程式 (1.4) を微分方程式とよぶ。$h(t)$ のことをこの微分方程式の解とよぶ。ここでは積分の計算をすることで解が得られた。

(この問題を ($v_0 = 0$, $h_0 = 0$ の場合に) 初めて解いたのは有名なガリレオ (Galileo-Galilei[4], 1564–1642) である。彼の時代には微分積分学がまだなかったので、解決には大変な困難があった。)

1.1.2 単振動 (調和振動)

数多くの振動現象が、**単振動の方程式**とよばれる微分方程式

$$x''(t) = -\omega^2 x(t) \quad (\omega \text{ は正の定数})$$

に帰着される。ここで t は時刻で、$x(t)$ はある量の変位 (基準からのずれ) を表す。両辺に $x'(t)$ をかけて移項すると

$$x'(t)x''(t) + \omega^2 x(t)x'(t) = 0.$$

この式の左辺が

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left[x'(t)^2 + \omega^2 x(t)^2\right]\right\}$$

に等しいので、

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left[x'(t)^2 + \omega^2 x(t)^2\right]\right\} = 0.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}\left[x'(t)^2 + \omega^2 x(t)^2\right] = C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

これを $dx/dt = x'(t)$ について解くと

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2C - \omega^2 x^2}.$$

両辺を $\sqrt{2C - \omega^2 x^2}$ で割って、t について積分して

$$\int \frac{1}{\sqrt{2C - \omega^2 x^2}} \frac{dx}{dt} dt = \pm \int dt = \pm t + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}).$$

この等式の左辺は置換積分の公式から

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2C - \omega^2 x^2}}$$

に等しい。$\sqrt{2C}/\omega = a$ とおくと、$\sqrt{2C - \omega^2 x^2} = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$ なので、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2C - \omega^2 x^2}} = \frac{1}{\omega}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}).$$

[4]当時の有名なイタリア人は、姓でなく名前でよばれる習慣があった。

ゆえに $\dfrac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)=\pm t+(C_1-C_2)=\pm(t+C_3)$ であるから (ただし $C_3=\pm(C_1-C_2)$ とおいた)、

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=\pm(\omega t+C_3)\quad (C_3 \text{ は任意定数}).$$

これを x について解くと

$$x=a\sin\left(\pm(\omega t+C_3)\right)=\pm a\sin(\omega t+C_3)=C_4\sin(\omega t+C_3). \tag{1.5}$$

ここで C_3, C_4 は (微分方程式だけからは定まらない) 任意の定数であり、上の例と同様に初期条件等の条件から決定される。この (1.5) から、x は t の周期関数で、その周期は $T=2\pi/\omega$ であることが分かる。後でこの方程式のより見通しが良く、一般性の高い解き方を学ぶ。 ■

1.2 基本的な用語

未知関数とその導関数を含む方程式を**微分方程式**という[5]。

分類

独立変数が 1 個の微分方程式を**常微分方程式** (**ordinary differential equation**), 独立変数が 2 個以上ある微分方程式を**偏微分方程式** (**partial differential equation**) という。以下、このテキストでは常微分方程式のみを扱うことにする (単に微分方程式とよんだら常微分方程式のことを指すとする)。

未知関数も 1 個だけの場合 (**単独方程式**とよばれる) を主に考えるが、これを一般化することはそれほど難しくない。

微分方程式に含まれる最高階の導関数の階数をその微分方程式の**階数** (**order**) という。

例 1.1 自由落下の方程式 $y''=-g$ は 2 階の常微分方程式である。

前項の 2 つの例では、時刻を t, 高さを h, 初速度を v_0 のように、量を表すのに問題の意味に由来する文字を採用したが、以下の説明では、特に断りがない限り、独立変数を x で、未知関数を y で表す。当然導関数 y', y'', $\cdots$, $y^{(n)}$, $\cdots$ は、$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\cdots$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\cdots$ を意味する。

n 階の単独常微分方程式は、一般に

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0\quad (F \text{ は既知の関数})$$

と表すことができる。

最高階の導関数について解かれたもの、つまり

$$y^{(n)}=G(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})\quad (G \text{ は既知の関数})$$

いう形をしている微分方程式を**正規形**の微分方程式という。この講義では正規形の微分方程式のみ扱う。

[5]これは正確とは言いかねる説明だが、とりあえずはこれで我慢しておく。

解

微分方程式を満たす関数をその微分方程式の**解** (solution) といい、解を求めることを微分方程式を**解く** (solve) という。

きちんと定式化して証明を与えるのは容易なことではないので細かいことは省略するが、次の 2 点を指摘しておく。

(A) 微分方程式はたとえ解があっても、それを具体的な式で表せるとは限らない (「解があっても解けない」ことがある)

(B) 微分方程式の解は普通は無数に存在する。

(A) については、例えばもっとも簡単な形の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

において、解を $y = \int f(x)\,dx$ のように不定積分を用いて表せても、これ以上簡単にできない (既知の関数では表現不能な) 場合があることから、難しさを想像できるであろう。実はより一般の微分方程式では、不定積分を使っても解が表せない場合がある (歴史的には**三体問題**[6]の研究などからその困難さが明らかになった)。この問題への対処として、解を表現できるような新しい関数を導入するという手段があり、一定の効果はあるが、そのやり方にも限界がある。微分方程式を解かないで、まず解の存在を確認してから、直接解の性質を調べたりする方法が発達している。この講義では、具体的な式変形で解が求まる (他への応用が効く基本的な) 場合のみを考察する。

(B) については、つぎの簡単な例を見ることで納得できよう。

例 1.2 例えば、$y' = 1$ の解は

$$y = x + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

であり、$y'' = 0$ の解は

$$y = C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

である。(C や C_1, C_2 を変えると別の解が得られるのだから) ともに解は無限個存在するわけである。 ■

多くの場合、値を自由に選ぶことのできる文字 (**任意定数**、あるいはパラメーターとよばれる) を用いて、解の「大部分」をひとまとめに式で表すことができる。そのとき、そのような形で表された解を**一般解**という[7]。多くの場合、一般解は方程式の階数と同じ個数の独立な任意定数を含む。上の例で $y = x + C$ や $y = C_1 x + C_2$ は一般解であり、任意定数の個数はそれぞれ 1, 2 で、確かに方程式の階数に一致している。これに対して、個々の解のことを**特解**という。

一般解としてまとめることのできない仲間外れの解も、ときとして存在する。このような解は**特異解**とよばれる。

線形微分方程式 (定義は後述) では特異解は現れず、一般解はすべての解を表す。この文書では、定数係数の線形微分方程式についてそのことを見ることになる (例 2.3, 命題 5.5 等々)。

[6]太陽、地球、月のように、万有引力に従う 3 つの天体からなる系の運動を明らかにせよ、という問題。二体問題が鮮やかに解けた (予想通り Kepler の法則に従う運動が解となる) のに対して、三体問題は多くの研究者の挑戦にも関わらず長い間解決できず、ついに否定的に解決された (解を具体的に表すことが不可能であることが証明できた)。

[7]「大部分」という言葉があることから、これは数学的な定義とは言いかねるものである。しかし厳密に定義できる言葉しか使わないことにすると、窮屈で説明がしづらくなるので、ここでは慣習に従うことにした。

例 1.3 (この例はあまり適切でないかも。差し換えを考慮。) $(y')^2 = 4y$ の一般解は $y = (x - C)^2$ (C は任意定数)。ところが $y = 0$ (恒等的に 0) も確かに微分方程式の解であるが、これは上の一般解の式には含まれていないので、特異解と言える。さらに

$$y = \begin{cases} 0 & (x \le C) \\ (x - C)^2 & (x > C) \end{cases}$$

も一般解には含まれない。■

初期値問題

微分方程式に、(解を一つに限定するような) 解の満たすべき条件がいくつか加わっている問題を考えることが多い。この講義では、変数の一つの特定の値で、解の 0 階から $n - 1$ 階までの微分係数の値を指定する条件 (**初期条件**) を加えた**初期値問題**を扱う。

例 1.4 「微分方程式

$$h''(t) = -g$$

の解で

$$h(0) = h_0, \quad h'(0) = v_0 \tag{1.6}$$

を満たすものを求めよ」という問題は初期値問題であり、(1.6) が初期条件である。■

一般化すると、n 階の微分方程式

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.7}$$

に

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \cdots, \quad y^{(i)}(x_0) = y_i, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)} = y_{n-1} \tag{1.8}$$

という形の条件 (ここで $x_0, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ は与えられた定数である) を加えて、(1.7), (8.1b) を満たす y を求めよ、という問題を初期値問題とよび、(8.1b) を初期条件という。

n 階常微分方程式の初期値問題 (1.7), (8.1b) では解が一つに決定されることが多い。

解曲線

図形的イメージも大切である。1 階正規形常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

の解を、横軸 x, 縦軸 y の座標平面上に描いてみよう。微分方程式は、解のグラフの傾きが $f(x, y)$ で与えられること、初期条件は解のグラフが点 (x_0, y_0) を通ることを意味する。解のグラフのことを**解曲線**あるいは**積分曲線**とよぶ。

問題[8]

1. つぎの微分方程式の階数を示し、可能なものについては、正規形に直せ。
(1) $x^2y'' + yy' = 3x$ (2) $y'^2 - y^2 - \log(1 + x^2) = 0$ (3) $yy''' = y''^2$ (4) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ (5) $3y^{(4)} - 2y^{(3)} + y + e^x = 0$ (6) $x^2y''' + xy'' + (x^2 - 1)y' = 0$ (7) $y''^2 = k(1 + y'^2)$, k は正の定数。(8) $(x^2y')' + 4x^2y = 0$

[8] 大学数学教育研究会編『大学課程 微分積分学概説 [増補版]』 [1] の p. 88–89 問題 1, 4 から採ったものである。

2. $\dfrac{d}{dx}f(x) = 0$ ならば $f(x) = C$ (C は任意定数) であることを用いて、つぎの微分方程式の一般解を求めよ (a, b などは定数である)。
(1) $xy' + y - 1 = 0$ (2) $xy'' + y' - x = 0$ (3) $x + a^2yy' = 0$ (4) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
(5) $(x+y)(1+y') = x$ (6) $y' = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sec y}{1+x^2}$ (7) $\dfrac{yy'}{\sqrt{a^2-y^2}} = \pm 1$ (8) $\dfrac{y'}{\sqrt{a^2-y^2}} = \pm 1$
(9) $y'(y''+y) = 0$ (10) $xy' - y = x^2 f(x)$ ($f(x)$ は与えられた関数)

3. $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$ ならば $y = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ であることを用いて、次の初期値問題を解け。
(準備中)

2 変数分離形微分方程式

1 階正規形の微分方程式

$$y' = F(x, y)$$

のうちで、右辺が x だけの関数と y だけの関数の積になっている

$$y' = f(x)g(y) \tag{2.1}$$

の形をした微分方程式を**変数分離形**の微分方程式とよぶ。このタイプの方程式は以下に紹介する手順で解を求めることができる (解けない微分方程式が多い中で、非常にありがたいケースであり、出会ったら逃さずに解くべき問題である)。

2.1 解き方

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{2.2}$$

において、$g(y)$ が決して 0 にならないと仮定すると

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x).$$

これを x で積分すると

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx.$$

左辺は置換積分の公式で y についての積分に直せる。

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx. \tag{2.3}$$

(2.2) から (2.3) への変形は次のように形式的に書いて構わない。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \therefore \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \therefore \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

注意 2.1 応用上は $g(y)$ が 0 になることも多い。その場合も上の手順で解が発見できることが多いが、もれてしまう解もあり、分母が 0 となる場合は吟味が必要である。

注意 2.2 なお、ここでは不定積分を使ったが、もちろん定積分で記述することもできる。

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \quad \text{より} \quad \int_{y(x_0)}^{y(x_1)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

初期値問題を解く場合などは、こちらの方が便利なことがしばしばある。

(2.3) で積分を実行して

$$G(y) = F(x) + C \quad (G(y),\ F(x) \text{ はそれぞれ } \frac{1}{g(y)},\ f(x) \text{ の原始関数}, C \text{ は積分定数}).$$

これを y について解くと

$$y = G^{-1}(F(x) + C) \quad (G^{-1} \text{ は } G \text{ の逆関数}).$$

こうして解が得られる。 ■

2.2 例

例 2.3 (定数係数 1 階線形同次方程式 $y' = ay$)

$$\frac{dy}{dx} = 2y. \tag{2.4}$$

これから $\dfrac{dy}{y} = 2\,dx$ であるから、

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2\,dx. \tag{2.5}$$

ゆえに

$$\log|y| = 2x + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}).$$

対数関数と指数関数の関係[9]から

$$|y| = e^{2x+C_1} = e^{C_1}e^{2x} \qquad \therefore \quad y = \pm e^{C_1}e^{2x}.$$

$\pm e^{C_1}$ は 0 以外の値を取りうる任意定数である。これを C とおくと、

$$y = Ce^{2x} \quad (C \text{ は } 0 \text{ 以外の値を取る任意定数}).$$

ところで、(2.5) を導く変形は $y \neq 0$ でなければ正当化されない。そう考えて、式 (2.4) を眺めていると

$$y = 0 \quad (\text{恒等的に } 0)$$

という解を発見することができる。これは $y = Ce^{2x}$ で $C = 0$ とおいたものと考えられる。つまり

$$y = Ce^{2x} \quad (C \text{ は任意定数}) \tag{2.6}$$

という一般解が得られる。実はこれ以外には解は存在しない。実際、y を微分方程式の任意の解とするとき、$y' - 2y = 0$ であるから

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{-2x}\right) = y' \cdot e^{-2x} + y \cdot (-2)e^{-2x} = e^{-2x}(y' - 2y) = e^{-2x} \cdot 0 = 0$$

[9] $e^x = y \Leftrightarrow x = \log y$.

が成り立つので、適当な定数 C が存在して

$$ye^{-2x} = C.$$

これから

$$y = Ce^{2x}.$$

例えば初期条件

$$y(0) = y_0$$

をつけると、

$$y_0 = y(0) = Ce^{2\cdot 0} = Ce^0 = C.$$

ゆえに

$$y = y_0 e^{2x}.\blacksquare$$

注意 2.4 しばしば (2.6) を導くまでの議論で、$y \neq 0$ のときと $y = 0$ のときで場合分けして考えたのだから、それだけで十分である (他に解はあるはずがない) と考える人がいるが、それは誤解である。y は単なる数でなく、関数なので、$y = 0$ と $y \neq 0$ の二つの場合に場合分けするというのは穴がある。y を分母にして計算し続けるということは、y が決して 0 にならないことを仮定しているわけだが、一方で、「$y = 0$ も解」というときの $y = 0$ は、y が恒等的に 0 に等しい (定数関数 0) ということを意味している。実はそれ以外に、y は x の値によっては 0 になったり、0 でなかったりする、という第三の場合がありうるので、場合分けとしては (もれがあって) 不完全である。例えば

$$y' = 3y^{2/3} = 3\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \tag{2.7}$$

を考えてみよう。変数分離形微分方程式の解法の定跡に従って (分母が 0 になるのを気にせずに) 計算すると

$$y = (x - C)^3 \quad (C \text{ は任意定数})$$

が得られる。一方、

$$y = 0 \quad (\text{恒等的に } 0)$$

も微分方程式の解である。ところが、それ以外に

$$y = \begin{cases} (x - C_1)^3 & (x < C_1) \\ 0 & (x \geq C_1), \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 0 & (x < C_2) \\ (x - C_2)^3 & (C_2 \leq x), \end{cases} \qquad y = \begin{cases} (x - C_1)^3 & (x < C_1) \\ 0 & (C_1 \leq x \leq C_2) \\ (x - C_2)^3 & (C_2 < x) \end{cases}$$

なども解になる (解を図示してみよ)。

上の例 2.3 は重要なので、一般化してまとめておく。

定理 2.5 a を定数とするとき、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = ay \tag{2.8}$$

の任意の解は

$$y = Ce^{ax} \quad (C \text{ は任意定数}) \tag{2.9}$$

で与えられる (微分方程式 (2.8) の任意の解は適当な定数 C を用いて (2.9) で表せ、また任意の定数 C に対して式 (2.9) で定めた y は微分方程式 (2.8) の解になる)。初期条件

$$y(0) = y_0$$

を与えると

$$y = y_0 e^{ax}.$$

このタイプの微分方程式 (2.8) は、良い環境下での生物の増殖 (人口問題で言うと**マルサスの法則**) や、放射性元素の崩壊など、様々なところで現われる。

例 2.6 (ロジスティック方程式) ベルギーの数学者 P. F. Verhulst (フェルフルスト) (1804–1849) の提唱した**ロジスティック方程式** (**logistic equation**) とは

$$\frac{dy}{dx} = (a - by)y \quad (a,\ b \text{ は正定数}) \tag{2.10}$$

の形の方程式である[10]。

人口の時間変化モデルとして、**マルサスの法則**

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

があったが[11]、現実には、人口密度が大きくなると、環境が悪くなって出生率が低下するため、このモデルからのずれが大きくなる。y が大きくなったときに出生率が低下するという効果を考慮にいれたものが、(4.1) である[12]。

変数分離形なので、以下に示すようにして解くことができる。

$$\int \frac{dy}{(a-by)y} = \int dx$$

であるが、部分分数分解

$$\frac{1}{(a-by)y} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y - a/b}\right)$$

より

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-a/b}\right) dy = a \int dx.$$

[10] 本によっては $y' = a(1-by)y$ としてある。もちろん本質的には同じものであるが、結果を比較するときには注意が必要である。

[11] T. R. Malthus (1766–1834) は英国の経済学者で、1798 年に『人口の原理』を著わし、人口は幾何級数的 (≒ 等比数列的 = 指数関数的) に増加するが、生存手段は算術級数的 (= 等差数列的 = 1 次関数的) にしか増加しないので、生存手段は必ず不足する、と論じた。(2021 加筆) COVID19 流行のもと、これはなかなか味わい深い。

[12] 一松 [2] によると、「(ロジスティック方程式は) 最初人口論に現れた。その後新製品の売り上げ、新分野の論文数、学習など、最初は急激に増加するが、やがて飽和に達して頭打ちになる現象によくあてはまることが知られた。その種の観測データから、定数 a (初期増加率), b (飽和値) を求めて、それによって製品や分野の評価をしようという試みもされている。」

積分を実行して

$$\log\left|\frac{y}{y-a/b}\right| = ax + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

これから

$$\frac{y}{y-a/b} = C'e^{ax} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

分母を払って $y = C'e^{ax}(y - a/b)$. これを y について解くと

$$y = \frac{a}{b}\frac{C'e^{ax}}{C'e^{ax}-1}.$$

これが一般解である[13]。$x = 0$ のとき $y = y_0$ となる解を求めよう。

$$C' = \frac{y_0}{y_0 - a/b}.$$

これから

$$y = \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0)e^{-ax}}.$$

この式から解の性質を読み取ってみよう。$0 \le y_0 \le a/b$ の場合、解は $-\infty < x < \infty$ で存在する。それ以外の場合、$x = x_* := -\dfrac{1}{a}\log\dfrac{ay_0}{by_0 + (a - by_0)e^{-ax}}$ で分母が 0 になる。$y_0 < 0$ の場合、解は $(-\infty, x_*)$ で存在する。$y_0 > a/b$ の場合、解は $(x_*, +\infty)$ で存在する。$y_0 = 0$ のとき $y \equiv 0$, $y_0 = a/b$ のとき $y \equiv a/b$ である (この事実を 0, a/b は不動点 (平衡点) であるという)。$0 < y_0$ の場合 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = a/b$ が成り立つ (この事実を a/b は安定な平衡点であるという)。 ■

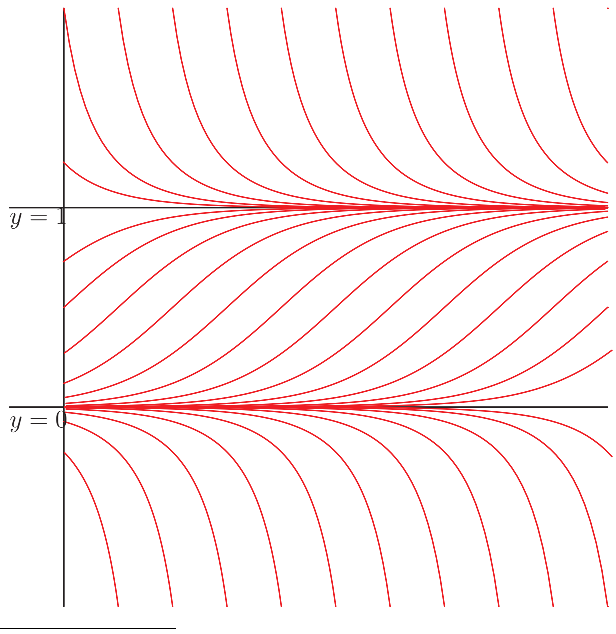
簡単のため $a = b = 1$ の場合に解曲線を描いてみよう。

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)y, \quad y(0) = y_0$$

の解は

$$y = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-x}}.$$

横軸を独立変数 x, 縦軸を関数 (従属変数) y として解のグラフ (解曲線) を描いてみたものが次の図である。



[13] 細かい注意であるが、これは $y \equiv a/b$ という解を表せない。

この例では、解が具体的な式で求まったが、そうならない場合も多い。

例 2.7 (万有引力による自由落下) 普通「自由落下」というと、一様な重力場のもとでの話をされることが多いが、1 つの天体の上空にそっとおかれた物体 (つまり初速 0) が、その星からの万有引力だけを受けるとして、どのように落ちるかを調べてみよう。

G, M, m, x_0 を正の定数として、次の初期値問題を解くことになる:

$$mx''(t) = -\frac{GMm}{x(t)^2}, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0. \tag{2.11}$$

(意味を説明しておくと、M, m はそれぞれ星と物体の質量で、$x(t)$ は時刻 t における星と物体との距離、$x_0 = x(0)$, G は万有引力定数である。)

$k := GM$ とおくと

$$x'' = -\frac{k}{x^2}.$$

両辺に x' をかけると

$$x''x' + \frac{k}{x^2}x' = 0.$$

これは

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x'(t)^2 - \frac{k}{x(t)}\right) = 0$$

と同値なので

$$\frac{1}{2}x'(t)^2 - \frac{k}{x(t)} = \text{定数}.$$

この定数を E とおく。$t = 0$ のとき、初期条件を代入して

$$E = \frac{1}{2}\cdot 0^2 - \frac{k}{x_0} = -\frac{k}{x_0}.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}x'(t)^2 - \frac{k}{x(t)} = -\frac{k}{x_0}.$$

すなわち ($x'(t) \le 0$ に気づくので)

$$x'(t) = -\sqrt{2k\left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x_0}\right)}. \tag{2.12}$$

これは変数分離形の微分方程式である。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}} = -\sqrt{2k}\int dt = -\sqrt{2k}\,t + C \quad (C\text{ は積分定数}).$$

$x = x_0\cos^2\theta$ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ と変数変換する (教えてもらわないと気づきにくい)。

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0\cos^2\theta} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{x_0}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

であるから

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{x_0}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{x_0}\cos\theta}{\sin\theta}.$$

一方

$$dx = x_0\cdot 2\cos\theta(-\sin\theta)d\theta = -2x_0\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

であるから

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}} = \int \frac{\sqrt{x_0}\cos\theta}{\sin\theta}\cdot(-2x_0\sin\theta\cos\theta)d\theta = -2x_0^{3/2}\int \cos^2\theta\ d\theta$$
$$= -x_0^{3/2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta = -x_0^{3/2}(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)+C'.$$

以上より

$$x_0^{3/2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right) = \sqrt{2k}\ t + C''.$$

$t=0$ のとき $\cos^2\theta = 1$ より $\theta = 0$ であるので、$C''=0$.

$$\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{2k}}{x_0^{3/2}}t = Kt. \tag{2.13}$$

ただし

$$K := \frac{\sqrt{2k}}{x_0^{3/2}} = \frac{\sqrt{2GM}}{x_0^{3/2}}.$$

この方程式 (2.13) を θ について解きたいが、ふつーの式変形では出来ない。

$f(\theta) := \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta$ $(\theta \geq 0)$ とおくと $f'(\theta) = 1+\cos 2\theta \geq 0$ $(\theta = (2n+1)\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$ 以外では正) であるから、f は狭義単調増加である。また $f(0)=0$, $f(+\infty)=\infty$. ゆえに任意の $Kt \geq 0$ に対して、$f(\theta) = Kt$ を満たす $\theta \geq 0$ がただ 1 つ存在する。ゆえに $r(t) = r_0\cos^2\theta$ が確定する。

数値計算で具体的な値を求めることは難しくない。例えば、Mathematica で $r(t)$ のグラフの概形を描くには、次のようにすればよい。

f の逆関数を計算する関数を作って、$\theta(t)$, $r(t)$ のグラフを描く

```
invf[kt_]:=x /. FindRoot[x+Sin[2x]==kt,{x,kt}]
g1=Plot[invf[kt],{kt,0,Pi/2}]
g2=Plot[Cos[invf[kt]]^2,{kt,0,Pi/2}]
```

$Kt = \pi/2$ となる t で $r(t) = r_0\cos^2\theta = 0$ (天体の中心まで落ちる)。

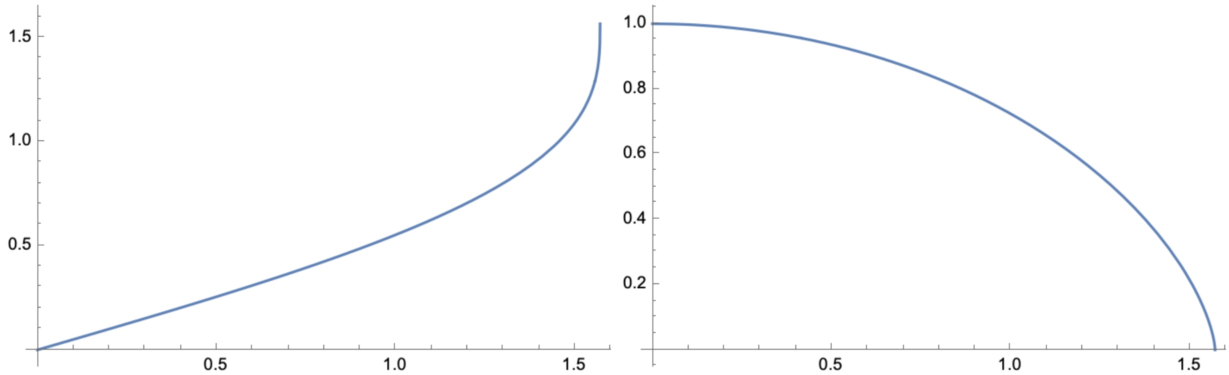


図 1: どちらも横軸は Kt, 縦軸は左図が θ, 右図が r

現実的な初期条件とは言えないためか、あまり見かけない問題であるが、何とか解くことが出来た。■

問題[14]

1. 次の微分方程式を解け。

(1) $x^3y' + y^2 = 0$ (2) $y' = 3y^{2/3}$ (3) $y' = \sqrt{y-1}$ (4) $x^2y' + y^2 = 0$ (5) $y^3 + x^6y' = 0$ (6) $y - xy' = x^2y'$ (7) $y' + ay^2 = 0$ (8) $\sin x \sin^2 y - y' \cos x = 0$ (9) $(1+x)y + (1-y)xy' = 0$ (10) $y' \tan x = \cot y$ (11) $(1+x^3)y' + x^2y^2 = 0$ (12) $y' = a(b^2 - y^2)$ (13) $y' = \dfrac{\cos^2 y}{1+x^2}$ (14) $y' = \dfrac{1+\sin x}{\sec^2 y}$ (15) $y' = \dfrac{xy}{x^2-1}$ (16) $x(1+y^2)y' = y(1+x^2)$ (17) $yy' = x(y+1)$ (18) $xy' - y^2 + 1 = 0$ (19) $y' = e^{2(x+y)}$ (20) $y' = e^{-(x+y)}$ (21) $y' = |y|$ (22) $y' = \dfrac{x}{y}$ (23) $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$ (24) $y' = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ (25) $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$ (26) $y' = \dfrac{y^2}{x^3}$ (27) $y' = \dfrac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$

2. 次の変数分離形の微分方程式を解け。

(1) $(4x + 2xy^2)dx - (x^2y + y)dy = 0$ (2) $2y\,dx + e^{-2x}\,dy = 0$ (3) $(y^2+1)dx - x\,dy = 0$ (4) $\sin^2 y\,dx + \cos^2 x\,dy = 0$ (5) $4y\,dx + x^3(2+y^2)dy = 0$ (6) $y\cos x\,dx + \sin x\,dy = 0$ (7) $4x(y^2+1)dx - y(x^2+2)dy = 0$ (8) $e^x\,dx - e^y\,dy = 0$ (9) $\left(y + \dfrac{1}{y}\right)dx = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)dy$

3 1階線型微分方程式, 定数変化法

1階正規形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

において、$F(x,y)$ が y の1次式 $a(x)y + b(x)$ である場合、すなわち

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{3.1}$$

を**1階線型微分方程式**とよぶ。これも以下に示すように具体的な式計算で解を求めることができる。

特に $b(x)$ が恒等的に0である場合、すなわち

$$y' = a(x)y \tag{3.2}$$

を**同次方程式**とよび、そうない場合を**非同次方程式**という。

例 3.1 (線型でない方程式) $y' = a(x)y^2$ や $y' = a(x)\sin y$ などは線型微分方程式ではない。

3.1 同次方程式の解法

実は (3.2) は変数分離形だから前節で説明した方法で解くことができる。重複になってしまうが書いておく。

$$\frac{dy}{y} = a(x)\,dx \quad より \quad \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx.$$

$a(x)$ の原始関数の一つを $A(x)$ とすると、

$$\log|y| = A(x) + C \quad (C\ は積分定数).$$

[14] [1] の p. 95 問題 4, 5 から採ったものである。

これから $|y| = e^{A(x)+C} = e^C e^{A(x)}$ となるので

$$y = \pm e^C e^{A(x)}.$$

$\pm e^C$ は任意定数なので C' とおいて、

$$y = C' e^{A(x)}.$$

しかし以上の議論は (例によって) 分母 $=0$ の問題があるので、後で証明し直す。

定理 3.2 (1 階線型同次微分方程式)

$$y' = a(x)y \tag{3.3}$$

の一般解は、$A(x)$ を $a(x)$ の一つの原始関数 ($A'(x) = a(x)$) として、

$$y = Ce^{A(x)} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である。特に初期条件

$$y(0) = y_0 \tag{3.4}$$

をつけた初期値問題の解は

$$y = y_0 e^{A(x)}, \quad A(x) = \int_0^x a(t)\,dt. \tag{3.5}$$

注意 3.3 (3.5) はもちろん一つの式で書ける。その場合は e の右肩が重くなるので、つぎのように記号 exp を使うとよいかもしれない:

$$y = y_0 \exp\left(\int_0^x a(t)\,dt\right).$$

証明

$A(x)$ を $a(x)$ の原始関数の一つとするとき、

$$\frac{d}{dx}(ye^{-A(x)}) = y' \cdot e^{-A(x)} + y \cdot e^{-A(x)}(-A'(x)) = e^{-A(x)}\left(y' - A'(x)y\right) = e^{-A(x)}\left(y' - a(x)y\right).$$

これから

$$\begin{aligned} y' = a(x)y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(ye^{-A(x)}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ye^{-A(x)} = C \quad (C \text{ は任意の定数}) \\ &\Leftrightarrow \quad y = Ce^{A(x)} \quad (C \text{ は任意の定数}). \end{aligned}$$

初期条件 $y(0) = x_0$ を満たす解を求めるため、$x = 0$, $y = y_0$ を代入すると $y_0 = Ce^{A(0)}$ となるので、$C = y_0 e^{-A(0)}$. ゆえに

$$y = y_0 e^{A(x) - A(0)}.$$

$a(x)$ の原始関数 $A(x)$ を $A(0) = 0$ となるように定めると式が簡単になって便利である。それには

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt$$

とおけばよい。つまり (3.3), (3.4) の解は

$$y = y_0 e^{A(x)}, \quad A(x) = \int_0^x a(t)\,dt. \blacksquare$$

問　初期条件を 0 でない時刻 x_0 で課す、つまり条件

$$y(x_0) = y_0$$

を満たす y を求めよ、という問題が生じることもある。この場合に解はどう表されるか？

3.2　非同次方程式の解法

次に (3.1) を考える。これは変数分離形ではないことに注意しよう。この解を得るために**定数変化法** (**variation of parameter**, variation of constants) とよばれる方法を用いよう (これは線型同次微分方程式の一般解が得られているときに、線型非同次微分方程式を解くために使える一般的な方法であり、この後にもその変種が登場する)。

(3.2) の一般解は

$$y = Ce^{A(x)} \quad (C \text{ は任意定数}, A(x) \text{ は } a(x) \text{ の原始関数の任意の一つ})$$

であったが、(3.1) の一般解を

$$y = C(x)e^{A(x)} \tag{3.6}$$

の形で探してみよう。積の微分法より

$$y' = C'(x) \cdot e^{A(x)} + C(x) \cdot e^{A(x)} A'(x) = e^{A(x)} \left(C'(x) + C(x)a(x) \right).$$

これと (3.6) を (3.1) に代入すると

$$e^{A(x)} \left(C'(x) + C(x)a(x) \right) = a(x)C(x)e^{A(x)} + b(x).$$

これから

$$e^{A(x)}C'(x) = b(x) \quad \therefore \quad C'(x) = e^{-A(x)}b(x)$$

と $C'(x)$ が求まる。積分して $C(x)$ が求まる:

$$C(x) = C(0) + \int_0^x C'(t)\,dt = C(0) + \int_0^x e^{-A(t)}b(t)\,dt.$$

この $C(x)$ を (3.6) に代入して

$$y = C(x)e^{A(x)} = \left(C(0) + \int_0^x e^{-A(t)}b(t)\,dt \right) e^{A(x)} = C(0)e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_0^x e^{-A(t)}b(t)\,dt.$$

初期条件 $y(0) = y_0$ を満足する解を簡単な形で求めるため、$A(x)$ として

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt$$

を採用する。$x = 0$, $y = y_0$ を代入すると

$$y_0 = C(0)e^{A(0)} + e^{A(0)}0 = C(0)e^0 + 0 = C(0).$$

$C(0) = y_0$ を代入すれば解の公式が得られる。以上まとめておこう。

定理 3.4 (1 階線型非同次微分方程式)

$$y' = a(x)y + b(x)$$

の一般解は $A(x)$ を $a(x)$ の原始関数の一つとして、

$$y = Ce^{A(x)} + e^{A(x)} \int_0^x e^{-A(t)} b(t)\, dt \quad (C \text{ は任意定数})$$

で与えられる。特に初期条件

$$y(0) = y_0$$

を課した初期値問題の解は

$$y = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_0^x e^{-A(t)} b(t)\, dt, \quad A(x) = \int_0^x a(t)\, dt.$$

例 3.5 (定数係数 1 階常微分方程式) $a(x)$ が定数 a の場合の初期値問題、つまり

$$y' = ay + b(x), \tag{3.7}$$

$$y(0) = y_0 \tag{3.8}$$

を考えよう。もちろん上の定理を使えば解けるわけだが、こういうのは暗記するものではないので(一夜漬けとしては、あるいは成功するかもしれないが、あぶなさがある — そういう解答は、中間点ももらいにくい)、もう一度解いてみよう。まず $b(x)$ のない

$$y' = ay$$

を解く。これは

$$y = Ce^{ax} \quad (C \text{ は任意定数})$$

が一般解である。そこで

$$y = C(x)e^{ax}$$

と置いてみる。

$$y' = C'(x) \cdot e^{ax} + C(x) \cdot e^{ax} a = e^{ax}(C'(x) + aC(x)).$$

これを微分方程式 (3.7) に代入すると

$$e^{ax}(C'(x) + aC(x)) = a\,(C(x)e^{ax}) + b(x).$$

これから

$$e^{ax}C'(x) = b(x) \quad \therefore \quad C'(x) = e^{-ax}b(x).$$

$$C(x) = C(0) + \int_0^x e^{-at} b(t)\, dt.$$

ゆえに

$$y = \left(C(0) + \int_0^x e^{-at} b(t)\, dt\right) e^{ax} = C(0)e^{ax} + e^{ax} \int_0^x e^{-at} b(t)\, dt.$$

$x = 0$ のとき $y = y_0$ であるから、

$$y_0 = C(0).$$

つまり

$$y = y_0 e^{ax} + e^{ax} \int_0^x e^{-at} b(t)\, dt. \blacksquare \tag{3.9}$$

問題[15]

1. 次の微分方程式を解け (a, b, c, d は定数とする)。

(1) $y' + ay = 0$ (2) $y' + ay = b$ (3) $y' + y\cot x = \operatorname{cosec} x$ $(0 < x < \pi/2)$

(4) $y' + 2xy = x$ (5) $y' - y\tan x = \sin x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ (6) $y' - 2xy = e^{x^2}$

(7) $xy' + y = x\log x$ $(x > 0)$ (8) $y' + ay = e^{bx}$ (9) $y' + \dfrac{a}{x}y = 0$ (10) $y' - xy = x$

(11) $y' + \dfrac{1}{x}y = 1 - x^2$ $(x > 0)$ (12) $xy' + y = 4x(1 + x^2)$ (13) $xy' - (y + x^2\sin^2 x) = 0$

(14) $y' + y\cos x = -\sin x e^{-\sin x}$ (15) $x(1 - x^2)y' + (x^2 - 1)y = x^3$ $(0 < x < 1)$

(16) $y' - ay = \sin x$ (17) $(1 + x^2)y' = xy\sqrt{1 + x^2}$ (18) $y' + (1 + x^2)y = e^{-x^3/3}$

(19) $y' + ay = bx^2 + cx + d$ (20) $xy' + (1 + x)y = e^x$

2. 次の初期値問題を解け。

(1) $y' + y = 1, \quad y(0) = 0$ (2) $y' = x - y, \quad y(0) = 0$ (3) $y' + \dfrac{a}{x}y = 0$, $y(1) = b$

(4) $y' - ay = \sin x$, $y(0) = 0$ (5) $y' + xy = 0$, $y(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (6) $y' + y\tan x = 0$, $y(0) = 2$

4 変数分離形, 1 階線形に帰着できるもの

(この節の内容は時間がなければ省略しても構わない。)

変数変換[16]をすることで、既に見た微分方程式 (変数分離形方程式や 1 階線型方程式) に帰着して解くことの出来る問題がある。

4.1 同次形方程式

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形に表せる微分方程式を**同次形方程式**という。名前の由来は右辺で x と y が同じ次数で現れることによる。

この場合 $x \neq 0$ の範囲で考えることにして、次のように変数変換すれば変数分離形方程式に帰着する。

$u = \dfrac{y}{x}$ すなわち $y = xu$ とおいて新しい未知関数 $u = u(x)$ を導入すると、

$$y' = (xu)' = u + xu' \quad より \quad u + xu' = f(u) \qquad すなわち \quad u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

となり変数分離形である。この解は $u \equiv a$ (ただし a は $f(a) = 0$ をみたす数) および

$$Cx = \exp\left(\int \frac{du}{f(u) - u}\right)$$

から得られるものである ($\exp(t)$ は指数関数 e^t のことを表す)。これに $u = \dfrac{y}{x}$ を代入すればすべての解 y が得られる。

[15] [1] の p. 94 問題 1, 2 から採ったものである。
[16] ただし独立変数だけでなく、従属変数 (関数) の変換も考える。

例 4.1 $y' = \dfrac{y^2+2xy}{x^2}$ を考える。これは同次形である。$f(u) = u^2+2u$ であるから $a^2+2a = a(a+2) = 0$ より定数解は $u \equiv 0$ または $u \equiv -2$. これより $y \equiv 0$, $y = -2x$ が解。また

$$Cx = \exp\left(\int \frac{du}{u^2+u}\right) = \frac{u}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1}$$

から $y = \dfrac{Cx^2}{1-Cx}$ (C は任意定数) も解であり、これらがすべてとなる。■

4.2 ベルヌーイ (Bernoulli) の方程式

n を整数, $p(x)$, $q(x)$ を与えられた連続関数として微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

を考える。$n = 0$ ならば 1 階線形、また $n = 1$ ならば 1 階同次線形なので $n \neq 0, 1$ とする。このとき $y^{1-n} = u$ とおけば $u' = (1-n)y^{-n}y'$ より

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

となり、u について 1 階線形方程式である。

余談 4.1 (logistic 方程式は Bernoulli の方程式の特別な場合) logistic 方程式

$$\frac{dy}{dx} = (a-by)y \quad (a,\, b \text{ は正定数}) \tag{4.1}$$

は、実は $n = 2$ の場合に相当するので、線型方程式に変換して解くことが出来る。■

4.3 リッカチ (Riccati) の方程式

$$y' = p_0(x)y^2 + p_1(x)y + p_2(x).$$

この方程式の解 y_1 が一つ求まっている場合には、$y = y_1 + \dfrac{1}{u}$ とおけば、u についての 1 階線形方程式

$$u' + (2p_0(x)y_1 + p_1(x))u = -p_0(x)$$

が得られる。

4.4 その他

1. a, b, c を定数かつ $b \neq 0$ として
$$y' = f(ax+by+c)$$
の形の方程式を考える。$u = ax+by+c$ とおけば $u' = bf(u)+a$ となり変数分離形である。

2. a, b, c, a', b', c' を定数として
$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+by'+c'}\right)$$
の形の方程式を考える。$ab'-a'b \neq 0$ の場合には連立 1 次方程式 $ax+by+c = 0$, $a'x+b'y+c' = 0$ の (唯一つの) 解を (x_0, y_0) として変換 $x = X+x_0$, $y = Y+y_0$ を行えば
$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$$
となり同次形である。また $ab'-a'b = 0$ の場合には (iii) の形になる。

問題[17]

1. 次の同次形微分方程式を解け。
(1) $y' = 1+\dfrac{2x}{y}$ (2) $y' = 2-\dfrac{y}{x}$ (3) $y' = \dfrac{1}{4}+\dfrac{y^2}{x^2}$ (4) $2(y-x)y'-x-2y = 0$ (5) $(2x-3y)y' = x-2y$ (6) $xy' = y-\sqrt{x^2+y^2}$ $(x>0)$ (7) $x^2y' = 2(x-y)^2$ (8) $xy^2y' = x^3+y^3$ (9) $xy' = y+x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$ (10) $y' = \operatorname{cosec}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{y}{x}$ (11) $y' = \dfrac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ (12) $y' = \dfrac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}$ (13) $y' = \dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

2. 次のベルヌーイの微分方程式を解け。
(1) $(1+x^2)y'+4xy = 8x\sqrt{y}$ (2) $(1+x^2)y'-2xy+xy^2\cos x = 0$
(3) $y'+2xy = 2xy^3$ (4) $y'+xy = e^{x^2}y^3$ (5) $y'+y^3e^{-x^2}-xy = 0$
(6) $xy'+2y = 2xy^{4/3}$ (7) $xy'+2y = \sqrt{y}\log x$ (8) $x^2y'-2xy = y^2\cos x$
(9) $(x-1)y'+2y = \sqrt{(x^2-1)y}$ $(x>1)$

3. 次のリッカチの微分方程式を解け。
(1) $y' = xy^2-(2x-1)y+x-1$ (2) $y' = y^2+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)y-\dfrac{2}{x}-2$
(3) $y' = y^2-3xy+2x^2+1$ (4) $y' = y^2-4xy+4$ (5) $y' = y^2-2x^2y+x^4+2x$ (6) $y' = y^2+\dfrac{y}{2x}-x$
(7) $y' = y^2+3y+2$ (8) $y' = y^2-2y+1$

4. 次の微分方程式を解け。
(1) $y' = (x-y)^2$ (2) $y' = \cos(x+y)$ (3) $y' = \sec(x+y)-1$ (4) $(x+y+1)y' = 1$
(5) $(x+y+2)y' = x+y$ (6) $\sqrt{x+y+1}\,y' = \sqrt{x+y-1}$

5. 次の微分方程式を解け。
(1) $(x-2y-1)y' = 2x-3y+3$ (2) $(x-y)y' = x+y+1$

5 定数係数2階線型常微分方程式 (1) 同次方程式の解法

5.1 定義と例

定数 p, q と、区間 I 上で定義された関数 f が与えられたとき、

$$y''+py'+qy = f(x) \tag{5.1}$$

を**定数係数2階線型常微分方程式**とよぶ。特に $f(x)\equiv 0$ の場合の

$$y''+py'+qy = 0 \tag{5.2}$$

を**同次方程式**、一般の場合の (5.1) を**非同次方程式**という。

このタイプの方程式は応用上頻出し、非常に重要である。特に、釣り合いの位置の近傍での微小な振動を表す方程式はこの形になることが多い。

例えば、滑らかで水平な床の上においたフックの法則に従うバネでつながれた重りの運動を記述する運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (m \text{ は重りの質量}, k \text{ はバネ定数})$$

は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+0\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x = 0$$

[17] [1] の p. 95–96 問題 6, 9, 10, 11, 12 から採ったものである。

と書けるので (5.2) に該当する。

また速度に比例する抵抗が存在する場合の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \quad (\gamma \text{ は正定数})$$

も

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

と書けるのでやはり (5.2) に該当する。

一方、電気回路においても良く現れる。次の図のように (図を描かないと…)、発電器 $E(t)$, 抵抗 R, コイル (インダクタンス L), コンデンサー (コンダクタンス C) をつないだ回路を流れる電流 $I(t)$ は、微分方程式

$$RI(t) + L\frac{dI}{dt}(t) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(s)\,dx = E(t)$$

を満たす。変形すると

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}I = \frac{E'(t)}{R}$$

となり、(5.1) に該当することが分かる。

この節では、同次方程式 (5.2) の代表的な解法である「特性根の方法」を説明する。

5.2 特性方程式, 特性根

微分方程式 $y'' + py' + qy = 0$ に対して、2 次方程式

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

を微分方程式の**特性方程式** (**charasteristic equation**), 特性方程式の根を**特性根** (**characteristic root**) とよぶ。

例 5.1 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ で、特性根は $\lambda = 1, 2.$ ■

補題 5.2 α が $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の解ならば、$y = e^{\alpha x}$ は (5.2) の解である。

証明 $y = e^{\alpha x}$ ならば、

$$y' = \alpha e^{\alpha x},$$
$$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

であるから、

$$y'' + py' + qy = (\alpha^2 + p\alpha + q)e^{\alpha x} = 0 \cdot e^{\alpha x} = 0.■$$

補題 5.3 (重ね合せの原理 (principle of superposition)) y_1, y_2 が (5.2) の解ならば、

$$y = Ay_1 + By_2 \quad (A,\ B \text{ は任意定数}) \tag{5.3}$$

も (5.2) の解である。

証明 $y = Ay_1 + By_2$ より

$$y' = Ay_1' + By_2',$$
$$y'' = Ay_1'' + By_2''$$

であるから

$$y'' + py' + qy = A(y'' + py' + qy) + B(y'' + py' + qy) = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

上の二つの補題から、$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 根を α, β とするとき、

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

は (5.2) の解であることが分かる。

例 5.4 $y = Ae^x + Be^{2x}$ (A, B は任意定数) は、$y'' - 3y' + 2y = 0$ の解である。 $\blacksquare$

実は $\alpha \neq \beta$ の場合、(5.2) の解は (5.3) 以外にないことが示せる。一方、$\alpha = \beta$ の場合にはもう一工夫必要である。順番に考察していこう。

5.3 相異なる特性根を持つ場合

命題 5.5 (定数係数 2 階線型同次方程式 (1) 相異なる特性根を持つ場合) 特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が相異なる 2 根 α, β をもつとき、

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数}) \tag{5.4}$$

は (5.2) の一般解である。すなわち、

(a) 任意の定数 A, B に対して、(5.4) で定まる y は (5.2) の解である。

(b) (5.2) の任意の解は、適当な定数 A, B を用いて、$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ と一意的に表される。

証明 (a) は済んでいる。(b) については、次の二点を示せばよい。

[任意の解は $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$ の 1 次結合で書ける] y が $y'' + py' + qy = 0$ の解だとする。

$$y_1 := \frac{y' - \beta y}{\alpha - \beta}, \quad y_2 := \frac{y' - \alpha y}{\beta - \alpha}$$

とおくと

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[(y' - \beta y) - (y' - \alpha y)\right] = \frac{1}{\alpha - \beta}(\alpha - \beta)y = y.$$

また

$$\begin{aligned} y_1' - \alpha y_1 &= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[(y'' - \beta y') - \alpha(y' - \beta y)\right] = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y\right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta}(y'' + py' + qy) = 0. \end{aligned}$$

これから、ある定数 C_1 が存在して $y_1 = C_1 e^{\alpha x}$ となることが分かる。同様にしてある定数 C_2 が存在して $y_2 = C_2 e^{\beta x}$ となることが分かる。ゆえに

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}.$$

[$e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$ の 1 次独立性]　定数 C_1, C_2 について

$$C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} = 0 \tag{5.5}$$

が成り立ったとする。微分して

$$C_1 \alpha e^{\alpha x} + C_2 \beta e^{\beta x} = 0.$$

この式から (5.5) の α 倍を引くと

$$C_2(\beta - \alpha)e^{\beta x} = 0.$$

仮定より $\alpha \neq \beta$ であるから $C_2 = 0$. (5.5) に代入して

$$C_1 e^{\alpha x} = 0.$$

これから $C_1 = 0$. $C_1 = C_2 = 0$ が示せたので、$e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$ は 1 次独立である。■

例 5.6 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ で、特性根は $\lambda = 1, 2$. したがって

$$y = Ae^x + Be^{2x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

が一般解である。■

5.4　特性根が重根である場合

補題 5.7 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が重根 α をもつとき、$y = xe^{\alpha x}$ は (5.2) の解である。

証明　$y = xe^{\alpha x}$ とすると、

$$\begin{aligned} y' &= e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}, \\ y'' &= \alpha e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x} = \alpha^2 x e^{\alpha x} + 2\alpha e^{\alpha x} \end{aligned}$$

であるから、

$$y'' + py' + qy = (\alpha^2 x + 2\alpha + p\alpha x + p + qx)e^{\alpha x} = \left[(\alpha^2 + p\alpha + q)x + (p + 2\alpha)\right] e^{\alpha x}$$

となるが、α は $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の重根であるから、

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0,$$

$$\alpha = \frac{-p + \sqrt{\text{判別式}}}{2} = \frac{-p + \sqrt{0}}{2} = -\frac{p}{2} \quad \text{ゆえに} \quad p + 2\alpha = 0$$

が成り立ち、

$$y'' + py' + qy = [0 \cdot x + 0]\, e^{\alpha x} = 0. \blacksquare$$

命題 5.8 (定数係数 2 階線型同次方程式 (2) 特性根が重根の場合) 特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が重根 α をもつとき、

$$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数}) \tag{5.6}$$

は (5.2) の一般解である。すなわち、

(a) 任意の定数 A, B に対して、(5.6) で定まる y は (5.2) の解である。

(b) (5.2) の任意の解は、適当な定数 A, B を用いて、$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x}$ と一意的に表される。

証明　(a) は済んでいる。(b) については、次の二点を示せばよい。

[任意の解は $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$ の 1 次結合で書ける]　y が $y''+py'+qy=0$ の解だとする。$y=e^{\alpha x}u$ とおくと、

$$y'=\alpha e^{\alpha x}+e^{\alpha x}u'=e^{\alpha x}(u'+\alpha u),$$
$$y''=\alpha^2 e^{\alpha x}+\alpha e^{\alpha x}u'+e^{\alpha x}u''=e^{\alpha x}(u''+\alpha u'+\alpha^2 u)$$

であるから

$$\begin{aligned} y''+py'+qy=y''-2\alpha y'+\alpha^2 y &= e^{\alpha x}(u''+\alpha u'+\alpha^2 u)-2\alpha e^{\alpha x}(u'+\alpha u)+\alpha^2 e^{\alpha x}u \\ &= e^{\alpha x}u''. \end{aligned}$$

$y''+py'+qy=0$ であったから $e^{\alpha x}u''=0$. これから $u''=0$. ゆえに定数 C_1, C_2 が存在して $u=C_1+C_2x$. ゆえに

$$y=e^{\alpha x}u=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}.$$

[$e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$ の 1 次独立性]　定数 C_1, C_2 について

$$C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}=0 \tag{5.7}$$

が成り立ったとする。微分して

$$C_1\alpha e^{\alpha x}+C_2e^{\alpha x}+C_2\alpha xe^{\alpha x}=0.$$

この式から (5.7) の α 倍を引くと

$$C_2e^{\alpha x}=0.$$

ゆえに $C_2=0$. (5.7) に代入して

$$C_1e^{\alpha x}=0.$$

これから $C_1=0$. $C_1=C_2=0$ が示せたので、$e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$ は 1 次独立である。■

例 5.9 $y''-2y'+y=0$ の特性方程式は $\lambda^2-2\lambda+1=0$ で、特性根は 1 (重根). ゆえに一般解は

$$y=Ae^x+Bxe^x \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).■$$

5.5　特性根が虚数である場合

微分方程式

$$y''+y=0 \tag{5.8}$$

の特性方程式は $\lambda^2+1=0$ で、特性根は $\lambda=\pm i$ (i は虚数単位) である。そこで定理 5.5 を機械的に適用すると、一般解は

$$y=Ae^{ix}+Be^{-ix} \quad (A,\ B \text{ は任意定数}) \tag{5.9}$$

となるが、e^{ix}, e^{-ix} は一体何であろうか？

実は指数関数 e^x は、複素変数に一般化され、その一般化された指数関数に対しても

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x}=\lambda e^{\lambda x} \quad (\lambda \text{ は複素数の定数})$$

などの性質は保たれるので、(5.9) は確かに微分方程式 (5.8) の解を与えるのである。

要約: 複素変数の指数関数

指数関数は複素変数まで拡張できる。その定義には色々な方法があるが、どれを採用しても結果は一致する。ここでは $z=x+iy$ (x, y は実数, i は虚数単位) に対して

$$e^z=e^{x+iy}:=e^x(\cos y+i\sin y)$$

と定義する。

- 実変数に関する指数関数の拡張になっている。
- 指数法則 $e^{z+w}=e^ze^w$ が成立する。
- 特に Euler の公式

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \tag{5.10}$$

  が成り立つ。$y=\pi$ とすると $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1$ より有名な

$$e^{i\pi}+1=0$$

  が得られる。(5.10) で y の代りに $-y$ とした

$$e^{-iy}=\cos(-y)+i\sin(-y)=\cos y-i\sin y \tag{5.11}$$

  と (5.10) を連立方程式とみて、

$$\cos y=\frac{1}{2}\left(e^{iy}+e^{-iy}\right),\quad \sin y=\frac{1}{2i}\left(e^{iy}-e^{-iy}\right)$$

  を得る。
- λ が複素数であっても

$$\frac{d}{dz}\left(e^{\lambda z}\right)=\lambda e^{\lambda z}.$$

- 任意の複素数 z に対して

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

  が成立する。
- $|e^{x+iy}|=e^x$.

p, q が実定数の場合、$\lambda^2+p\lambda+q=0$ が虚根を持てば、それは互いに複素共役である。ゆえに

$$\lambda=a\pm ib\quad (a,\, b\in\mathbf{R};\, b\neq 0)$$

と書ける。

$$\begin{aligned}Ae^{(a+ib)x}+Be^{(a-ib)x}&=Ae^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+Be^{ax}(\cos bx-i\sin bx)\\&=(A+B)e^{ax}\cos bx+i(A-B)e^{ax}\sin bx.\end{aligned}$$

$C_1=A+B$, $C_2=i(A-B)$ とおくと、

$$y=C_1e^{ax}\cos bx+C_2e^{ax}\sin bx. \tag{5.12}$$

また A, B は任意定数であることから、C_1, C_2 も任意定数である[18]。C_1, C_2 を実数の範囲のみで動かせば、(5.12) は任意の実数値関数の解を表す。

補足　特性根が虚数である場合を定理の形にまとめておかなかったが、そうしておくべきであった。

命題 5.10 p, q を実定数とする。微分方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{5.2}$$

の特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が虚数解 $\lambda = a \pm ib$ $(a, b \in \mathbf{R},\ b \neq 0)$ を持つとき、

$$y = Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx) \tag{5.13}$$

は (5.2) の一般解である。すなわち

(a) 任意の定数 A, B に対して、$y = Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx)$ で定まる y は (5.2) の解である。

(b) (5.2) の任意の解は、適当な定数 A, B を用いて、$y = Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx)$ と一意的に表される。

この文書では (元々の対象者が大学 1 年生であることから)、証明はなるべく初等的にする方針で説明しているが、ここではまず線形空間の議論に慣れている人向けの証明をして、それから初等的な (だがやや面倒な) 証明を示すことにする。

n 階線形同次微分方程式に対し、

$$y = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x) \quad (C_1, \cdots, C_n \text{ は任意定数})$$

が一般解であるとは、線形代数の言葉を用いると、$\varphi_1(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$ が微分方程式の解空間 (解全体の集合のなす線形空間) の基底であることである。言い換えると

$$\text{解全体の集合} = \operatorname{Span}\{\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$$

が成り立ち、φ_1, $\cdots$, φ_n が 1 次独立であることである。

証明 (線形空間の議論に慣れている人向け)　$a + ib$ と $a - ib$ は相異なる特性根であるから

$$y = Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

は (5.2) の一般解である (命題 5.5 による)。これは

$$(5.2) \text{ の解空間} = \operatorname{Span}\left\{e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}\right\}$$

であり、$e^{(a+ib)x}$, $e^{(a-ib)x}$ が 1 次独立であることを意味する。

一方

$$Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} = (A+B)e^{ax}\cos(bx) + i(A-B)e^{ax}\sin(bx)$$

であるから

$$\operatorname{Span}\left\{e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}\right\} \subset \operatorname{Span}\left\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\sin(bx)\right\}.$$

[18] これは $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ において係数行列が正則であることから分かる。実際、$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

上に述べたことから左辺は 2 次元であり、右辺は 2 次元以下であるので、実は左辺と右辺は等しく、右辺は 2 次元すなわち $e^{ax}\cos(bx)$, $e^{ax}\sin(bx)$ は 1 次独立である。

$$(5.2)\ \text{の解空間} = \operatorname{Span}\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\sin(bx)\}$$

であるので、

$$y = Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx) \quad (A,\ B\ \text{は任意定数})$$

は (5.2) の一般解である。 (証明終)

初等的な証明　まず、任意の定数 A, B に対して

$$y = Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx)$$

で定義された y が、微分方程式 (5.2) の解であることを示そう。

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy =& e^{ax}\left[A(a^2 - b^2 + ap + q) + B(bp + 2ab)\right]\cos(bx) \\ &+ e^{ax}\left[B(a^2 - b^2 + ap + q) - A(bp + 2ab)\right]\sin(bx) \end{aligned}$$

$\lambda = a \pm ib$ が $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ を満たすことから

$$a^2 - b^2 + ap + q = 0 \land 2ab + bp = 0$$

が得られる。ゆえに $y'' + py' + qy = 0$ が成り立つ。

[任意の解は $e^{ax}\cos(bx)$, $e^{ax}\sin(bx)$ の 1 次結合で書ける]　命題 5.5 より、(5.2) の任意の解 y に対して、ある定数 A, B が存在して $y = Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x}$ が成り立つ。

$$Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} = (A + B)e^{ax}\cos(bx) + i(A - B)e^{ax}\sin(bx)$$

であるから、y は $e^{ax}\cos(bx)$, $e^{ax}\sin(bx)$ の 1 次結合で書ける。

[$e^{ax}\cos(bx)$, $e^{ax}\sin(bx)$ の 1 独立性]　定数 A, B について

$$Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx) = 0$$

が成り立ったとする。$x = 0$ を代入して

$$A = 0.$$

また、微分してから $x = 0$ を代入して

$$Aa + Bb = 0.$$

仮定 $b \neq 0$ に注意すると $A = B = 0$ が示せる。ゆえに $e^{ax}\cos(bx)$, $e^{ax}\sin(bx)$ は 1 次独立である。(証明終)

線形代数を応用すると、計算があまり必要のない証明が得られ、見通しが良くなる。例えば、n 階線形同次方程式の解空間が n 次元線形空間であることが一般的に示される。それが分かれば、1 時独立な解が n 個求まれば、それが基底であることがすぐ結論でき、一般解が得られる。(補足終)

例 5.11 $y'' + y' + 1 = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ で、特性根は $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. ゆえに一般解は

$$y = Ae^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + Be^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2} \quad (A,\ B\ \text{は任意定数}).\blacksquare$$

5.6 まとめ

$y'' + py' + qy = 0$ (p, q は定数) の一般解は次のように求まる。

(i) $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が相異なる 2 根 α, β を持つならば、

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

(ii) $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が重根 α を持つならば、

$$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

(iii) p, q が実定数で、$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が虚根 $a + ib$ ($a, b \in \mathbf{R}$; $b \neq 0$) を持つならば、

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}).$$

このように 2 階方程式の一般解は、適当な二つの関数 φ_1, φ_2 を用いて、

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

と書ける場合がしばしばあるが、このとき φ_1, φ_2 を**基本解** (fundamental solution) とよぶ。つまり

1. 特性方程式が相異なる 2 根 α, β を持つ場合、$e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$ は基本解
2. 特性方程式が相異なる重根 α を持つ場合、$e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$ は基本解
3. 特性方程式が互いに複素共役である虚根 $a \pm ib$ を持つ場合、$e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ は基本解

問題[19]

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ。
(1) $y'' - 6y' + 8y = 0$ (2) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (3) $y'' - a^2 y = 0$ (4) $y'' + ay' + k^2 y = 0$
(5) $y'' + 2y' + y = 0$ (6) $y'' - 6y' + 9y = 0$ (7) $y'' - 4y' + 5y = 0$ (8) $y'' + 2y' + 5y = 0$

6 定数係数 2 階線型常微分方程式 (2) 非同次方程式と重ね合せの原理

前節で扱った同次方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{6.1}$$

の右辺を一般にした非同次方程式

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{6.2}$$

の解法を追求する。

まず、線型方程式の基本的性質である「重ね合せの原理」に基づく「特解を (一つでも) 求めればよい原理」(ここだけの用語である) を理解するのが基本である。

[19][1] の p. 103 問題 1 から採ったものである。

6.1 重ね合せの原理

記号 $L[y]$ を

$$L[y] := y'' + py' + qy \tag{6.3}$$

で定めるとき、(6.1), (6.2) はそれぞれ $L[y] = 0$, $L[y] = f(x)$ と表される。

補題 6.1 (L の線形性) p, q を定数として、x を変数とする関数 y で 2 回微分可能なものに対して

$$L[y] = y'' + py' + qy$$

とおくとき、次の (i), (ii) が成り立つ。

(i) 任意の 2 回微分可能な関数 y, z について

$$L[y+z] = L[y] + L[z]. \tag{6.4}$$

(ii) 任意の 2 回微分可能な関数 y と 定数 k について

$$L[ky] = kL[y]. \tag{6.5}$$

証明 (i) の証明は

$$\begin{aligned}L[y+z] &= (y+z)'' + p(y+z)' + q(y+z) = y'' + z'' + p(y' + z') + q(y+z)\\ &= (y'' + py' + qy) + (z'' + pz' + qz) = L[y] + L[z].\end{aligned}$$

(ii) も同様である。■

(6.4), (6.5) が成り立つことを L は**線形** (線型, linear) であると言う。

この記号を用いて、補題 5.3 (重ね合せの原理) 「y_1, y_2 が (6.1) の解ならば、$y = Ay_1 + By_2$ も (6.1) の解である」を再度証明してみよう。y_1, y_2 が (6.1) の解であるとは、$L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$ ということである。

$$L[y] = L[Ay_1 + By_2] = AL[y_1] + BL[y_2] = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0$$

であるので、y は (6.1) の解である。■

補題 6.1 のひとつの言い換えを示そう。

補題 6.2 (一般化された重ね合せの原理) $j = 1, 2$ について、y_j が

$$y'' + py' + qy = f_j(x)$$

の解ならば

$$y = y_1 + y_2$$

は

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$$

の解である。

証明

$$L[y] = L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1(x) + f_2(x).■$$

例 6.3 $y_1 = \dfrac{1}{4}e^x$ は

$$y_1'' - 6y_1' + 9y_1 = e^x$$

を満たす。また $y_2 = \dfrac{1}{9}x + \dfrac{2}{27}$ は

$$y_2'' - 6y_2' + 9y_2 = x$$

を満たす。ゆえに $y = y_1 + y_2 = \dfrac{1}{4}e^x + \dfrac{1}{9}x + \dfrac{2}{27}$ は

$$y'' - 6y' + 9y = e^x + x$$

の解である。■

6.2 「特解を求めればよい」原理

定理 6.4 (特解があれば同次方程式に帰着できる) u を (6.2) の一つの解とするとき、次の (i), (ii) が成り立つ。

(i) z が (6.1) の任意の解とするとき、$y = u + z$ とおくと、y は (6.2) の解になる。

(ii) y が (6.2) の任意の解とするとき、$z = y - u$ とおくと、z は (6.1) の解になる。

言い換えると、 u と z に

$$y = u + z$$

という関係があるとき、

$$z \text{ が } (6.1) \text{ の解} \iff y \text{ が } (6.2) \text{ の解}.$$

証明 (i) $L[y] = L[u+z] = L[u] + L[z] = f(x) + 0 = f(x)$. (ii) $L[z] = L[y-u] = L[y] - L[u] = f(x) - f(x) = 0$. ■

上の定理の内容を

非同次方程式の一般解 = 非同次方程式の特解 + 同次方程式の一般解

と表現することがある。集合で表すと、

$$X_0 = (6.1) \text{ の解全体}, \quad X_f = (6.2) \text{ の解全体}$$

とするとき、

$$X_f = \{u + z; z \in X_0\}.$$

この右辺を $u + X_0$ と書くこともある。 その書き方を用いると $X_f = u + X_0$.

例 6.5 微分方程式

$$y'' - 3y' + 2y = 1 + x \tag{6.6}$$

を考えよう。$u = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$ はこの方程式を満たす (つまり方程式の特解である)。対応する同次方程式

$$z'' - 3z' + 2z = 0$$

の一般解は

$$z = Ae^{x} + Be^{2x} \quad (A,\ B\ \text{は任意定数})$$

であるから、(6.6) の一般解は

$$y = u + z = Ae^{x} + Be^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \quad (A,\ B\ \text{は任意定数}).\blacksquare$$

6.3 簡単な特解の発見法 (未定係数法)

以下に挙げるような特定の f (擬多項式と呼ぶことがある) についてのみ有効でしかない (適用範囲が限られている) が、簡単な特解発見法がある。

(a) $f(x) = (x$ の n 次多項式$) \times e^{\alpha x}$ で、α が特性方程式の m 重根 $(m \geq 0)$ の場合は

$$u(x) = (n\ \text{次多項式}) \times x^{m} e^{\alpha x}$$

とおいて、$L[u] = 0$ が成り立つように多項式の係数を定めればよい。

(b) $f(x) = (x$ の n 次多項式$) \times e^{ax} \times \left\{ \begin{array}{c} \cos bx \\ \sin bx \end{array} \right\}$ (ただし $a,\ b \in \mathbf{R}$) で、$a + ib$ が特性方程式の m 重根 $(m \geq 0)$ の場合は

$$u(x) = (n\ \text{次多項式}) \times x^{m} e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$$

とおけばよい。

この方法は一般性が低いが、とにかく簡単なのが長所である。

例 6.6 $L[y] = y'' - 5y' + 6y$ とするとき、次の微分方程式の一般解を求めよ。
(1) $L[y] = 6x^2 + 2x - 2$　(2) $L[y] = e^{2x}$　(3) $L[y] = \sin x$

解　特性根は $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ より $\lambda = 2, 3$. したがって対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の一般解は $z = Ae^{2x} + Be^{3x}$ $(A,\ B$ は任意定数$)$ である。

(1) 0 は特性根でないので (上の記号で $\alpha = 0,\ m = 0,\ n = 2$)、

$$u = ax^2 + bx + c$$

の形の特解があるはずである。

$$u' = 2ax + b, \quad u'' = 2a$$

であるから

$$L[u] = 2a - 5(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = 6ax^2 + (6b - 10a)x + (2a - 5b + 6c).$$

これが $6x^2 + 2x - 2$ に等しいためには

$$6a = 6, \quad 6b - 10a = 2, \quad 2a - 5b + 6c = -2$$

が必要十分で、$a = 1,\ b = 2,\ c = 1$. ゆえに $u = x^2 + 2x + 1$. 求める一般解は

$$y = z + u = Ae^{2x} + Be^{3x} + x^2 + 2x + 1.$$

(2) 2 は特性方程式の単根 (1 重根) であるから (上の記号で $\alpha = 2$, $m = 1$, $n = 0$)、

$$u = axe^{2x}$$

の形の特解があるはずである。

$$u' = ae^{2x} + 2axe^{2x}, \quad u'' = 3ae^{2x} + 4axe^{2x}$$

であるから、

$$L[u] = (3ae^{2x} + 4axe^{2x}) - 5(ae^{ax} + 2axe^{2x}) + 6axe^{2x} = -2ae^{2x}.$$

これが e^{2x} と等しいためには $-2a = 1$. ゆえに $a = -1/2$, $u = -xe^{2x}/2$. 求める一般解は

$$y = z + u = Ae^{2x} + Be^{3x} - \frac{xe^{2x}}{2}.$$

(3) $\pm i$ は特性方程式の根ではないから (上の記号で $a = 0$, $b = 1$, $m = 0$, $n = 0$)、

$$u = a\cos x + b\sin x \quad (a,\ b \text{ は定数})$$

の形の特解があるはずである。

$$u' = -a\sin x + b\cos x, \quad u'' = -a\cos x - b\sin x$$

であるから、

$$\begin{aligned} L[u] &= (-a\cos x - b\sin x) - 5(-a\sin x + b\cos x) + 6(a\cos x + b\sin x) \\ &= (5a - 5b)\cos x + (5b + 5a)\sin x. \end{aligned}$$

これが $\sin x$ と等しいためには $5a - 5b = 0$, $5a + 5b = 1$. これから $a = b = 1/10$. ゆえに $u = \dfrac{1}{10}(\cos x + \sin x)$. もとめる一般解は

$$y = z + u = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{10}(\cos x + \sin x).\blacksquare$$

問題[20]

1. 次の微分方程式を解け。
(1) $y'' - 6y' + 8y = e^x$ (2) $y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x}$ (3) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$
(4) $y'' - 3y' + 2y = e^x$ (5) $y'' - a^2y = xe^{ax}$ (6) $y'' + a^2y = x^2$
(7) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ (8) $y'' + 2y' + y = x^2$ (9) $y'' - 6y' + 9y = x + e^x$
(10) $y'' - 6y' + 9y = \cos x$ (11) $y'' - 2y' = 1 + x$

7 定数係数 2 階線型常微分方程式 (3) 非同次方程式の特解の求め方

一般の $f(x)$ に対して、非同次方程式

(7.1) $$y'' + py' + qy = f(x)$$

[20][1] の pp. 103-104 問題 2 から採ったものである。

の特解を求めるには、(1) Laplace 変換を利用する方法, (2) 定数変化法など色々な方法があるが[21]、ここでは初期値問題の **Green 関数**を用いる方法を紹介する。

> **定理 7.1 (Green 関数による特解)** 2 次方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 根を α, β とするとき、
>
> (7.2) $$G(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta \text{ の場合}) \\ xe^{\alpha x} & (\alpha = \beta \text{ の場合}), \end{cases}$$
>
> (7.3) $$u(x) = \int_0^x G(x-y) f(y)\, dy$$
>
> とおくと、
> $$u'' + pu' + qu = f(x), \quad u(0) = u'(0) = 0$$
> が成り立つ。すなわち u は (7.1) の特解である。

この定理に現れた関数 G のことを微分方程式 (7.1) の初期値問題の **Green 関数**とよぶ。

例 7.2 (準備中)

> **定義 7.3** 区間 $[0, \infty)$ で定義された連続関数 f, g があるとき、関数 $f * g$ を
> $$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y) g(y)\, dy \quad (x \in [0, \infty))$$
> で定義し、f と g の**畳み込み**（たたみこみ）または**合成積**とよぶ。

例 7.4 関数 $e_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を

$$e_1(x) = 1, \quad e_{k+1} = e_1 * e_k \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

で定義するとき、

(7.4) $$e_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

である。実際、(7.4) が $n = k$ のとき成り立つと仮定すると

$$e_{k+1}(x) = (e_1 * e_k)(x) = \int_0^x e_1(x-y) e_k(y)\, dy = \int_0^x 1 \cdot \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}\, dy = \left[\frac{y^k}{k!}\right]_0^x = \frac{x^k}{k!}$$

であり、帰納法により (7.4) は任意の自然数 n について成り立つことが分かる。■

畳み込みを用いると、上の (E.7) の u は $u = G * f$ と書けることが分かる。畳み込みは上の定理の証明にも活躍する。そのために少し準備しよう。

[21] これらについては付録で紹介する。

命題 7.5 (畳み込みの性質) (1) $(c_1 f_1 + c_2 f_2) * g = c_1(f_1 * g) + c_2(f_2 * g)$.

(2) $f * g = g * f$.

(3) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(4) $f * g \equiv 0$ ならば $f \equiv 0$ または $g \equiv 0$.

証明 (1) は簡単であるので省略する。(2), (3) は演習問題とする。(4) は省略 (例えば吉田 [3] を見よ)。 ■

定理の証明に入る前に、定数係数 1 階線型微分方程式の初期値問題

$$y' - ay = f(x), \quad y(0) = 0$$

の解は

$$y = \int_0^x e^{a(x-y)} f(y)\,dy$$

であることを思い出しておく。畳み込みを用いると

$$y = (e^{ax} * f)(x)$$

とも書ける。

定理の証明 $A(x) = e^{\alpha x}$, $B(x) = e^{\beta x}$ とおく。u が

$$u'' + pu' + qu = f(x), \quad u(0) = u'(0) = 0$$

を満たすとするとき、$v = u' - \beta u$ とおくと、

$$v' - \alpha v = (v'' - \beta v') - \alpha(v' - \beta) = v'' - (\alpha + \beta)v' + \alpha\beta v = v'' + pv' + qv = f(x),$$

$$v(0) = u'(0) - \beta u(0) = 0 - \beta \cdot 0 = 0$$

であるから、上に書いた注意より

$$v(x) = (A * f)(x).$$

ところで

$$u' - \beta u = v(x), \quad u(0) = 0$$

であるから、$u = B * v$. ゆえに

$$u = B * v = B * (A * f) = (B * A) * f.$$

ゆえに $G = B * A$ とおくと、$u = G * f$ となる。以下 G を具体的に計算して求めよう。

$\alpha \neq \beta$ の場合は

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x B(x-y)A(y)\,dy = \int_0^x e^{\beta(x-y)} e^{\alpha y}\,dy = e^{\beta x} \int_0^x e^{(\alpha-\beta)y}\,dy \\ &= e^{\beta x} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)y}}{\alpha - \beta} \right]_0^x = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

一方、$\alpha = \beta$ の場合は、

$$G(x) = \int_0^x B(x-y)A(y)\,dy = \int_0^x e^{\alpha(x-y)} e^{\alpha y}\,dy = e^{\alpha x} \int_0^x dy = x e^{\alpha x}. ■$$

問題

1. 畳み込みについて、交換法則 $f * g = g * f$, 結合法則 $(f * g) * h = f * (g * h)$ が成り立つことを証明せよ。(**注意**: 後者の証明は、重複積分の順序交換を知っていれば簡単だが、それなしで証明するのは難しいかもしれない。)

2. G を $y'' + py' + qy = 0$ (p, q は定数) の Green 関数とするとき、$G'' + pG' + qG = 0$, $G(0) = 0$, $G'(0) = 1$ が成り立つことを示せ。

3. 6.3 の問題 1 を Green 関数を用いて解け。

8 初期値問題の基礎理論

(時間が不足している場合はこの節の内容は省略してもよい。)

8.1 はじめに

常微分方程式という方法論を使い始めてみてすぐに気がつくのは、問題の解を既知の関数で表すことができない場合がある、という事実である。このことは常微分方程式のもっとも簡単な場合と言える「原始関数を求める問題」ですでにそうであったことから、容易に了解できるであろう。

この困難を解決する一つの方法は、特定の問題の解を表現できるような新しい関数を導入することである。これは一定の成果をおさめたが、一方で解が存在すること自体を保証する方法[22]が求められたのも当然のことであろう。

8.2 解の存在

常微分方程式の初期値問題の解の存在を保証するには、次の定理が便利である (証明は省略)。

定理 8.1 (f が連続ならば解は存在する) $f(x, y)$ が連続関数ならば、

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

に対して、十分小さな範囲では解が存在する。つまり、ある正数 δ と、区間 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ で定義された関数 u で、

$$u'(x) = f(x, u(x)) \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)), \quad u(x_0) = y_0$$

を満たすものが存在する。

注意 8.2 しばしば「この微分方程式は現実に起っている現象を表しているのだから、解が存在するのは当たり前である」と考える人がいるが、それは誤解である。例えば物理現象を「記述する」微分方程式であるとしても、微分方程式は現象そのものではなく、せいぜい近似としか言えないものである。実際に現象が起こることはせいぜい「状況証拠」であって、数学的な証明にはならない。

[22]例えば、高校数学の段階でも、方程式の解を具体的に式で表示できなくても、グラフによる考察 (曲線と曲線が交わる — 厳密には中間値の定理を根拠とする) から解の存在の証明せよ、あるいは解の個数を調べよ、という問題があった。

8.3 解の存在範囲

前項の定理で、δ という範囲を制限するものが出て来てしまったが、これは仕方がないことである。

例 8.3 常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

は変数分離形なので容易に解ける。これに

$$y(0) = a \quad (a \text{ は正定数})$$

という初期条件をつけた初期値問題の解は

$$y = \frac{1}{1/a - x} \quad (x \in (-\infty, 1/a)).$$

$\displaystyle\lim_{x \to 1/a - 0} y = \infty$ となっている。このように解の大きさが無限大に発散することを**解の爆発**, そのときの変数の値 (ここでは $1/a$) のことを**爆発時刻**とよぶ。$x \geq 1/a$ の範囲まで解を延長することは不可能であることに注意しよう。■

爆発が起らない場合は、解は方程式が意味を持つ (f の定義域をはみ出ない) 範囲で存在することが知られている。爆発が起らないための十分条件としては、次の**リプシッツ条件**が有名である[23]。

y に関する Lipschitz 条件

$$\text{定数 } L \text{ が存在して} \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

特に $f(x, y)$ が y の 1 次関数 ($f(x, y) = A(x)y + b(x)$ という形) である場合 (言い換えると線型微分方程式の場合) は、ごく緩い仮定 (例えば $A(x)$ が有界) の下でリプシッツ条件が成り立つ (したがって解の爆発は起らない)。

爆発が起らない場合は、解は方程式が意味を持つ (f の定義域をはみ出ない) 範囲で存在することが知られている。これについて、以下なるべく簡潔な説明を試みる。

D を $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ の領域または閉領域とする[24]。$f\colon D \to \mathbf{R}^n$ は連続で、微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{8.1a}$$

に初期条件

$$x(t_0) = x_0 \tag{8.1b}$$

を課した初期値問題について考える。

以下、初期値問題 (8.1a), (8.1b) の解とは、その定義域が t_0 を左端とする区間 I で、初期条件 $x(t_0) = x_0$ と、I 全体で微分方程式を満たすような関数 $x(t)$ のことをいう。また、I のことを解 $x(t)$ の定義区間と呼ぶことにする。

初期時刻 t_0 の十分近く (ある正の数 δ に対して、$t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ を満たす範囲) では解 (局所解) が存在する、という定理があるわけだが、それだけでは満足できない。出来る限り広い範囲での解の存在を保証してほしい。

[23] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903, Königsberg に生まれ、Bonn にて没する) にちなむ。

[24] 領域とは連結開集合のこと。また閉領域とは、ある領域の閉包になっている集合のこと (D が閉領域とは、ある領域 Ω が存在して、$D = \overline{\Omega}$ が成り立つこと)。

ここではまず素朴な検討をしてみる。新たな初期条件

$$x(t) = x(t_0 + \delta)$$

を課した初期値問題を考えることで、もう少し先まで ($[t_0, t_0 + \delta + \delta']$ まで) 解を延ばすことができる。ちょっと考えると、これを続けることで、どこまでも解を延ばすことが出来そうだが、有限の限界 T があるかもしれない ($t_0 + \delta + \delta' + \delta'' + \cdots = T < +\infty$ — 正の数を足し続けても、限りなく増えるわけではない)。

(8.1a), (8.1b) の解のうち、真に大きな定義区間が存在しないような (それ以上延ばせない) 解のことを、(8.1a), (8.1b) の**極大延長解**と呼ぶことにする。例えば

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \tag{8.2}$$

$$x(0) = a \tag{8.3}$$

の場合、$x(t) = \dfrac{1}{1/a - t}$ $(-\infty < t < 1/a)$ は極大延長解である。

微分方程式の初期値問題の解の一意性が成り立つ場合 (例えば x について局所 Lipschitz 条件が成り立つ) には、極大延長解を構成するという方針で、極大延長解の存在が証明できる (例えば高野 [4] の §5.3)。この場合は最大延長解と呼ぶ方が適切かもしれない。

簡単のため、以下の議論では解の一意性が成り立つことを仮定する。

いくつかのテキストで、次のように説明されている。

「極大延長解 $x(t)$ $(t_0 \le t < T$ あるいは $t_0 \le t \le T)$ は、$t \to T$ のとき $x(t)$ が有界でないか、f の定義域 D の境界に近づく」

これを用いると、解 $x(t)$ が有界であることを示せば、解が D の境界に近づくことが分かる。これは満足すべき状況に思えるかもしれない。

しかし D の境界に近づくとは、正確にはどういう意味であろうか。正直なことを言うと、私にはよく分からない ($t \to T$ のとき、$x(t)$ は有界であるが、振動し、$x(t)$ は境界から離れたり近づいたりすることがありそうに思われる)。定義を明記してあるテキストを見た覚えがない。定義を書いていないということは、証明もきちんとは書かれていないことを意味する。

仕方がないので、私自身は、次のことを使っている。

極大延長解のグラフ上で f が有界ならば、$x_T := \lim_{t \to T} x(t)$ が存在して、(T, x_T) は D の境界点である (すなわち $(\forall \varepsilon > 0)$ $B((T, x_T); \varepsilon)$ は D と $D^{\complement}$ の両方と交わる)。

証明には、次の二つの定理を用いる。

定理 8.4 $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $f \colon D \to \mathbf{R}^n$ は連続、$\varphi \colon I = (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ は連続, $\operatorname{graph} \varphi \subset D$,

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (t \in I).$$

さらに f が $\operatorname{graph} \varphi$ 上で有界ならば、$\lim_{t \to \beta} \varphi(t)$ が存在する。

もちろん、f が D 全体で有界である場合も、同じ結論が成り立つ。

定理 8.5 x が $(t_0,t_1]$ で連続で、(t_0,t_1) で微分可能で、$(t_1,x_1)\in D$,

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}(t)=f(t,x(t))\quad(t\in(t_0,t_1)),\\&x(t_1)=x_1\end{aligned}$$

を満たすならば、x は $(t_0,t_1]$ で微分方程式を満たす。すなわち x は t_1 でも微分可能であり、

$$\frac{dx}{dt}(t_1)=f(t_1,x(t_1))$$

を満たす。

(この 2 つの定理の証明には、関数が初期値問題の解であることと、積分方程式の解であることが同値であることを用いる。難しくないが、証明の詳細は桂田 [5] を見よ。これは、コディントン・レヴィンソン [6] の第 1 章 4 節の定理 4.1 を参考にして考えたことをメモしたものなので、直接 [6] を見る方が確かかもしれない。)

極大延長解の場合に、もしも (T,x_T) が D の内点であれば、初期条件 $x(T)=x_T$ の初期値問題を考えることで、解が T を超えて延長できることが導かれ、矛盾が生じる。ゆえに (T,x_T) は D の境界点である。

極大延長解の定義域が $\mathbf{R}$ 全体となる場合はしばしばあるが、その証明に使える可能性のある定理を 1 つ紹介する。(この設定の一般性はあまり高くないが、そのまま使えるケースが結構あり、この議論に習熟しておくと、この定理の直接の守備範囲外にも応用が利くと思われる。)

定理 8.6 (相空間が $\mathbf{R}^n$ 全体の力学系の解軌道の上で f が有界ならば、極大延長解の定義区間は $\mathbf{R}$) $f\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ は連続 (特に f は $\mathbf{R}^n$ 全体で定義されている)、$\varphi\colon I\to\mathbf{R}^n$ は C^1 級で微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)=f(\boldsymbol{x}(t))$$

の極大延長解とする。f が $\operatorname{Image}\varphi=\varphi(I)=\{\varphi(t)\mid t\in I\}$ の上で有界ならば $I=\mathbf{R}$.

証明 定義区間 I が $\mathbf{R}$ でないとして矛盾を導く。

$\beta:=\sup I$ が有限であるとすると、定理 8.4 より、$x_1:=\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t)$ が存在する。初期条件 $x(\beta)=x_1$ を課した初期値問題を考えることで、β よりも大きいところまで解が延長され、極大延長解であることと矛盾する。ゆえに $\beta=+\infty$.

同様に $\inf I=-\infty$ であるから、$I=(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$. ■

例 8.7 Lotka-Volterra の方程式

$$\begin{aligned}x'(t)&=ax-bxy,\\y'(t)&=-cy+dxy\end{aligned}$$

を考えよう (a, b, c, d は正の定数である)。$f(x,y):=\begin{pmatrix}ax-bxy\\-cy+dxy\end{pmatrix}$ の定義域は、通常は扱っている現象での意味 (x, y は生物の個体数) を考えて

$$\Omega:=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\;\middle|\;x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$$

とするが、$\mathbf{R}^2$ 全体と考えても良い。そのうえで第 1 象限の点 (x_0, y_0) から出発する解を考えると、(よく知られているように)

$$\frac{y^a x^c}{e^{by}e^{dx}} = \frac{y_0^a x_0^c}{e^{by_0}e^{dx_0}}$$

が成り立つ。この方程式は閉曲線を表す (解軌道はこの閉曲線に含まれる…実は一致する)。それは $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合 (ゆえにコンパクト) であり、特に f はその上で有界である (「$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合上の連続関数は最大値・最小値を持つ」)。ゆえに極大延長解の定義域は $\mathbf{R}$.

解軌道の方程式が具体的に得られない場合も、それが $\mathbf{R}^n$ のあるコンパクト部分集合 (有界閉集合) に含まれていることが分かれば、同様の議論ができる。■

8.4 解の一意性

常微分方程式の初期値問題の解の存在が分かったとして、つぎに気になるのは、解がただ一つに限るかということである。

既に調べたことのある方程式 (2.7) だが、初期値問題

$$y' = |y|^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

を考えよう。すぐにわかる $y \equiv 0$ 以外に、

$$y = \begin{cases} (x - C_1)^3 & (x < C_1) \\ 0 & (x \geq C_1), \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 0 & (x < C_2) \\ (x - C_2)^3 & (x \geq C_2), \end{cases} \qquad y = \begin{cases} (x - C_1)^3 & (x < C_1) \\ 0 & (C_1 \leq x \leq C_2) \\ (x - C_2)^3 & (x > C_2) \end{cases}$$

なども解である (ただし C_1 は 0 以下の、C_2 は 0 以上の、ともに任意の定数とする)。

そこで解の一意性を保証する条件が知りたくなるが、次のものが有名である。

定理 8.8 (リプシッツ条件をみたす場合の一意性) 連続関数 $f(x, y)$ が y に関するリプシッツ条件

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (L \text{ は定数})$$

を満たすとき、常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (x \in [a, b]), \quad y(a) = y_0$$

の解 $y = \varphi_1(x)$ $(x \in [a, b_1])$, $y = \varphi_2(x)$ $(x \in [a, b_2])$ に対して、

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad (x \in [a, b_*],\ b_* := \min\{b_1, b_2\})$$

が成り立つ。

証明 $\psi(x) := \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ $(x \in [a, b_*])$ とおく。

$$\varphi_j(x) = y_0 + \int_a^x f(s, \varphi_j(s))\,ds \quad (j = 1, 2)$$

より

$$\psi(x) = \int_a^x \left[f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\right] ds$$

ゆえに

$$\begin{aligned}|\psi(x)| &\le \int_a^x |f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))|\,ds\\ &\le \int_a^x L\,|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|\,ds = L\int_a^x |\psi(s)|ds.\end{aligned}$$

ここで $M := \max_{x\in[a,b_*]} |\psi(x)|$ とおくと、

$$\begin{aligned}|\psi(x)| &\le LM(x-a),\\ |\psi(x)| &\le L\int_a^x LM(s-a)\,ds = L^2M\frac{(x-a)^2}{2},\\ |\psi(x)| &\le L\int_a^x L^2M\frac{(s-a)^2}{2}\,ds = L^3M\frac{(x-a)^3}{3!},\cdots\end{aligned}$$

以下帰納的に

$$|\psi(x)| \le M\frac{[L(x-a)]^n}{n!} \le M\frac{[L(b_*-a)]^n}{n!} \quad (n\in\mathbf{N}).$$

これから $n\to\infty$ の極限を考えると、$\psi(x)\equiv 0$ が分かる。ゆえに $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ $(x\in[a,b_*])$. ■

常微分方程式の初期値問題の場合、一意性が成り立つというのは解が枝分かれをしないことであるから、一意性を保証するには Lipschitz 条件は局所的なもので十分であり (つまり L は全体で統一的に取れなくても構わない)、例えば f が C^1 級であればよいことが分かる。すなわち次が成立する。

系 8.9 (C^1 級ならば一意性が成立) f が C^1 級の関数であるとき、常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (x\in[a,b]),\quad y(a)=y_0$$

の解 $y=\varphi_1(x)$ $(x\in[a,b_1])$, $y=\varphi_2(x)$ $(x\in[a,b_2])$ に対して、

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x) \quad (x\in[a,b_*],\ b_* := \min\{b_1,b_2\})$$

が成り立つ。

上の例の $f(x,y)=|y|^{2/3}$ では、$y=0$ で f は微分不可能で、Lipschitz 条件も 0 のところで崩れていることに注意しよう。

8.4.1 初期値問題の解の一意性のありがたみ

筆者は学生の頃「解の一意性のありがたみは分かりにくいかもしれない」という意味の文章を読んだ、当時は「確かにそうだ」と感じた覚えがあるが、今となっては、一意性が成り立つことが保証されないと非常に困ると感じる。

そもそも、解の一意性が成り立たないと、どの解について議論しているのかをはっきりさせる (例えば名前をつけたり、記号で表す) のが面倒である。

例 8.10 (力学系) 自励系微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=f(x)$ の力学系の議論をしているとき、微分方程式の解で初期条件 $x(t_0)=x_0$ を満たすものを $\varphi(t;t_0,x_0)$ のような記号で表す習慣があるが、これは初期値問題の解が一意的であると分かっているから出来ることである。また

$$\varphi(t+s;0,x_0) = \varphi(t;s,\varphi(s;0,x_0))$$

という条件 (力学系の公理の条件の 1 つ) が成り立つことの証明にも、解の一意性が必要となる。■

解の一意性が成り立つ場合に以下のことが成り立つ。

- 「解曲線が交わったり」はしない。任意の2つの解曲線は、共通部分が空集合である (共有点が1つもない) か、定義域の共通部分で一致する (これは解の一意性定理から直接導かれる)。特に極大延長解の解曲線は完全に一致するか、共通部分が空集合であるかかのどちらかである。
- 力学系 (自励系) の場合も、極大延長解の解軌道は完全に一致するか、共通部分が空集合であるかのどちらかである。実際、2つの解 $\varphi_1\colon I_1=[\alpha_1,\beta_1]\to\Omega$, $\varphi_2\colon I_2=[\alpha_2,\beta_2]\to\Omega$ に対して、$\varphi_1(t_1)=\varphi_2(t_2)$ を満たす $t_1\in I_1$, $t_2\in I_2$ が存在するならば、任意の t に対して $\varphi_1(t)=\varphi_2(t+t_2-t_1)$ が成り立つ。)

色々な定理の証明において、解の一意性が役に立つ。初学者が学ぶ基本定理では、例えば次のようなものがある。

- 1階線形方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ $(A(t)\in M(n;\mathbf{R}))$ の解空間は n 次元線形空間である。
- n 階同次線形方程式 $\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0$ の解空間は n 次元線形空間である。

まとめ

1階正規形常微分方程式の初期値問題

$$y'=f(x,y),\quad f(x_0)=y_0$$

については、

(1) f が連続でありさえすれば、(x_0,y_0) の十分近くで解は存在する。

(2) f が C^1 級であれば、解は一意である。

(3) f が C^1 級であっても爆発という現象がありうる。y に関するリプシッツ条件

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|\quad (L\text{ は定数})$$

が成り立てば爆発は起こらない。特に有界な係数を持つ線型方程式では爆発は起こらない。

問題解答

1節

1. (1) 2階, $y'' = -\frac{1}{x^2}yy' + \frac{3}{x}$ (2) 1階, $y' = \pm\sqrt{y^2 + \log(1+x^2)}$ (3) 3階, $y''' = \frac{(y'')^2}{y'}$ (4) 2階, $y'' = \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{6}{1-x^2}y$ (5) 4階, $y^{(4)} = \frac{2}{2}y^{(3)} - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}e^x$ (6) 3階, $y''' = -\frac{1}{x}y'' - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)y'$ (7) 2階, $y'' = \pm\sqrt{k(1+(y')^2)}$ (8) 2階, $y'' = -\frac{x}{2}y' - 4y$

2. (1) $y = 1 + \frac{C}{x}$ (2) $y = \frac{x^2}{4} + C_1 \log x + C_2$ (3) $x^2 + a^2y^2 = C$ (4) $y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$ (5) $y^2 + 2xy = C$ (6) $y = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x + C\right)$ (7) $a^2 - y^2 = (C \pm x)^2$ (8) $y = a\sin(C \pm x)$ (9) $y = C_1 \sin(C_2 \pm x)$ (10) $y = x\left(C + \int f(x)\,dx\right)$

2節

1. (1) $y = \frac{2x^2}{Cx^2 - 1}$ (2) $y = (x+C)^3$ (3) $y = \frac{1}{4}\left(x^2 + 1 - \frac{1}{x^2+1}\right)$ (4) $y = \frac{x}{Cx - 1}$
(5) $y^2 = \frac{5x^2}{Cx^5 - 2}$ (6) $y = \frac{Cx}{x+1}$ (7) $y = \frac{1}{ax + C}$ (8) $y = \cot^{-1}(\log|\cos x| + C)$
(9) $y - \log|y| = x + \log C|x|$ (10) $\sin x \cos y = C$ (11) $y = \left(\frac{1}{3}\log|1+x^3| + C\right)$
(12) $y = \frac{b(C + e^{2abx})}{C - e^{2abx}}$ (13) $y = \tan^{-1}(\tan^{-1}x + C)$ (14) $y = \tan^{-1}(x - \cos x + C)$
(15) $y = C\sqrt{|x^2 - 1|}$ (16) $\frac{1}{2}y^2 + \log|y| = \frac{1}{2}x^2 + \log C|x|$ (17) $y - \log|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + C$
(18) $y = \frac{C + x^2}{C - x^2}$ (19) $y = -\frac{1}{2}\log(-e^{2x} + C)$ (20) $y = \log(C - e^{-x})$ (21) $y = Ce^x$ $(C > 0)$ または $y = Ce^{-x}$ $(C < 0)$ (22) $y^2 = x^2 + C$ (23) $y = (\sqrt{x} + C)^2$ (24) $y^{3/2} = x^{3//2} + C$
(25) $y = \frac{x}{Cx + 1}$ (26) $y = \frac{2x^2}{Cx^2 + 1}$ (27) $y^2 = (\sqrt{1 + x^2} + C) - 1$

2. (1) $y^2 = C(x^2+1)^2 - 2$ (2) $|y| = \exp(-\exp(2x) + C)$ (3) $y = \tan\log C|x|$
(4) $y = \cot^{-1}(\tan x + C)$ (5) $\log|y| + \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{x^2} + C$ (6) $y = \frac{C}{\sin x}$ (7) $y^2 = C(x^2+2)^4 - 1$
(8) $y = \log(e^x + C)$ (9) $y^2 = C(x^2+1) - 1$

3節

1. (1) $y = Ce^{-ax}$ (2) $y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$, $a \neq 0$ (3) $y = (C + x)\operatorname{cosec} x$ (4) $y = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$
(5) $y = C\sec x - \frac{1}{2}\cos x$ (6) $y = Ce^{x^2} + xe^{x^2}$ (7) $y = \frac{C}{x} + \frac{1}{2}(x\log x - \frac{1}{2}x)$ (8) $y = Ce^{-ax} + \frac{1}{a+b}e^{bx}$
(9) $y = C|x|^a$ (10) $y = C\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) - 1$ (11) $y = \frac{C}{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3$ (12) $y = \frac{C}{x} + 2x + x^3$
(13) $y = Cx + \frac{1}{2}x(x - \cos x \sin x)$ (14) $y = (C + \cos x)e^{-\sin x}$ (15) $y = Cx - \frac{x}{2}\log(1 - x^2)$

(16) $y=Ce^{ax}-\dfrac{1}{1+a^2}(a\sin x+\cos x)$ (17) $y=\sqrt{1+x^2}(C+\tan^{-1}x)$ (18) $y=Ce^{-x-x^3/3}+e^{-x^3/3}$
(19) $y=Ce^{-ax}+\dfrac{b}{a}x^2+\dfrac{1}{a}\left(c-\dfrac{2b}{a}\right)x+\dfrac{1}{a}\left(d-\dfrac{c}{a}+\dfrac{2b}{a^2}\right)$ (20) $y=\dfrac{C}{x}e^{-x}+\dfrac{1}{2x}e^3$

2. (1) $y=-e^{-x}+1$ (2) $y=e^{-x}+x-1$ (3) $y=bx^{-a}$ (4) $y=\dfrac{1}{1+a^2}(e^{-ax}-a\sin x-\cos x)$ (5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ (6) $y=2|\cos x|$

4節

1. (1) $(x+y)(y-2x)^2=C$ (2) $y=\dfrac{C}{x}+x$ (3) $y=x\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\log|x|+C}\right)$ (4) $x^2+4xy-2y^2=C$ (5) $(x-y)(x-3y)=C$ (6) $y+\sqrt{x^2+y^2}=C$ (7) $y=x\left(\dfrac{x^3-2C}{2x^3-C}\right)$ (8) $y^3=3x^3\log Cx$ (9) $y=x\tan^{-1}(\log|x|+C)$ (10) $y=x(\pi-1-\cos^{-1}\log Cx)$ (11) $x^2-y^2=Cx$ (12) $x^2+y^2=C(2x+y)$
(13) $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=C$

2. (1) $y=\left(\dfrac{C}{x^2+1}+2\right)^2$ (2) $y=\dfrac{x^2+1}{x\sin x+\cos x+C}$ (3) $y^2=\dfrac{1}{1+Ce^{2x^2}}$ (4) $(C-2x)y^2=e^{-x^2}$ (5) $(C+2x)y^2=e^{x^2}$ (6) $y^{-1/3}=-2x+Cx^{2/3}$ (7) $2\sqrt{y}=\log x-1+\dfrac{C}{x}$ (8) $y(C-\sin x)=x^2$ (9) $y=\dfrac{1}{16(x-1)^2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\log(x+\sqrt{x^2-1})+C\right]^2$

3. (1) 1, $(y-1)(1-x+Ce^{-x})=1$ (2) 2, $(y-2)(1-3x+Ce^{-3x})=9x$ (3) x, $(x-y)\left(\int e^{-x^2/2}\,dx+C\right)=e^{-x^2/2}$ (4) $4x$, $(y-4x)\left(C-\int e^{2x^2}\,dx\right)=e^{2x^2}$ (5) x^2, $(y-x^2)(C-x)=1$ (6) $\sqrt{x}$, $(y-\sqrt{x})\left(-\dfrac{1}{2}+Ce^{-(4/3)\sqrt{x^3}}\right)=\sqrt{x}$ (7) -1, $(y+1)(1-Ce^{-x})+1=0$ (8) 1, $(y-1)(C-x)=1$

4. (1) $x-y=\coth(x+C)$ (2) $\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)=x+C$ (3) $\sin(x+y)=x+C$ (4) $x+y+2=Ce^y$ (5) $x+y+1=Ce^{x-y}$ (6) $(x+y+1)^2-(x+y)\sqrt{(x+y)^2-1}+\cosh^{-1}(x+y)=4x+C$

5. (1) $C(y-x-4)^2=e^{(x+9)/(y-x-4)}$ (2) $x=Ce^t\cos t-\dfrac{1}{2}$, $y=Ce^t\sin t-\dfrac{1}{2}$

5節

1. (1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$ (2) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ (3) $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$ $(a\neq 0)$, $y=C_1e^{2x}+C_2x$ $(a=0)$ (4) $y=C_1e^{(-a/2+\sqrt{a^2/4-k^2})x}+C_2e^{(-a/2-\sqrt{a^2/4-k^2})x}$ $(|a|\neq|2k|)$, $y=C_1e^{-(a/2)x}+C_2e^{-(a/2)x}$ $(|a|=|2k|)$ (5) $y=C_1e^{-x}+xC_2e^{-x}$ (6) $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$
(7) $y=C_1e^{2x}\cos x+C_2e^{2x}\sin x$ (8) $y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x$

6節

1. (1) $y=\dfrac{1}{3}e^x+C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$ (2) $\dfrac{1}{10}(3\cos x+\sin x)+C_1e^x+C_2e^{2x}$ (3) $\left(\dfrac{x^2}{4a}-\dfrac{x}{4a^2}\right)e^{ax}+C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$ (4) $y=\left(\dfrac{x^2}{2}+C_1+C_2x\right)e^{-x}$ (5) $y=x^2-4x+6+(C_1+C_2x)e^{-x}$

(6) $y=\frac{x}{9}+\frac{2}{27}+\frac{e^x}{4}+(C_1+C_2x)\,e^{3x}$ (7) $y=\frac{1}{50}(4\cos x-3\sin x)+(C_1+C_2x)e^{3x}$

(8) $y=-\frac{1}{4}(x^2+3x)+C_1+C_2e^{2x}$

付録

A そのほか

A.1 階数低下法

(準備中)

A.2 完全微分方程式

(準備中)

B 定数係数 2 階線型非同次方程式の特解の発見法

定数 p, q と関数 $f(x)$ が与えられたとき、

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{B.1}$$

の特解の求め方として、本文中では未定係数法や初期値問題の Green 関数を用いる方法を紹介したが、他にも重要な方法があるので簡単に紹介しておく。

B.1 定数変化法

1 階線型非同次方程式のところで紹介した定数変化法 (の変種) で特解を求めることもできる。この方法はさらに大きく二つに分類できる。

(a) 連立 1 階方程式

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{F}(x)$$

に直して、公式[25]

$$\vec{y} = e^{xA}\vec{y}_0 + e^{xA}\int_{x_0}^{x} e^{-tA}\vec{F}(t)\,dt$$

を用いる。

この公式は定数変化法で簡単に導出できて「暗記要らず」であり、また理論的な考察には非常に便利だが、具体的な問題を解く場合には、計算は大げさと言うか非常に煩雑になりやすい。

(b) 直接 2 階方程式のままで扱う方法

同次方程式の解の基本系 y_1, y_2 を求めておいて、

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

とおいてみる。まず

$$y' = [c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2] + [c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'].$$

このまま y'' を計算するとき、第 1 項の微分が煩雑になるので、

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \tag{B.2}$$

[25]既に見た定数係数 1 階線型非同次方程式の解の公式 (本文中にある) の一般化である。

という条件を仮定してしまう (c_1, c_2 に条件として課す — そうしても用が足りると分かっている)。すると、

$$
\begin{aligned}
y' &= c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2', \\
y'' &= [c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'] + [c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2'']
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
L[y] = y'' + py' + qy &= c_1(x)L[y_1] + c_2(x)L[y_2] + [c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'] \\
&= c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'.
\end{aligned}
$$

ゆえに $L[y] = f(x)$ を満たすには、

$$
c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \tag{B.3}
$$

でなければならない。

(E.1), (E.2) を連立方程式として解いて $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ を求め、積分して $c_1(x)$, $c_2(x)$ を求め、特解 $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ を得る。

例 B.1 (2 階方程式に対する定数変化法の例) $L[y] = y'' - 6y' + 8y = e^x$. まず同次方程式 $L[z] = 0$ の一般解は $z = Ae^{2x} + Be^{4x}$. そこで特解を

$$
y = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{4x}
$$

とおいてみる。

$$
y' = \bigl(c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{4x}\bigr) + \bigl(c_1(x)2e^{2x} + c_2(x)4e^{4x}\bigr)
$$

であるが

$$
c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{4x} = 0 \tag{B.4}
$$

を仮定すると

$$
y' = 2c_1(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{4x}.
$$

これから

$$
y'' = \bigl(2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}\bigr) + \bigl(4c_1(x)e^{2x} + 16c_2(x)e^{4x}\bigr).
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
L[y] &= \bigl(2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}\bigr) + \bigl(4c_1(x)e^{2x} + 16c_2(x)e^{4x}\bigr) - 6\bigl(2c_1(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{4x}\bigr) \\
&\qquad + \bigl(c_1(x)e^{2x} + c \\
&= 2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}.
\end{aligned}
$$

これが e^x に等しければよいので、

$$
2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x} = e^x. \tag{B.5}
$$

(E.3), (E.4) をまとめて、

$$
\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ 2e^{2x} & 4e^{4x} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}.
$$

これを c_1', c_2' について解く。

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ 2e^{2x} & 4e^{4x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}e^{-x} \\ \dfrac{1}{2}e^{-3x} \end{pmatrix}.$$

これを満たす c_1, c_2 としては、例えば

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}e^{-x} \\ -\dfrac{1}{6}e^{-3x} \end{pmatrix}$$

とすれば良い。つまり特解として

$$u = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{4x} = \frac{1}{2}e^{-x}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{-3x}e^{4x} = \frac{1}{3}e^x$$

が得られる。これから $L[y] = e^x$ の一般解は

$$y = Ae^{2x} + Be^{4x} + \frac{1}{3}e^x. \blacksquare$$

この方法も理論的な問題にはしばしば効力を発揮するが、実際の問題を解くには計算が面倒になりがちである。

B.2 演算子法

演算子法にも色々あるが、Oliver Heaviside[26] (1850–1925, 英国) が電気回路の問題に現れる常微分方程式 (不連続な非同次項を持つ) を解くために導入し、組織的に使ってみせたものが、一番強力で、また広く普及している。微分演算子 p とその逆演算子 p^{-1}

$$pf(x) = \frac{d}{dx}f(x), \quad p^{-1}f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

を導入することで、微分方程式を代数方程式に変換し、特解を機械的に容易に求めることが出来る。

演算子法の数学的正当化として、主なものは次の二つがある。

1. Laplace 変換を用いるもの (T. Bromwich による)
   多くの本に載っている。

2. ミクシンスキー (Jan Mikusiński) による方法
   ミクシンスキー自身による教科書 [7], [8] 吉田 [9] などを見よ。

[26] 業績としては、Maxwell の理論の整理なども重要である (有名な Maxwell の方程式も、あれだけ簡単になったのは Heaviside の貢献が大きいという。ベクトル解析の開発も彼によるところが大きいとか。

演算子法の正当化 — Laplace 変換を使うかどうか (テキストとしてはカットだろう)

次は松浦重武氏による吉田 [9] の書評中の文章である ([10] に収録されている)。

> そこで、演算子法の数学的正当性を証明するための努力が払われた。そのために最初に案出されたのは、**ラプラス変換**を用いる方法である。これが、ながい間大学の電気工学科において、ラプラス変換が重要科目となった理由である (いまでも、その伝統は残っているようである)。しかし、ラプラス変換による正当化は、演算子法の適用範囲を狭くするし、学習者に複素関数論の高度な知識を要求することになって、重荷となり、ヘビサイド算法の自由闊達さを抹殺することになった。

一方、木村 [11] には次のようにある。

> ⋯ Laplace 変換は線形微分方程式と複素関数論を結びつける。Laplace 変換は線形微分方程式を代数的に解く簡単な手法 (演算子法) を与えてくれるだけでなく、それが表現する動的な現象や動的なシステムの構造や性質を、複素関数の解析的、代数的性質として表現することによって動的なシステムに対する深い洞察を与えてくれる。

対照的な意見ではある。

B.3 Laplace 変換の利用

本質的には演算子法と同じと言えるのかもしれないが、演算子法と違って間違えやすいところがなく、不安なく勧められる方法である。

Laplace 変換をマスターするには少し手間がかかるが、覚えてしまえば簡単だし、応用が効くので勉強の価値はある。

この文書の付録に簡単にまとめる予定である。

B.4 微分演算子の因数分解に基づき一階ずつ積分していく方法

特性多項式の根を α, β とするとき、

$$(D-\alpha)\left((D-\beta)y\right)=f(x)$$

であることと、

$$(D-a)y=f(x)\quad \text{すなわち}\quad y'-ay=f(x)$$

の解が

$$y=Ce^{a(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{a(x-t)}f(t)\,dt\quad (C\ \text{は任意定数})$$

で与えられることを用いると、次の定理を得る。

定理 B.2 α, β が特性方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ の根で、f が区間 I 上の連続関数、x_0 は I に含まれる任意の点とするとき、

$$u(x)=\int_{x_0}^{x}e^{\beta(x-t)}\left(\int_{x_0}^{t}e^{\alpha(t-s)}f(s)\,ds\right)dt \tag{B.6}$$

は

$$u''+pu'+qu=f(x),\quad u(x_0)=u'(x_0)=0$$

を満たす。

この方法は実際に実行してみると面倒だが、コンピューター上の数式処理系が利用できる場合には案外他の方法よりも簡単である。

$x_0 = 0$ の場合には、本文で紹介した Green 関数を用いる方法と本質的に同じものである。

B.5 Green 関数を用いる方法の n 階方程式への拡張

本文 7 節の内容を説明してある本は少ないので、n 階の微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$$

の場合への拡張について説明しておく。

特性根を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ として、

$$G(x) = e^{\alpha_1 x} * e^{\alpha_2 x} * \cdots * e^{\alpha_n x}, \quad u(x) = G * f(x)$$

とおくと、u は

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}u' + a_n u = f(x), \quad u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

をみたす。Green 関数 G の計算には Laplace 変換が役立つ。

$$\mathcal{L}[G](s) = \mathcal{L}[e^{\alpha_1 x} * \cdots * e^{\alpha_n x}](s) = \mathcal{L}[e^{\alpha_1 x}](s) \cdots \mathcal{L}[e^{\alpha_n x}](s) = \frac{1}{s-\alpha_1} \cdots \frac{1}{s-\alpha_n}.$$

この右辺を部分分数分解してから、Laplace 逆変換すれば G が求められる。

特に特性根が相異なるならば、この右辺は

$$\frac{1}{s-\alpha_1} \cdots \frac{1}{s-\alpha_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{s-\alpha_j}, \quad A_j = \prod_{j\neq k}(\alpha_k - \alpha_j)$$

と部分分数分解できるので、容易に

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{\alpha_j x}$$

であることがわかる。なお、G は次の条件で特徴づけられる:

$$\begin{aligned} &G^{(n)} + a_1 G^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}G' + a_n G = 0, \\ &G(0) = G'(0) = \cdots = G^{(n-2)}(0) = 0, \quad G^{(n-1)}(0) = 1. \end{aligned}$$

問 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha$ の場合は、$G(x) = \dfrac{x^{n-1}e^{\alpha x}}{(n-1)!}$ であることを示せ。

C 最近の情勢

1. ある意味では微分方程式は常識化して、各分野に浸透してしまっているため、従来のように物理中心の例だけで教育するのは適切ではなくなっているかもしれない。
2. 微分方程式は「紙と鉛筆の計算」では解けないものが多く、コンピューター・シミュレーションが欠かせなくなってきている。基礎数学 IV で学ぶ程度のことは最低限の基礎であり、その重要性は揺るがないが、そこから先に何を学ぶか、研究するかは真剣に考えるべき問題である。
3. 一方で、微分方程式でない離散的な方程式の重要性も高まってきている。ある意味ではそちらの方が取り扱いが難しい面もあるが、コンピューターの力添えもあって浸透してきた。

D　2003年度基礎数学IVのメモ

D.1　ガイダンス

2003年度の基礎数学IVの授業では以下のようなことをしゃべった。

D.1.1　今日からパート2

基礎数学IVでは、ここまで級数の勉強をしてきましたが、今回から最後まで、微分方程式の勉強をします。級数と微分方程式はオーバーラップするところもありますが、この基礎数学IVで学ぶ範囲に限定すると、完全に独立した話です。

D.1.2　勉強の仕方

ある意味で微分方程式の範囲は勉強がしやすい。今回の君達に求められているのは、やさしい計算問題を解ける力をつけ、その過程で微分方程式に対する感覚を養うことです。問題集に載っている問題を解くことでトレーニングをする、という方法が十分通用します。身につけて欲しい概念というのがあるわけですが、それは問題を解けるようになってからでOKというか、解けるようになることで身につけられます。

微分方程式に限って言えば、プリントの問題をこなすのが良いでしょう。

D.2　基礎数学 IV の微分方程式のあらすじ (授業最後のまとめ)

落体の法則の方程式

$$y'' = -g \quad (g \text{ は正の定数})$$

のように $y'' = f(x)$ あるいは $y' = f(x)$ の場合には単純に積分することで解ける。この場合

$$y' = -gx + C \quad (C \text{ は積分定数}), \quad y = -\frac{g}{2}x^2 + Cx + C' \quad (C' \text{ は積分定数}).$$

変数分離形の方程式

$$y' = f(x)g(y)$$

は $f(x)$, $1/g(y)$ の原始関数 F, G を用いると

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \quad \therefore \quad G(y) = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \therefore \quad y = G^{-1}(F(x) + C)$$

という手順で解ける。この変数分離形に分類される方程式としては、

$$y' = ay \quad (\text{放射性元素の崩壊, マルサスの法則}),$$

$$y' = (a - by)y \quad (\text{ロジスティック方程式}),$$

$$y' = a(x)y \quad (\textbf{1 階線型同次方程式}) \tag{D.1}$$

などを扱った。最後の方程式を非同次に変えた

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (\textbf{1 階線型非同次方程式}) \tag{D.2}$$

は変数分離形ではないが、**定数変化法**で解ける。

さて、実は、最も簡単な定数係数1階線型常微分方程式 $y' = ay$ の一般化がこの講義の背後にひそむ遠大な (？) ストーリーである。ここまでで、「変数係数」にした $y' = a(x)y$ や、それを非同次にした $y' = a(x)y + b(x)$ が出現したが、次は2階の方程式に一般化する。

注意 D.1 (線型とは？) $L[y] = y' - a(x)y$ とおくと、

$$L[y+z] = L[y] + L[z], \quad L[ky] = kL[y]$$

が成り立つ。つまり L は**線型作用素**であるが、この理由で (D.2), (D.1) は線型方程式と呼ばれている (次の (D.3), (D.4) も同様の理由[27]で線型方程式と呼ばれる)。大ざっぱに言って、未知関数 y についての 1 次方程式が線型方程式ということである。線型方程式については、**重ね合せの原理**が成立し、それが解法の大枠を支配する。 ■

(定数係数のまま) 2 階にした

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{D.3}$$

や、それを非同次にした

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{D.4}$$

を考える (大学 1 年次の物理学に現れる、単振動の方程式、減衰振動の方程式、強制振動の方程式などがこの範疇に入る)。

同次方程式 (D.3) は特性根の方法で解ける。つまり特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 根を α, β とすれば

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ (A, B は任意定数) が一般解

(ii) $\alpha = \beta$ のとき $y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x}$ (A, B は任意定数) が一般解

ただし虚根の場合、(i) のままでは使いづらい。$\alpha, \beta = a \pm ib$ ($a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$) として

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$$

という形の一般解が便利である。

非同次方程式 (D.4) については、何らかの方法で特解 u を一つ見つければ、

$$y = u + z \quad (z \text{ は対応する同次方程式 } L[z] = 0 \text{ の一般解})$$

が一般解になる (これも重ね合せの原理)。特解の見つけ方には次のように色々な方法がある。

(a) 擬多項式に対する未定係数決定方法

(b) 定数変化法

(c) 演算子法

(d) Laplace 変換の利用

(e) 微分作用素の因数分解を利用して一階ずつ基本解との畳み込みを用いて解く方法

[27] $L[y] = y'' + py' + qy$ とおくと $L[y+z] = L[y] + L[z]$, $L[ky] = kL[y]$ が成り立つ。

来年に向けて

最初に

$$y'' = -g \quad (\text{落体の法則})$$

を持ってくるのはこのまま。次に

$$y' = ay \quad (\text{放射性元素の崩壊}),$$

$$y'' = -\omega^2 y \quad (\text{単振動の方程式})$$

を求積法で解いてみせよう。

やはり柱は線型方程式だが、そういう概念は最後に説明することにする。

まずは変数分離形。ここでの例はやはりロジスティック方程式。

1 階線型方程式。同次は変数分離形で、非同次は定数変化法で。

定数係数 2 階線型方程式。重ね合せの原理も最後にまとめることに。ただし $L[y]$ という記号はそっと導入して、線形性という前に $L[y+z] = L[y] + L[z]$ など見せておく。

もちろん同次方程式は特性根の方法を説明する。

非同次方程式はどうするのだろう…ラプラス変換の復活はむつかしそうだが、一般の場合に使える解法がなくなるのは問題だから、因数分解法を説明する。

ここまででかなりの時間を使ってしまい、残り 2 or 3 コマである。

最後は応用編にするか？単振動とか減衰振動とか強制振動とか。

ベクトル値関数の微分方程式は説明すべきかもしれない。それで解の一意性の証明をして、2 階線型方程式の解空間が 2 次元になることを証明してしまえば、理論的にはすっきりする。適切性の概念をぶつこともできそう。解はあるが、解けない方程式とか。

入らなかったもの。ラプラス変換、畳み込み。

『常微分方程式メモ』http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/members/ODE.pdf も整理して、出来たところからこちらに移したい。

E　定数係数 2 階線型非同次方程式の特解の発見法

E.1　定数変化法

1 階線型非同次方程式のところで紹介した定数変化法 (の変種) で特解を求めることもできる。この方法はさらに大きく二つに分類できる。

(a) 連立 1 階方程式

$$\frac{d\vec y}{dx} = A\vec y + \vec F(x)$$

に直して、公式[28]

$$\vec y = e^{xA}\vec y_0 + e^{xA}\int_{x_0}^{x} e^{-tA}\vec F(t)\,dt$$

を用いる。

この公式は定数変化法で簡単に導出できて「暗記要らず」であり、また理論的な考察には非常に便利だが、具体的な問題を解く場合には、計算は大げさと言うか非常に煩雑になりやすい。

[28]既に見た定数係数 1 階線型非同次方程式の解の公式 (本文中にある) の一般化である。

(b) 直接 2 階方程式のままで扱う方法
同次方程式の解の基本系 y_1, y_2 を求めておいて、

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

とおいてみる。まず

$$y' = [c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2] + [c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'] .$$

このまま y'' を計算するとき、第 1 項の微分が煩雑になるので、

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \tag{E.1}$$

という条件を仮定してしまう (c_1, c_2 に条件として課す)。すると、

$$\begin{aligned} y' &= c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2', \\ y'' &= [c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'] + [c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2''] \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} L[y] = y'' + py' + qy &= c_1(x)L[y_1] + c_2(x)L[y_2] + [c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'] \\ &= c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'. \end{aligned}$$

ゆえに $L[y] = f(x)$ を満たすには、

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \tag{E.2}$$

でなければならない。

(E.1), (E.2) を連立方程式として解いて $c_1'(x), c_2'(x)$ を求め、積分して $c_1(x), c_2(x)$ を求め、特解 $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ を得る。

例 E.1 (2 階方程式に対する定数変化法の例) $L[y] = y'' - 6y' + 8y = e^x$. まず同次方程式 $L[z] = 0$ の一般解は $z = Ae^{2x} + Be^{4x}$. そこで特解を

$$y = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{4x}$$

とおいてみる。

$$y' = \left(c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{4x}\right) + \left(c_1(x)2e^{2x} + c_2(x)4e^{4x}\right)$$

であるが

$$c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{4x} = 0 \tag{E.3}$$

を仮定すると

$$y' = 2c_1(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{4x}.$$

これから

$$y'' = \left(2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}\right) + \left(4c_1(x)e^{2x} + 16c_2(x)e^{4x}\right).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} L[y] = &\left(2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}\right) + \left(4c_1(x)e^{2x} + 16c_2(x)e^{4x}\right) - 6\left(2c_1(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{4x}\right) \\ &+ \left(c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{4x}\right) \\ = &\ 2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}. \end{aligned}$$

これが e^x に等しければよいので、

$$2c_1'(x)e^{2x}+4c_2'(x)e^{4x}=e^x. \tag{E.4}$$

(E.3), (E.4) をまとめて、

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ 2e^{2x} & 4e^{4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}.$$

これを c_1', c_2' について解く。

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ 2e^{2x} & 4e^{4x} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}e^{-x} \\ \dfrac{1}{2}e^{-3x} \end{pmatrix}.$$

これを満たす c_1, c_2 としては、例えば

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}e^{-x} \\ -\dfrac{1}{6}e^{-3x} \end{pmatrix}$$

とすれば良い。つまり特解として

$$u=c_1(x)e^{2x}+c_2(x)e^{4x}=\frac{1}{2}e^{-x}e^{2x}-\frac{1}{6}e^{-3x}e^{4x}=\frac{1}{3}e^x$$

が得られる。これから $L[y]=e^x$ の一般解は

$$y=Ae^{2x}+Be^{4x}+\frac{1}{3}e^x.\blacksquare$$

この方法も理論的な問題にはしばしば効力を発揮するが、実際の問題を解くには計算が面倒になりがちである。

E.2 演算子法

演算子法にも色々あるが、Oliver Heaviside[29] (1850–1925, London に生まれ、英国の Devon に没する) が電気回路の問題に現れる常微分方程式 (不連続な非同次項を持つ) を解くために導入し、組織的に使ってみせたものが、一番強力で、また広く普及している。微分演算子 p とその逆演算子 p^{-1}

$$pf(x)=\frac{d}{dx}f(x),\quad p^{-1}f(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

を導入することで、微分方程式を代数方程式に変換し、特解を機械的に容易に求めることが出来る。

残念ながら珍しくない話で、数学的正当化をしなかった (できなかった) ために発表当時の大多数の数学者達には受け入れてもらえなかった。

その後 Thomas John l'Anson Bromwich (1875–1929, 英国の Wolverhampton に生まれ、Northampton にて没する) が Laplace 変換を用いて初めて厳密な正当化に成功した。

演算子法の数学的正当化として、主なものは次の二つがある。

[29] 業績としては、Maxwell の理論の整理なども重要である (有名な Maxwell の方程式も、あれだけ簡単になったのは Heaviside の貢献が大きいという— `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Heaviside.html` などを見よ)。ベクトル解析の開発も彼によるところが大きいとか。

1. Laplace 変換を用いるもの
   多くの本に載っている。

2. ミクシンスキー (Jan Mikusiński) による方法
   日本の数学界では、故吉田耕作先生がファンで、有名な著作 “Functional Analysis” でも紹介してあるが、このテーマだけで一冊の書物『演算子法 一つの超函数論』[9] を著している。ミクシンスキー自身による教科書 [7], [8] も有名であるが最近は入手しづらい。

演算子法の正当化 — Laplace 変換を使うかどうか

次は松浦重武氏による吉田 [9] の書評中の文章である ([10] に収録されている)。

> そこで、演算子法の数学的正当性を証明するための努力が払われた。そのために最初に案出されたのは、**ラプラス変換**を用いる方法である。これが、ながい間大学の電気工学科において、ラプラス変換が重要科目となった理由である (いまでも、その伝統は残っているようである)。しかし、ラプラス変換による正当化は、演算子法の適用範囲を狭くするし、学習者に複素関数論の高度な知識を要求することになって、重荷となり、ヘビサイド算法の自由闊達さを抹殺することになった。

一方、木村 [11] には次のようにある。

> … Laplace 変換は線形微分方程式と複素関数論を結びつける。Laplace 変換は線形微分方程式を代数的に解く簡単な手法 (演算子法) を与えてくれるだけでなく、それが表現する動的な現象や動的なシステムの構造や性質を、複素関数の解析的、代数的性質として表現することによって動的なシステムに対する深い洞察を与えてくれる。

対照的な意見ではある。

演算子法の評価は正直言って私には良く分からない。頻繁に解く必要があるのならば[30]、マスターする価値があるのだろうか…

E.3 Laplace 変換の利用

本質的には演算子法と同じと言えるのかもしれないが、演算子法と違って間違えやすいところがなく、学生に不安なく勧められる方法である。現在の日本の数学科のカリキュラムではあまり人気がないが、Fourier 変換を用いて偏微分方程式を解く方法に通じるところがあるので、数学科の学生も覚えておいて損になることはないと思う。

Laplace 変換をマスターするには少し手間がかかるが、覚えてしまえば簡単だし、応用が効くので勉強の価値はありそう。

この文書の付録に簡単にまとめる予定である。

E.4 畳み込みを用いる方法

微分作用素 L の因数分解を用いて一階ずつ基本解との畳み込みで解いていく方法がある。

一般 (n 階) の場合に使える方法であるが、以下 2 階の場合に限って、素朴に説明してみよう。

$$y'' + py' + qy = 0$$

[30] 何でも高専ではミクシンスキーの有名な本を教科書にして授業が行われることもあるのだとかいう話だが…

は
$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 y+p\left(\frac{d}{dx}\right)y+qy=0$$
と書ける。$D=\dfrac{d}{dx}$ とおくと、
$$D^2y+pDy+qy=0$$
と書いても良いだろう。すると、これを
$$(D^2+pD+q)y=0$$
と書いてみたくなる。そこでその記法を約束しよう。

約束

任意の多項式 $F(\lambda)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}a_j\lambda^j$ に対して
$$F(D)y:=\sum_{j=0}^{n}a_j\frac{d^jy}{dx^j}$$
と定義する。

これで D^2+pD+q という式にイノチが引き込まれた。こういう式の和・積は自然に定義できるが、すると
$$\begin{cases}(F(D)+G(D))y=F(D)y+G(D)y,\\ (F(D)\cdot G(D))y=F(D)(G(D)y)\end{cases}$$
が成立する。特に
$$\lambda^2+p\lambda+q=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$$
ならば
$$L[y]=(D^2+pD+q)y=((D-\alpha)(D-\beta))y=(D-\alpha)((D-\beta)y)$$
が成り立つことに注意しよう。

さて $L[y]=f$ とする。
$$(D-\alpha)(D-\beta)y=f$$
であるから、$v:=(D-\beta)y$ とおくと、
$$(D-\alpha)v=f.$$
この微分方程式に初期条件 $v(x_0)=C$ を課した初期値問題の解は

(E.5) $$v(x)=Ce^{\alpha(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{\alpha(x-t)}f(t)\,dt\quad(C\text{ は任意定数})$$

である[31]。さて、ひとたび v が既知となれば、
$$(D-\beta)y=v$$
を解いて y が求まる:

(E.6) $$y(x)=C'e^{\beta(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{\beta(x-t)}v(t)\,dt.$$

[31] ここで x_0 は自分の都合のよいように決めれば良い定数である。例えば微分方程式を考えている区間が 0 を含むのならば $x_0=0$ として良い。

(E.5) を

$$v(t) = Ce^{\alpha(t-x_0)} + \int_{x_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\, ds$$

と書き換えて、(E.6) に代入すると

$$y(x) = C' e^{\beta(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)} \left(Ce^{\alpha(t-x_0)} + \int_{x_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\, ds \right) dt.$$

これを計算しても良いが、我々の当面の目的は特解を求めることだったから、$C = C' = 0$ とおいて

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)} \left(\int_{x_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\, ds \right) dt.$$

もし $x_0 = 0$ の場合には、右辺は畳み込みを用いて

$$e^{\beta x} * e^{\alpha x} * f$$

と書ける。$G(x) = e^{\beta x} * e^{\alpha x}$ とおくと、$y = G * f(x)$ と書くこともできる。(**注意:** ここでは定積分の下端 x_0 を 0 としたが、$x_0 \neq 0$ とした場合は、畳み込みの結合則は成立しなくなるので、このようにして G を計算することはできない。事前に変数変換して初期時刻を 0 にしておくこと。)

なお、$C = v(x_0) = y'(x_0) - \beta y(x_0)$, $C' = y(x_0)$ であるから、条件 $C = C' = 0$ は $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ ということである。

まとめておく。

定理 E.2 α, β が特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の根で、f が区間 I 上の連続関数、x_0 は I に含まれる任意の点とするとき、

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)} \left(\int_{x_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\, ds \right) dt \tag{E.7}$$

は

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

の特解となる (初期条件 $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ を満たす)。

$x_0 = 0$ の場合には、

$$u = e^{\alpha x} * e^{\beta x} * f(x)$$

であるので、

$$G(x) := e^{\alpha x} * e^{\beta x}$$

とおくと、

$$u(x) = G * f(x) := \int_0^x G(x-y) f(y)\, dy$$

と書けることが分かる。

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき、

$$G(x) = \int_0^x e^{\alpha(x-y)} e^{\beta y}\, dy = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}.$$

(ii) $\alpha = \beta$ のとき、

$$G(x) = \int_0^x e^{\alpha(x-y)} e^{\alpha y}\, dy = x e^{\alpha x}.$$

定理 E.3 (区間が 0 を含む場合の簡単な特解の公式) α, β が特性方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ の根で、f が 0 を含む区間 I 上の連続関数とするとき、

$$u(x) := \int_0^x G(x-y)f(y)\,dy, \quad G(x) := \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\alpha-\beta} & (\alpha\neq\beta) \\ xe^{\alpha x} & (\alpha=\beta) \end{cases} \tag{E.8}$$

は

$$u''+pu'+qu=f(x), \quad u(0)=u'(0)=0$$

を満たす。

関数 G のことを Green 関数と呼ぶ。ここではボトムアップに Green 関数を導出したが、天下り (?) に Green 関数を発見する方法もある。付録 G.5.1 を見よ。

畳み込み法 (定理 E.2) を Mathematica で実行 定理 E.2 を利用して特解を求める方法 (仮に畳み込み法と呼んでおく) は、二重積分の計算が必要だが、Mathematica のような数式処理系が利用できる場合は特に有効である[32]。以下の例は I.3 の問題の特解を Mathematica で計算した結果である。

```
special[a_,b_,f_]:=
 Expand[Integrate[Exp[a(x-t)]Integrate[Exp[b(t-s)]f,{s,0,t}],{t,0,x}]]
```

という関数定義をしておく。

(1) `special[4,2,Exp[s]]`

とすると

$$y=\int_0^x e^{4(x-t)}\left(\int_0^t e^{2(t-s)}e^s\,ds\right)dt = -\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{4x}+\frac{1}{3}e^x.$$

(2) `special[2,1,Sin[s]]`

とすると

$$y=\int_0^x e^{2(x-t)}\left(\int_0^t e^{(t-s)}\sin s\,ds\right)dt = -\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{5}e^{2x}+\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x.$$

(3) `special[-a,a,Exp[a s]]`

とすると

$$y=\int_0^x e^{-a(x-t)}\left(\int_0^t e^{a(t-s)}se^{as}\,ds\right)dt = -\frac{1}{8a^3}e^{-ax}+\frac{1}{8a^3}e^{ax}-\frac{1}{4a^2}xe^{ax}+\frac{1}{4a}x^2e^{ax}.$$

(4) `special[-1,-1,Exp[-s]]`

$$y=\int_0^x e^{-(x-t)}\left(\int_0^t e^{-(t-s)}e^{-s}\,ds\right)dt = \frac{1}{2}x^2e^{-x}.$$

[32] 簡単な問題を未定係数法で解くのと比べたりすると、手で積分計算をするのは結構面倒であり、あまり推奨できないのかもしれないが、数式処理系が気軽に使える時代ではむしろこちらの方が便利であると思う。試験に出題することを考えると採用は難しいのだろうか…考え方がゆがんでいるかな。

(5) `special[-1,-1,s^2]`

$$y=\int_0^x e^{-(x-t)}\left(\int_0^t e^{-(t-s)}s^2\,ds\right)dt=-6e^{-x}-2xe^{-x}+x^2-4x+6.$$

(6) `special[3,3,(s+Exp[s])]`

$$y=\int_0^x e^{3(x-t)}\left(\int_0^t e^{3(t-s)}(s+e^s)\,ds\right)dt=-\frac{35}{108}e^{3x}+\frac{11}{18}xe^{3x}+\frac{1}{9}x+\frac{2}{27}.$$

(7) `special[3,3,Cos[s]]`

$$y=\int_0^x e^{3(x-t)}\left(\int_0^t e^{3(t-s)}\cos s\,ds\right)dt=-\frac{2}{25}e^{3x}+\frac{3}{10}xe^{3x}+\frac{2}{25}\cos x-\frac{3}{50}\sin x.$$

(8) `special[2,0,1+s]`

$$y=\int_0^x e^{2(x-t)}\left(\int_0^t e^{0(t-s)}(1+s)\,ds\right)dt=\frac{3}{8}e^{2x}-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x.\blacksquare$$

以上述べた方法は一般の階数にも自然に拡張できる。結果だけ書いておこう。

特解を求める公式 (一般の階数)

$$f*g(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$

で f と g の畳み込み $f*g$ を定義する。

$$L[y]=p(D)\,y,\quad D=\frac{d}{dx},\quad p(x)=\prod_{j=1}^{\ell}(x-\beta_j)^{r_j}$$

とするとき、

$$\begin{aligned}G_j(x)&:=\frac{1}{(r_j-1)!}x^{r_j-1}e^{\beta_j x}\quad(j=1,2,\cdots,\ell),\\ G&:=G_1*G_2*\cdots*G_\ell,\\ u&:=G*f\end{aligned}$$

とおくと、u は $L[u]=f(x)$ を満たす。

E.5 Green 関数を用いる方法の n 階方程式への拡張

n 階の微分方程式

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

でも同様にして特解を求めることができる。実際、特性根を $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ として、

$$G(x)=e^{\alpha_1 x}*e^{\alpha_2 x}*\cdots*e^{\alpha_n x},$$

$$u(x)=G*f(x)$$

とおくと、u は

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}u' + a_n u = f(x), \quad u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

をみたす。Green 関数 G の計算には Laplace 変換が役立つ。

$$\mathcal{L}[G](s) = \mathcal{L}[e^{\alpha_1 x} * \cdots * e^{\alpha_n x}](s) = \mathcal{L}[e^{\alpha_1 x}](s) \cdots \mathcal{L}[e^{\alpha_n x}](s) = \frac{1}{s-\alpha_1} \cdots \frac{1}{s-\alpha_n}.$$

もしも特性根が相異なるならば、この右辺は

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{s-\alpha_j}, \quad A_j = \prod_{j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j)$$

と部分分数分解できるので、容易に Laplace 逆変換ができて

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{\alpha_j x}$$

となる。なお、G は次の条件で特徴づけられる:

$$\begin{aligned} G^{(n)} + a_1 G^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}G' + a_n G = 0, \\ G(0) = G'(0) = \cdots = G^{(n-2)}(0) = 0, \quad G^{(n-1)}(0) = 1. \end{aligned}$$

問　上の余談の状況で、$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha$ の場合は、$G(x) = \dfrac{x^{n-1}e^{\alpha x}}{(n-1)!}$ であることを示せ。

問　二階方程式の場合の Green 関数

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta \text{ の場合}) \\ x e^{\alpha x} & (\alpha = \beta \text{ の場合}) \end{cases}$$

が

$$G'' + pG' + qG = 0, \quad G(0) = 0, \quad G'(0) = 1$$

を満たすことを確かめよ。

F　Laplace 変換

おしゃべり

Laplace 変換は、既に L. Euler (1707–1783) が微分方程式を解くために使っていたが、もちろん名前を冠される P. S. de Laplace (1749–1827) も (Euler とは独立に) 微分方程式や差分方程式を解くために使っていたということである。しかし、何といっても 20 世紀に入って Heaviside の演算子法の正当化のために使われたのが大きいということである (岩波数学辞典などに書いてあった話)。もっとも Heaviside 自身も Laplace 変換を使っていたそうだし、本当のところは良く分からない (原典を見たら「ありゃりゃ」となりそうな予感がする)。

Laplace 変換について、手元の数学書にはあまり載っていない。理論的な面は岩波数学辞典にそれなりに整理されてまとまっているが。応用面で詳しいのは、やはり森口・宇田川・一松 [12] のような公式集か、あるいは堤 [13], マイベルク・ファヘンアウア [14] のような「応用数学」系の本で

ある。応用数学系でも矢野 [15] には Laplace 変換はなく、素朴な演算子法が載っているだけである (これはこれで参考になる)。

超関数の Laplace 変換について一度勉強しておこうと思う (けれど、ずっと放置しそうな予感がする)。

ともあれ、ここでは Laplace 変換の勉強に深入りする気は毛頭なくて、定数係数線型常微分方程式に役立つ範囲でつまみ食いする (と決めておかないと深入りしそうだから)。

F.1 定義と基本的な公式

定義 F.1 (Laplace 変換) $f \in C([0,\infty);\mathbf{C})$ に対して、

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

で関数 F が定まるとき、それを f の **Laplace 変換** と呼び、$\mathcal{L}f(s)$, あるいは $\mathcal{L}[f(t)](s)$ などの記号で表す:

$$\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) := \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx. \tag{F.1}$$

広義積分なので、f が連続であっても積分が存在するとは限らない。しかし、$\operatorname{Re} s > 0$ に対して $x \mapsto e^{-sx}$ は $x \to \infty$ のとき急激に減衰する関数なので (特に $\operatorname{Re} s$ が大きくなるほどそれが顕著なので)、応用上現れる多くの関数 f に対して ($\operatorname{Re} s$ がある程度大きいところで) 積分は絶対収束する。

余談 F.1 (積分の存在を保証する条件について) 細かい話になるが、一応書いておく。例えば、ある $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$(\exists M \in \mathbf{R})(\forall x \in [0,\infty)) \quad |f(x)| \le M e^{\alpha x} \tag{F.2}$$

が成り立つならば、$\operatorname{Re} s > \alpha$ を満たす任意の $s \in \mathbf{C}$ に対して

$$\left|e^{-sx} f(x)\right| = e^{-x \operatorname{Re} s} |f(x)| \le e^{-x \operatorname{Re} s} \cdot M e^{\alpha x} = M e^{(\alpha - \operatorname{Re} s)x} \quad (x \in [0,\infty)),$$

$$\int_0^\infty M e^{(\alpha - \operatorname{Re} s)x}\,dx < +\infty$$

であるから、積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x) e^{-sx}\,dx$ は絶対収束する。ゆえに f の Laplace 変換は $\operatorname{Re} s > \alpha$ において定義できる。■

命題 F.2 (線形性)

$$\mathcal{L}[f+g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s).$$

証明 積分の線形性による。■

命題 F.3 (擬多項式の Laplace 変換) 指数関数 $\times$ 多項式の Laplace 変換は公式

$$\mathcal{L}\left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{ax}\right](s) = \frac{1}{(s-a)^{\alpha}}.$$

から計算できる。その特別な場合として、以下の (1)–(5) がある。

(1) (指数関数の Laplace 変換)

$$\mathcal{L}\left[e^{ax}\right](s) = \frac{1}{s-a} \quad (s > \operatorname{Re} a),$$

(2) (1 の Laplace 変換)

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

(3) (単項式 x^k の Laplace 変換)

$$\mathcal{L}\left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right](s) = \frac{1}{s^n},$$

(4) (三角関数の Laplace 変換)

$$\mathcal{L}\left[\cos\omega x\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}\left[\sin\omega x\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

(5) (双曲線関数の Laplace 変換)

$$\mathcal{L}\left[\cosh\omega x\right](s) = \frac{s}{s^2-\omega^2}, \quad \mathcal{L}\left[\sinh\omega x\right](s) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}.$$

証明

$$\mathcal{L}\left[e^{ax}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](s) = \int_0^x e^{-sx}e^{ax}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^{(a-s)x}x^{\alpha-1}\,dx.$$

$(s-a)x = y$ とおくと $dx = \dfrac{dy}{s-a}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{ax}\frac{x^{\alpha}-1}{\Gamma(\alpha)}\right](s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{y}{s-a}\right)^{\alpha-1}\frac{dy}{s-a} = \frac{1}{(s-a)^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-1}\,dy \\ &= \frac{1}{(s-a)^\alpha\Gamma(\alpha)}\cdot\Gamma(\alpha) = \frac{1}{(s-a)^\alpha}.\end{aligned}$$

(1) もちろん上で $\alpha = 1$ とすればよい。(同じことだが) 直接やるのもほとんど高校数学で簡単である。

$$\mathcal{L}\left[e^{ax}\right](s) = \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}\,dx = \int_0^\infty e^{(a-s)x}\,dx = \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)x}\right]_0^\infty = \frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}.$$

(2) これも直接証明は簡単である。

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dx = \frac{1}{-s}\left[e^{-sx}\right]_0^\infty = \frac{1}{-s}(0-1) = \frac{1}{s}.$$

(3) もちろん、上の公式で $a=0,\ \alpha=n$ とすれば良いが、自然数だから帰納法も簡単である。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[x^{k+1}\right](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}x^{k+1}\,dx = \left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\cdot x^{k+1}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}\right)e^{-sx}\cdot(k+1)x^k\,dx \\ &= \frac{k+1}{s}\mathcal{L}[x^k](s)\end{aligned}$$

という漸化式を用いればよい。あるいは $sx=y$ と変数変換して[33]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[x^n\right](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}x^n\,dx = \int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{y}{s}\right)^n\cdot\frac{dy}{s} \\ &= \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-y}y^{(n+1)-1}\,dy = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

(4) 高校数学流に

$$\mathcal{L}[\cos\omega x](s) = \int_0^\infty e^{-sx}\cos\omega x\,dx$$

を部分積分を 2 回行って計算したり、結果を予想して

$$\begin{aligned}\left(e^{-sx}\cos\omega x\right)' &= -se^{-sx}\cos\omega x + (-\omega)e^{-sx}\sin\omega x, \\ \left(e^{-sx}\sin\omega x\right)' &= -se^{-sx}\sin\omega x + \omega e^{-sx}\cos\omega x\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}\left(se^{-sx}\cos\omega x - \omega e^{-sx}\sin\omega x\right)' &= -(s^2+\omega^2)e^{-sx}\cos\omega x, \\ \left(\omega e^{-sx}\cos\omega x + se^{-sx}\sin\omega x\right)' &= -(\omega^2+s^2)e^{-sx}\sin\omega x\end{aligned}$$

を導いて解いてもよい。しかし Euler の公式を用いて、指数関数の Laplace 変換に帰着するのがもっとも簡単であろう。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos\omega x](s) &= \mathcal{L}\left[(e^{i\omega x}+e^{-i\omega x})/2\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^{i\omega x}\right](s) + \mathcal{L}\left[e^{-i\omega x}\right](s)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega}+\frac{1}{s+i\omega}\right) \\ &= \frac{s}{s^2+\omega^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin\omega x](s) &= \mathcal{L}\left[(e^{i\omega x}-e^{-i\omega x})/(2i)\right] = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}\left[e^{i\omega x}\right](s) - \mathcal{L}\left[e^{-i\omega x}\right](s)\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega}-\frac{1}{s+i\omega}\right) \\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

(なお $\cos\omega x = \operatorname{Re} e^{i\omega x}$ は ω が実数のときしか有効でない。実数として計算して解析接続するという手もあるが。)

(5)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cosh\omega x](s) &= \mathcal{L}\left[(e^{\omega x}+e^{-\omega x})/2\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^{\omega x}\right](s) + \mathcal{L}\left[e^{-\omega x}\right](s)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}+\frac{1}{s+\omega}\right) \\ &= \frac{s}{s^2-\omega^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sinh\omega x](s) &= \mathcal{L}\left[(e^{\omega x}-e^{-\omega x})/2\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^{\omega x}\right](s) - \mathcal{L}\left[e^{-\omega x}\right](s)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}-\frac{1}{s+\omega}\right) \\ &= \frac{\omega}{s^2-\omega^2}.\blacksquare\end{aligned}$$

[33] 漸化式がらみは、Γ 関数に任せているわけだ。

これらの結果がすべて有理関数(しかも分母の次数の方が分子の次数よりも大きい)なので、Laplace 変換が 1 となることがあるか、という疑問を持つかもしれない。そこで参考までに次の事実を紹介しておく。

命題 F.4 (δ 関数の Laplace 変換) δ を Dirac のデルタ超関数とすると

$$\mathcal{L}\delta(s) = 1.$$

証明 デルタ超関数について少しでも知識があれば、形式的には簡単。超関数の Laplace 変換をどう定義するかが問題となる。それはさぼらせてもらう。 ■

命題 F.5 (Laplace 変換と微分 (1) 導関数の Laplace 変換)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) &= s^n\mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(n-1-j)}(0)\\ &= s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-1)}(0) - f^{n-1}(0).\end{aligned}$$

証明 帰納法による。$n=1$ のとき

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}f'(x)\,dx = \left[e^{-sx}f(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)e^{-sx}f(x)\,dx\\ &= 0 + s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx = s\mathcal{L}[f](s).\end{aligned}$$

n のとき成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f^{(n+1)}\right](s) &= \mathcal{L}\left[\left(f^{(n)}\right)'\right](s)\\ &= s\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) - f^{(n)}(0) = s\left(s^n\mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(n-1-j)}(0)\right) - f^{(n)}(0)\\ &= s^{n+1}\mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{n} s^j f^{(n+1-1-j)}(0).\end{aligned}$$

これは $n+1$ のときも成り立つことを示している。 ■

命題 F.6 (Laplace 変換と積分)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s).$$

証明

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[F](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}F(x)\,dx = \left[\frac{1}{-s}e^{-sx}\cdot F(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{-s}e^{-sx}F'(x)\,dx\\ &= \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s). \blacksquare\end{aligned}$$

命題 F.7 (Laplace 変換と微分 (2) Laplace 変換の導関数)

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}\left[-xf(x)\right](s).$$

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^n \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}\left[(-x)^n f(x)\right](s).$$

証明　積分記号下の微分によって

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-sx}(-x)f(x)\,dx = \mathcal{L}\left[(-x)f(x)\right](s).\blacksquare$$

定義 F.8 (関数の畳み込み) $f, g\colon [0,\infty) \to \mathbf{C}$ に対して

$$h(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\;dy \quad (x \in [0,\infty))$$

で定まる $h\colon [0,\infty) \to \mathbf{C}$ を f と g の畳み込みと呼び、$f * g$ と表す:

$$f * g(x) := \int_0^x f(x-y)g(y)\;dy \quad (x \in [0,\infty)).$$

命題 F.9 (畳み込みの Laplace 変換)

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s).$$

証明

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^x f(x-y)g(y)\,dy\right)dx \\
&= \int_0^\infty dy \int_y^\infty e^{-sx} f(x-y)g(y)\,dx \\
&= \int_0^\infty e^{-sy} g(y)\,dy \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \\
&= \mathcal{L}[g](s)\mathcal{L}[f](s).\blacksquare
\end{aligned}$$

命題 F.10

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{x}f(x)\right](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](t)dt.$$

命題 F.11

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha x} f(x)\right](s) = \mathcal{L}[f](s-\alpha).$$

証明

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha x} f(x)\right](s) = \int_0^\infty e^{-sx}e^{\alpha x} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)x} f(x)\,dx = \mathcal{L}[f](s-\alpha).\blacksquare$$

例えば

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right](s-\alpha) = \frac{1}{(s-\alpha)^n}.$$

命題 F.12 (周期関数の Laplace 変換) f が周期 T の周期関数ならば

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-sy} f(y)\,dy.$$

証明

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx} f(x)\,dx.$$

$x = nT + y$ $(0 \le y \le T)$ とおくと $dx = dy$, $e^{-sx} = e^{-s(nT+y)} = e^{-nsT}e^{-sy}$, $f(x) = f(y)$ であるから、

$$\mathcal{L}[f](s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^T e^{-nsT} e^{-sy} f(y)\,dy = \sum_{n=0}^\infty (e^{-sT})^n \int_0^T e^{-sy} f(y)\,dy = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-sy} f(y)\,dy. \blacksquare$$

F.2 計算例

例 F.13 微分方程式の初期値問題

$$y'' - 5y' + 6y = x + \sin x + e^{3x}$$

を解け。両辺の Laplace 変換を取ると

$$\left(s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)\right) - (s\mathcal{L}[f](s) - f(0)) + 6\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-3}.$$

整理して

$$(s^2 - 5s + 6)\mathcal{L}[f](s) = f'(0) + f(0)(s-5) + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-3}.$$

$\mathcal{L}[f](s)$ について解くと

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) &= f'(0)\frac{1}{s^2-5s+6} + f(0)\frac{s-5}{s^2-5s+6} \\
&\quad + \frac{1}{s^2(s-2)(s-3)} + \frac{1}{(s^2+1)(s-2)(s-3)} + \frac{1}{(s-2)(s-3)^2} \\
&= f'(0)\left(\frac{-1}{s-2} + \frac{1}{s-3}\right) + f(0)\left(\frac{3}{s-2} + \frac{-2}{s-3}\right) \\
&\quad + \left(\frac{5}{36}\frac{1}{s} + \frac{1}{6}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{9}\frac{1}{s-3}\right) + \left(\frac{1}{10}\frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{5}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{10}\frac{1}{s-3}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}\right) \\
&= f'(0)\left(\frac{-1}{s-2} + \frac{1}{s-3}\right) + f(0)\left(\frac{3}{s-2} + \frac{-2}{s-3}\right) \\
&\quad + \frac{5}{36}\frac{1}{s} + \frac{1}{6}\frac{1}{s^2} + \frac{11}{20}\frac{1}{s-2} - \frac{71}{90}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1}{10}\frac{s+1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

ゆえに逆 Laplace 変換して

$$\begin{aligned}
f(x) &= f'(0)\left(e^{3x} - e^{2x}\right) + f(0)\left(3e^{2x} - 2e^{3x}\right) \\
&\quad + \frac{5}{36} + \frac{1}{6}x + \frac{11}{20}e^{2x} - \frac{71}{90}e^{3x} + xe^{3x} + \frac{1}{10}(\cos x + \sin x). \blacksquare
\end{aligned}$$

余談 F.2 (Mathematica で楽をしよう) 数式処理系 Mathematica で部分分数への分解を行うには `Apart[]` を用いる。

```
solution=Solve[(s^2-5s+6)y==1/s^2+1/(s^2+1)+1/(s-3),y]
Ly= y /. solution[[1,1]]
Ly=Apart[Ly]
```

Mathematica で逆 Laplace 変換を行うには、`InverseLaplaceTransform[]` を用いる。

```
InverseLaplaceTransform[Ly,s,x]
```

この結果は

$$\frac{5}{36}+\frac{11}{20}e^{2x}-\frac{71}{90}e^{3x}+\frac{x}{6}+xe^{3x}+\frac{1}{10}(\cos x+\sin x)$$

となる (もちろん一致する)。■

例 F.14 $\omega\in\mathbf{R}$ とするとき、

$$\mathcal{L}\left[e^{i\omega x}\right](s)=\frac{1}{s-i\omega}=\frac{s+i\omega}{(s-i\omega)(s+i\omega)}=\frac{s}{s^2+\omega^2}+i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

の実部虚部を取って、

$$\mathcal{L}[\cos\omega x](s)=\frac{s}{s^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}[\sin\omega x](s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.\blacksquare$$

例 F.15

$$\mathcal{L}[f''](s)=s^2\mathcal{L}[f](s)-sf(0)-f'(0)$$

に $f(x)=\sin\omega x$ を代入して

$$-\omega^2\mathcal{L}[\sin\omega x](s)=s^2\mathcal{L}[\sin\omega x](s)-s\cdot 0-\omega\cdot 1.$$

ゆえに

$$(s^2+\omega^2)\mathcal{L}[\sin\omega x](s)=\omega.$$

これから

$$\mathcal{L}[\sin\omega x](s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.\blacksquare$$

例 F.16

$$\mathcal{L}[f](s)=\frac{1}{s^2+2s}$$

となる f を求めよ。普通は

$$\frac{1}{s^2+2s}=\frac{1}{s(s+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)$$

より

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2x}\right).$$

あるいは

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](x)=e^{-2x},\quad \mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right](s)=\frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$$

より

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s}\right](x)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+2}\right](x)=\int_0^x e^{-2t}\,dt=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2x}\right).\blacksquare$$

例 F.17 各自然数 n に対して

$$\mathcal{L}[f_n](s) = \frac{1}{s^n}$$

を満たす f_n を求めよ。

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right](x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^{n-2}}\right](x) = \int_0^x \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{x^{n-1}}\right](t)\,dt = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt.$$

$f_1(x) \equiv 1$ より容易に $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. ■

例 F.18

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

となる f を求めよ。

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{-2s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2} &= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right) = -\frac{1}{2\omega}\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2\omega}\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[\cos\omega x\right](s) \\
&= -\frac{1}{2\omega}\mathcal{L}\left[-x\cos\omega x\right](s) = \mathcal{L}\left[\frac{x\cos\omega x}{2\omega}\right](s).
\end{aligned}$$

ゆえに

$$f(x) = \frac{x\cos\omega x}{2\omega}.■$$

例 F.19

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega x}{x}\right](s) &= \int_s^\infty \mathcal{L}\left[\sin\omega x\right](t)\,dt = \int_s^\infty \frac{\omega}{t^2+\omega^2}\,dt \\
&= \int_{\mathrm{Arctan}(s/\omega)}^{\pi/2} \frac{\omega}{\omega^2(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{\omega^2+\omega^2\tan^2\theta}{\omega}\,d\theta = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{s}{\omega}\right).
\end{aligned}$$

例 F.20

$$\mathcal{L}[f](s) = \log\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)$$

となる f を求めよ。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[-xf(x)\right](s) &= \frac{d}{ds}\log\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right) = \frac{-2\omega^2 s^{-3}}{1+\omega^2/s^2} = \frac{-2\omega^2}{s(s^2+\omega^2)} \\
&= \frac{1}{s}\cdot(-2\omega)\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[-2\omega\sin\omega x\right](s) \\
&= \mathcal{L}\left[\int_0^x -2\omega\sin\omega t\,dt\right](s) = \mathcal{L}\left[2\left[\cos\omega t\right]_0^x\right](s) = \mathcal{L}\left[2(\cos\omega x - 1)\right].
\end{aligned}$$

ゆえに

$$-xf(x) = 2(\cos\omega x - 1).$$

これから

$$f(x) = \frac{2(1-\cos\omega x)}{x}.■$$

命題 F.21 H を Heaviside の階段関数、すなわち

$$H(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

とするとき、

$$\mathcal{L}\left[H(x-a)f(x-a)\right]=e^{-as}\mathcal{L}[f](s).$$

証明

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[H(x-a)f(x-a)\right]&=\int_0^\infty e^{-sx}H(x-a)f(x-a)\,dx=\int_a^\infty e^{-sx}f(x-a)\,dx\\&=\int_0^\infty e^{-as-sy}f(y)\,dy=e^{-as}\int_0^\infty e^{-st}f(y)\,dy=e^{-as}\mathcal{L}[f](s).\blacksquare\end{aligned}$$

例 F.22

$$\mathcal{L}[f](s)=\frac{e^{-as}}{s^2}$$

をみたす f を求めよ。

F.3 存在条件

ある $s_0\in\mathbf{C}$ に対して積分

$$\int_0^\infty e^{-s_0x}f(x)\,dx$$

が普通の Lebesgue 積分の意味で存在すれば、

$$\operatorname{Re}s\geq\operatorname{Re}s_0$$

を満たすすべての s について

$$\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$$

は存在する (ベキ級数の収束と同じだね)。

少なくとも一つは積分が存在するような s_0 が存在するとき、積分が収束するような $\operatorname{Re}s_0$ の inf を σ とすれば ($\sigma=-\infty$ もありうる)、

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}s>\sigma&\quad\Longrightarrow\quad\text{積分は存在する},\\\operatorname{Re}s<\sigma&\quad\Longrightarrow\quad\text{積分は存在しない}.\end{aligned}$$

σ のことを収束 (横) 座標 (abscissa of convergence) と呼ぶ。

Laplace 変換が定義できるための簡単な十分条件として

$$(\exists M\in\mathbf{R})(\exists\alpha\in\mathbf{R})(\forall x\in\mathbf{R})\quad |f(x)|\leq Me^{\alpha x}$$

がある[34]。このとき $s>\alpha$ で Laplace 変換が定義できる。

[34] やはり Laplace 変換を勉強しておいた方が、半群理論を勉強するときに少し役に立ったのではないかな。ちょっとため息。

F.4 Fourier 変換との関係, 逆 Laplace 変換

f の Fourier 変換を

$$\mathcal{F}[f](y)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\cdot y}f(x)\,dx,$$

g の逆 Fourier 変換を

$$\mathcal{F}^*[g](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\cdot y}g(y)\,dy$$

で定める。

Laplace 変換

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)\,dx\quad(\operatorname{Re}s>a),$$

との間には

$$\mathcal{F}[f](y)=\mathcal{L}[f](iy)$$

という関係がある。$y=-i\xi$ とおくと、$iy=\xi$ となるので

$$\mathcal{L}[f](\xi)=\mathcal{F}[f](-i\xi).$$

Laplace 変換は Fourier 変換の虚軸上での値である、とみなせる。

Fourier の反転公式から

$$\begin{aligned}f(x)=\mathcal{F}^*\left[\mathcal{F}f\right](x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\cdot y}\mathcal{F}[f](y)\,dy\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{xz}\mathcal{L}[f](z)\,dz\end{aligned}$$

ただし C は $z=a^*+it$ $(-\infty<t<\infty)$.

次の命題は [1] に載っていたものである。(ただし、証明は省略されている。それに「部分分数分解してから命題 F.3 を適用する、で済んでしまうように思われる。)

命題 F.23 (逆 Laplace 変換の計算用の公式) (1) $P(x)$ が $n-1$ 次以下の多項式、$a_1,\cdots,a_n$ がすべて相異なる複素数とするとき、

(F.3)
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{(s-a_1)\cdots(s-a_n)}\right](x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{P(a_j)e^{a_jx}}{\prod_{k\neq j}(a_j-a_k)}.$$

(2) $P(x)$ が $n-1$ 次以下の多項式、$a\in\mathbf{C}$ とするとき、

(F.4)
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{(s-a)^n}\right](x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{(n-k)}(a)x^{k-1}e^{ax}}{(n-k)!(k-1)!}.$$

証明 というわけで、お手製の証明。

(1) (後の公式 (F.8) を利用するのも見通しが良いか、ここは初等的に証明してみる。) 部分分数分解ができる。すなわち、ある $A_1,\cdots,A_n$ が存在して

(F.5)
$$\frac{P(s)}{(s-a_1)\cdots(s-a_n)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{s-a_j}$$

が成り立つ。分母を払って

$$P(s) = \sum_{j=1}^{n} A_j \prod_{\substack{1\le m\le n\\ m\ne j}} (s-a_m).$$

$s=a_k$ を代入して ($j\ne k$ に対して $\displaystyle\prod_{\substack{1\le m\le n\\ m\ne j}} (s-a_m)=0$ となることに注意して)

$$P(a_k) = \sum_{j=1}^{n} A_j \prod_{\substack{1\le m\le n\\ m\ne j}} (a_k-a_m) = A_k \prod_{\substack{1\le m\le n\\ m\ne k}} (a_k-a_m).$$

ゆえに

$$A_k = \frac{P(a_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le m\le n\\ m\ne k}} (a_k-a_m)}.$$

k を j で置き換えた式を (F.5) に代入して

$$\frac{P(s)}{(s-a_1)\cdots(s-a_n)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le m\le n\\ m\ne j}} (a_j-a_m)} \frac{1}{s-a_j}.$$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a_j}\right](x) = e^{a_j x}$ であるから、(F.3) を得る。

(2) 公式 (F.8) を適用した後、Leibniz の公式を利用して計算する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{(s-a)^n}\right](x) &= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{xs}P(s)}{(s-a)^n}; a\right) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{s\to a}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n-1}\left[(s-a)^n\cdot\frac{e^{xs}P(s)}{(s-a)^n}\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{s\to a}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n-1}\left[(s-a)^n\cdot\frac{e^{xs}P(s)}{(s-a)^n}\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\left(e^{sx}\right)^{(r)} P^{(n-1-r)}(s)\Big|_{s=a} \\
&= \sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{r!(n-1-r)!} x^r e^{ax} P^{(n-1-r)}(a).
\end{aligned}$$

$r+1$ を k とおくと、(F.4) を得る。■

F.5 Laplace 変換の逆変換の積分の留数計算

(しばらく工事中となる予定)

F を関数 $f\colon [0,\infty)\to\mathbf{C}$ の Laplace 変換とする。

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt. \tag{F.6}$$

$s=x+iy$, $x,y\in\mathbf{R}$ として、$g(t) := e^{-xt}f(t)\chi_{[0,\infty)}(t)$ とおくと (χ は集合の定義関数のつもり)

$$F(s) = F(x+iy) = \int_0^\infty e^{-tx} f(t) e^{-iyt} dt = \int_{-\infty}^\infty g(t) e^{-iyt} dt.$$

これは、y の関数として見た $F(x+iy)$ が g の Fourier 変換であることを示している。f は指数オーダー α, f' は区分的に連続と仮定すると、積分は $x=\operatorname{Re}s>\alpha$ で絶対収束する。すなわち g は絶対可積分である。Fourier の反転公式より

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyt}F(x+iy)dy.$$

(x は定数扱いしていることに注意) $ds=i\,dy$ より

$$f(t)=g(t)e^{xt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(x+iy)t}F(x+iy)dy=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{ts}F(s)\,ds.$$

すなわち

$$f(t)=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{x-iy}^{x+iy}e^{ts}F(s)ds. \tag{F.7}$$

これが有名な Laplace 変換の反転公式である。

F について、適当な仮定をおくと、この積分は留数定理を用いて計算できる:

$$f(t)=\sum_c \operatorname{Res}\left(e^{ts}F(s);c\right).\quad \text{すなわち}\quad \mathcal{L}^{-1}F(t)=\sum_c \operatorname{Res}\left(e^{ts}F(s);c\right). \tag{F.8}$$

たとえば

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}\right](s)=\frac{1}{(s-a)^n} \tag{F.9}$$

という公式について、右辺の逆変換を求めてみよう。右辺は s の関数として、$s=a$ を唯一の極に持ち、その位数は n であるから

$$\sum_c \operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{(s-a)^n};c\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{(s-a)^n};a\right)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{s\to a}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n-1}\left[(s-a)^n\frac{e^{ts}}{(s-a)^n}\right]=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}.$$

余談 F.3 逆変換の公式 (F.7) は、学生の時に読んでいたテキストに一応載っていたけれど、「何か使うのは難しそう」という印象を受けて敬遠していたものである (具体例の計算が皆無だった)。重要な公式 (F.9) の逆向きの導出が、関数論の留数計算で瞬殺と知ったときの私の驚きは…ご想像にお任せします。■

他の公式も同様に計算できる。蛇足気味だが一応書いておく。

まず

$$\mathcal{L}[e^{at}](s)=\frac{1}{s-a},\quad \mathcal{L}[1](s)=\frac{1}{s},\quad \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right](s)=\frac{1}{s^n}$$

については

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{s-a};a\right)=e^{ts}\Big|_{s=a}=e^{at},\quad \operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{s};0\right)=e^{ts}\Big|_{s=0}=e^{0\cdot t}=1,$$
$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{s^n};0\right)=\frac{1}{(n-1)!}\left.\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}e^{ts}\right|_{s=0}=\frac{1}{(n-1)!}\,t^{n-1}e^{ts}\Big|_{s=0}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

次に

$$\mathcal{L}\left[\cosh\omega x\right](s)=\frac{s}{s^2-\omega^2},\quad \mathcal{L}\left[\sinh\omega x\right](s)=\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$$

については

$$\frac{s}{s^2-\omega^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}+\frac{1}{s+\omega}\right),\quad \frac{\omega}{s^2-\omega^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}-\frac{1}{s+\omega}\right)$$

から

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{ts}}{s-\omega};\omega\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{ts}}{s+\omega};-\omega\right)&=\frac{1}{2}\left(e^{t\omega}+e^{-\omega t}\right)=\cosh\omega t,\\
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{ts}}{s-\omega};\omega\right)-\operatorname{Res}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{ts}}{s+\omega};-\omega\right)&=\frac{1}{2}\left(e^{t\omega}-e^{-\omega t}\right)=\sinh\omega t.
\end{aligned}$$

まったく同様に

$$\mathcal{L}\left[\cos\omega x\right](s)=\frac{s}{s^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}\left[\sin\omega x\right](s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

については

$$\frac{s}{s^2+\omega^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega}+\frac{1}{s+i\omega}\right),\quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega}-\frac{1}{s+i\omega}\right)$$

から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{s-i\omega};i\omega\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{s+i\omega};-i\omega\right)\right)&=\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)=\cos\omega t,\\
\frac{1}{2i}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{s-i\omega};i\omega\right)-\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{s+i\omega};-i\omega\right)\right)&=\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)=\sin\omega t.
\end{aligned}$$

F.6 超関数の Laplace 変換

忘れないために見出しだけでも。

何を参考にするのが良いか。Schwartz [16] には一応書いてあるが。

Yosida [3] から二つの命題を。要するに L^2 のクラスで考えると、片側 Laplace 変換はまっとうな正則関数で、逆変換できる、ということらしい。

命題 F.24 $f\in L^2(0,\infty)$ とするとき、片側 Laplace 変換

$$g(z):=\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt$$

は Hardy-Lebesgue クラス $H^2(0)$ に属する。すなわち

(i) g は右半平面 $\{z\in\mathbf{C};\operatorname{Re}z>0\}$ で正則な関数である。

(ii) $\forall x>0$ に対して $y\mapsto g(x+iy)$ は $L^2(\mathbf{R})$ に属し、

$$\sup_{x>0}\int_{\mathbf{R}}|g(x+iy)|^2\,dy<\infty.$$

命題 F.25 (Paley-Wiener) $g \in H^2(0)$ とするとき、次の意味で g の境界値 $y \mapsto g(iy) \in L^2(\mathbf{R})$ が定まる:

$$\lim_{x \downarrow 0} \int_{\mathbf{R}} |g(x+iy) - g(iy)|^2 \, dy = 0 \quad (\text{要するに } L^2 \text{ での極限}).$$

また

$$f(t) := \frac{1}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} g(iy) e^{ity} \, dy$$

で定まる f は $(-\infty, 0)$ で 0 であり、f の片側 Laplace 変換は g に等しい。

ここで Payley-Wiener の名前が出て来るのは、なるほどと思う。Yosida [3] にはこれ以外ほとんど Laplace 変換の話は出て来なくて、Schwartz の論文 [17] を見よ、となっている。有名な Schwartz [18] にも Laplace 変換の章があるが、その脚注には、[17] のコンパクトなバージョンであるという断り書きがある。[16] はどうなのだろう？ふと折原 ([19] の第 I 部第 4 章) も思い出した。まあ、またいつか暇があって、興味が湧いたときに、だろうか。

F.7 作用素半群

(すでにかなり脱線してきているが、昔から納得行かなかったところなので…)

Banach 空間 X 上の C_0 半群 $\{U(t)\}_{t\ge 0}$ があるとき、その生成作用素とは

$$Ax = \lim_{h\to +0} \frac{1}{h}(U(h) - I)x$$

で定められる X 上の線型作用素 A のことである。A の定義域 $D(A)$ は X の稠密な線型部分空間で、A は閉作用素である。また評価

$$\exists M \in \mathbf{R} \quad \exists \beta > 0 \quad (\forall \lambda \in \mathbf{C}; \operatorname{Re}\lambda > \beta) \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \|(\lambda - A)^{-n}\| \le M(\operatorname{Re}\lambda - \beta)^{-n}$$

が成り立つ。半群 $\{U(t)\}$ の Laplace 変換は生成作用素 A のレゾルベントになる:

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-st} U(t)x \, dt \quad (x \in X, \operatorname{Re}\lambda > \beta).$$

これは

$$\frac{1}{s-a} = \mathcal{L}\left[e^{at}\right](s)$$

という公式の拡張、というわけである。

また反転公式

$$U(t)x = \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda \quad (c > \beta, t > 0, x \in D(A))$$

が成り立つ ($\{U(t)\}$ が解析的半群であれば、すべての $x \in X$ と、$t \ge 0$ について成り立つ)。

もし $A \in L(X)$ (X 上の有界線型作用素) ならば、

$$U(t) = e^{tA} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \quad (\text{ノルム収束})$$

である。また一般に

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n} A\right)^{-n} x,$$

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty} e^{-tA_n} x, \quad A_n = A\left(1 + \frac{1}{n} A\right)^{-1} \quad (\text{吉田近似}).$$

F.8　公式

$f(x)$	$\mathcal{L}[f](s)$	収束範囲
1	$\dfrac{1}{s}$	$s>0$
x^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$e^{\alpha x}$	$\dfrac{1}{s-\alpha}$	$s>\operatorname{Re}\alpha$
$\cos\omega x$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
$\sin\omega x$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
$\cosh\omega x$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$s>\lvert\omega\rvert$
$\sinh\omega x$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$s>\lvert\omega\rvert$

$\varphi(s):=\mathcal{L}[f](s)$ とおくとき

元の関数	Laplace 変換
$f(x)$	$\varphi(s)$
$x^n f(x)$	$(-1)^n\varphi(s)$
$\dfrac{1}{x}f(x)$	$\int_s^\infty \varphi(t)\,dt$
$e^{ax}f(x)$	$\varphi(s-a)$
$f'(x)$	$s\varphi(s)-f(0)$
$\int_0^x f(t)\,dt$	$\dfrac{1}{s}\varphi(s)$
$f(x-a)H(x-a)$	$e^{-as}\varphi(s)$
$f(ax)\ (a>0)$	$\dfrac{1}{a}\varphi\left(\dfrac{s}{a}\right)$

G　定数係数線型常微分方程式

(この節は自分の頭の整理のために書いたものである。非数学系学生、特に初学者が読んで分かりやすいとは思えない。)

定数 a_j $(j=1,2,\cdots,n)$ とある区間 I 上連続な関数 $f\colon I\to\mathbf{C}$ が与えられたとき、未知関数 $y=y(x)$ についての方程式

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

を定数係数線型常微分方程式という。

$p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, $D=\dfrac{d}{dx}$ とおくと、

$$p(D)y=f(x)$$

と書ける。この時点では形式的な書き方だが、以下で記号をきちんと定義する。

G.1 作用素代数

独り言

自分が学生だった頃、演習書などで演算子法 (色々な流儀があるようだ) を勉強して、何となく霞がかかったような感じがした。一応計算は進められるのだが、足元がおぼつかない感じがしたのである。今から考えると、この § に記すようなことを明示されなかったためと思う。一方、そのときにここに書いてあることを読んだとしてもチンプンカンプンだったかもしれない。

講義では時間も少ないし、多項式 $f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ に対して、

$$f(D)y := \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}$$

と天下りに定義して、

$$(f(D)+g(D))y = f(D)y + g(D)y, \quad (f(D)g(D))\,y = f(D)\,(g(D)y)$$

が成り立つ、くらいで誤魔化すのかなあ。あ、多項式の和 $(f+g)(x)$ と積 $(f\cdot g)(x)$ を定義しておいて、

$$(☆) \qquad f(D)+g(D) := (f+g)(D), \quad f(D)\cdot g(D) := (f\cdot g)(D)$$

と言っておかないと嘘になるかな？でも (☆) を見せると、かえって混乱する学生がいるような気もする。やはり気持ちが悪いなあ。■

X, Y を $\mathbf{C}$ 上の線型空間とするとき、$T\colon X\to Y$ が線型写像であるとは

$$\begin{cases} T(x+y) = T(x)+T(y) & (x,\, y\in X), \\ T(\lambda x) = \lambda T(x) & (\lambda\in\mathbf{C},\, x\in X) \end{cases}$$

が成り立つことをいう。T のことを線型作用素ということもある。その場合は x の像を $T(x)$ ではなく Tx と書くことが多い (行列 × ベクトルの真似)。

$$L(X,Y) := \{T; T\colon X\to Y \quad \text{線型作用素}\}.$$

集合 $L(X,Y)$ は、その上で次のように和、スカラー積が定義できて、$\mathbf{C}$ 上の線型空間になる。

$$\begin{cases} (T+S)x := Tx+Sx & (T,\, S\in L(X,Y),\, x\in X), \\ (\lambda T)x := \lambda(Tx) & (T\in L(X,Y),\, \lambda\in\mathbf{C},\, x\in X), \end{cases}$$

$L(X,Y)$ の零元は

$$T_0 x = 0 \quad (x\in X)$$

で定まる $T_0\colon X\to Y$ のことであるが、以下この T_0 のことを単に 0 と書く。

特に $X=Y$ のとき、$L(X,Y)$ を単に $L(X)$ と書く。

$L(X)$ には次のように積が定義できる: T, $S\in L(X)$ に対して、$ST\in L(X)$ を

$$(ST)x := S(Tx) \quad (x\in X)$$

で定める。

これは写像の言葉で言えば、合成写像 $S\circ T$ ということである。従って、よく知られているように結合法則 $(RS)T=R(ST)$ が成り立つ。

$L(X)$ は $\mathbf{C}$ 上の多元環 (algebra) である。

単位元はいわゆる恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \ni x \mapsto x \in X$ であるが、I と書いたり、このすぐ後に導入する記法を用いて単に 1 と書くことが多い。

$\lambda \in \mathbf{C}$ に対して、

$$T_\lambda x := \lambda x \quad (x \in X)$$

とおくと、$T_\lambda \in L(X)$ であるが、T_λ を単に λ と書く。(要するに $\mathbf{C}$ を $L(X)$ に埋め込むということである。)

1 は X 上の恒等写像 id_X を表すので、$L(X)$ の単位元である。

$T \in L(X)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して、T の n 乗 T^n を

$$T^n := \begin{cases} \underbrace{TT\cdots T}_{n\ \text{個}} & (n \geq 1) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

で定義する。

容易に指数法則

$$T^{n+m} = T^n T^m, \quad (T^n)^m = T^{nm} \quad (n, m \geq 0)$$

が成り立つことが分かる。特に任意の T の冪は交換可能である:

$$T^n T^m = T^m T^n.$$

T が全単射であるとき、写像としての逆写像が存在するが、それを T^{-1} と書く。そして負の整数 n に対して

$$T^n := \left(T^{-1}\right)^{-n} \quad (n \in \mathbf{Z},\, n < 0)$$

で T^n を定義する。こうしてすべての整数 n に対して T^n が定義でき、指数法則も

$$T^{n+m} = T^n T^m, \quad (T^n)^m = T^{nm} \quad (n, m \in \mathbf{Z})$$

と拡張される。

$T \in \mathcal{L}(X)$, $f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbf{C}[x]$ に対して

$$f(T) = \sum_{j=0}^{n} a_j T^j$$

で $f(T) \in \mathcal{L}(X)$ が定義される。もちろん

$$f(T)y = \sum_{j=0}^{n} a_j (T^j y).$$

一般化

これまで、線型作用素の定義域を X 全体であるとしたが、応用上は X のある線型部分空間とする方が望ましい。例えば微分作用素は、その階数を n とするとき、C^n 級関数全体の集合を定義域とするのが自然である。一つの定義域ですませる場合は C^∞ 級関数全体の集合を定義域とせざるを得ないが、不自然であり、応用上重要な問題を適用範囲外としてしまう。そこで、ここでは定義域が X のある線型部分空間とする一般化について言及する。

X 上の線型作用素の定義を、X のある線型部分空間 $\mathcal{D}(T)$ から X への線型写像 $T\colon \mathcal{D}(T) \to X$ と改めて、その全体を $\mathcal{L}(X)$ と書く ($\mathcal{L}(X)$ の元 T に対して T の定義域をつねに $\mathcal{D}(T)$ と表すことにする)。そして作用素の和 $T+S$, スカラー積 λT, 積 ST を

$$\begin{cases} (T+S)(x) = Tx + Sx & (x \in \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S)) \\ (\lambda T)(x) = \lambda(Tx) & (x \in \mathcal{D}(T)) \\ (ST)(x) = S(Tx) & (x \in \{y \in \mathcal{D}(T); Ty \in \mathcal{D}(S)\}) \end{cases}$$

で定める。

$T \in \mathcal{L}(X)$ に対して

$$R(T) := \{Tx; x \in \mathcal{D}(T)\}$$

を T の値域と呼ぶ。

$T \in \mathcal{L}(X)$ が写像として単射であるとき、逆写像

$$S\colon R(T) \ni y \mapsto x \in X \quad (\text{ただし } Tx = y \text{ となるような } x)$$

を T^{-1} と書き、T の逆作用素と呼ぶ。

G.2 微分演算子 D

この節を通じて、I を $\mathbf{R}$ の区間として、$X = C^\infty(I;\mathbf{C})$ とおく。

定義 G.1 (微分演算子 D) $D \in \mathcal{L}(X)$ を

$$Dy = y' \quad (y \text{ の導関数})$$

で定める。

(C^∞ 級でなく、なるべく一般にやるためには、$X^m := C^m(I;\mathbf{C})$, $X := X^0$ として、D の定義域 $\mathcal{D}(D)$ は X^1 とすることになる。)

定義 G.2 (掛け算作用素) $f \in X$ に対して、$T_f y := fy$ (掛け算) として定まる $T_f \in \mathcal{L}(X)$ のことを単に f と書く。

次の命題は簡単であるが重要である。特性多項式を考える理由の一つの説明になるだろう (特性根 α に対して $e^{\alpha x}$ は微分方程式の解になることがはっきり見える)。

命題 G.3 $f(x) \in \mathbf{C}[x]$, $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して

$$f(D)e^{\alpha x} = f(\alpha)e^{\alpha x}.$$

証明 $D^k e^{\alpha x} = \alpha^k e^{\alpha x}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ に注意すればよい。■

次の命題 (の特に (1)) が後の議論で大活躍する。

命題 G.4 (微分演算子のキー・レンマ) $u \in X$, α, $\beta \in \mathbf{C}$ に対して次の (0), (1), (2) が成り立つ。

(0) $D(e^{\alpha x}u) = e^{\alpha x}(D+\alpha)u.$

(1) $\forall m \in \mathbf{N}$ に対して
$$e^{-\alpha x}(D-\alpha)^m\left(e^{\alpha x}u\right) = D^m u.$$

(2) $\forall m \in \mathbf{N}$ に対して
$$e^{-\alpha x}(D-\beta)^m\left(e^{\alpha x}u\right) = (D+\alpha-\beta)^m u.$$

証明

(0) 積の微分法により
$$D(e^{\alpha x}u) = \alpha e^{\alpha x}\cdot u + e^{\alpha x}\cdot Du = e^{\alpha x}(D+\alpha)u.$$

(1) (0) より
$$e^{-\alpha x}D\left(e^{\alpha x}u\right) = (D+\alpha)u.$$
両辺から $e^{-\alpha x}\alpha e^{\alpha x}u = \alpha u$ を引いて
$$e^{-\alpha x}(D-\alpha)e^{\alpha x}u = Du.$$
両辺を m 乗して
$$\left[e^{-\alpha x}(D-\alpha)e^{\alpha x}\right]^m u = D^m u.$$
左辺は $e^{-\alpha x}(D-\alpha)^m e^{\alpha x}u$ に等しい (Cf. $(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^m P$)。

(2) まず $m=1$ の場合
$$\begin{aligned}e^{-\alpha x}(D-\beta)(e^{\alpha x}u) &= e^{-\alpha x}\left[(D-\alpha+(\alpha-\beta))\right]e^{\alpha x}u = e^{-\alpha x}(D-\alpha)e^{\alpha x}u + (\alpha-\beta)u\\ &= Du + (\alpha-\beta) = \left[D+(\alpha-\beta)\right]u.\end{aligned}$$
(Cf. $P^{-1}(\lambda I - A)P = \lambda I - P^{-1}AP$.) この後は (1) の後半と同様、両辺を m 乗して整理すればよい。■

G.3 準備

G.3.1 畳み込み

定義 G.5 (畳み込み) $f, g \in C([0,\infty); \mathbf{C})$ に対して、f と g の**畳み込み** (**合成積**, **convolution**) と呼ばれる関数 $f*g$ を以下のように定める。
$$f*g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\,dy \quad (x \in [0,\infty)).$$
(ある種の積と考え、関数の和よりも優先順位が高いと考える。例えば $f+g*h = f+(g*h)$ とみなす。)

命題 G.6 (畳み込みの性質) (準備中)

(1) (結合律) $f*(g*h)=(f*g)*h$.

(2) (可換性) $f*g=g*f$.

(3) (線形性) $f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2$, $f*(cg)=c(f*g)$.

(4) (分配則) $(f+g)*h=f*h+g*h$.

(5) (零因子の非存在[a]) $f*g=0$ ならば $f=0$ または $g=0$. (ここで 0 は定数関数 0 を表す。)

[a] E. C. Titchmarsh の Injectivity 定理 (1926)

証明 (5) は吉田 [3] などを見よ (色々な証明へのポインターがある。例えば Titchmarsh [20] など。それ以外に Doss [21] という論文も出版されている。)。(5) 以外の証明は簡単である。■

微分方程式の初期値問題を考える場合には、0 における微分係数が問題になることが多い。明らかに任意の f, g について $f*g(0)=0$ であるが、畳み込みの回数が 1 つ増えるごとに 1 つ深い階数までの微係数が 0 になる。これを示そう。

さて、一般に

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,t)\,dt=f(x,x)+\int_a^x\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

が成り立つ。これを畳み込みに応用すると次の補題を得る。

補題 G.7 (畳み込みの導関数) $f\in C^r(I;\mathbf{C})$, $g\in C^{r-1}(I;\mathbf{C})$ とするとき $f*g\in C^r(I;\mathbf{C})$ であり、

$$(f*g)^{(r)}(x)=\sum_{j=0}^{r-1}f^{(j)}(0)g^{(r-1-j)}(x)+\int_0^x f^{(r)}(x-y)g(y)\,dy.$$

証明

$$\begin{aligned}
(f*g)'(x)&=f(0)g(x)+\int_0^x f'(x-y)g(y)\,dy,\\
(f*g)''(x)&=f(0)g'(x)+f'(0)g(x)+\int_0^x f''(x-y)g(y)\,dy,\\
(f*g)^{(3)}(x)&=f(0)g''(x)+f'(0)g'(x)+f''(0)g(x)+\int_0^x f^{(3)}(x-y)g(y)\,dy,
\end{aligned}$$

以下同様。■

系 G.8 $f\in C^k([0,\infty);\mathbf{C})$, $g\in C^{k-1}([0,\infty);\mathbf{C})$,

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(k-1)}(0)=0$$

ならば

$$(f*g)^{(r)}(0)=0\quad(R=0,1,\cdots,k).$$

証明 補題の等式に $x=0$ を代入すると、右辺の各項が 0 になる。■

命題 G.9 $g_1, g_2, \cdots, g_m \in C([0,\infty);\mathbf{C})$ とするとき、

$$f = g_1 * g_2 * \cdots * g_m$$

とおくと

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-2)}(0) = 0.$$

証明 m に関する帰納法。$m=2$ のとき、畳み込みの定義から $g_1 * g_2(0) = 0$. $m-1$ まで成り立つとする。$f = g_1 * \cdots * g_m$ に対して、$h = g_1 * \cdots * g_{m-1}$ とおくと、$f = h * g_m$. 帰納法の仮定から $h(0) = h'(0) = \cdots = h^{(m-3)}(0) = 0$. 系 G.8 から、$f(0) = f'(0) = \cdots f^{(m-2)}(0) = 0$. ■

G.3.2 関数 $e_{m,\alpha}$

関数系 $e_m(x) = \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}$ $(m = 1, 2, \cdots)$ は

$$e'_m(x) = e_{m-1}(x) \quad \text{ゆえに} \quad e_m^{(\ell)} = e_{m-\ell}$$

という微分に関して簡単な性質を持つ。これを一般化しよう。

定義 G.10 **($e_{m,\alpha}$ の定義)** $\alpha \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{Z}$ に対して

$$e_{m,\alpha}(x) := \begin{cases} \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{\alpha x} & (m \geq 1) \\ 0 & (m \leq 0) \end{cases} \tag{G.1}$$

で関数 $e_{m,\alpha}$ を定義する。

$e_{m,0}(x) = x^{m-1}/(m-1)!$, $e_{1,\alpha}(x) = e^{\alpha x}$ などに注意しよう。

命題 G.11 **($e_{m,\alpha}$ と $(D-\alpha)$ との関係)** $\alpha \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{N}$ に対して

$$(D-\alpha)^\ell e_{m,\alpha}(x) = e_{m-\ell,\alpha}(x) \quad (\ell \in \mathbf{N}).$$

証明 積の微分法より

$$e'_{m,\alpha}(x) = \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}e^{\alpha x} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \alpha e^{\alpha x} = e_{m-1,\alpha}(x) + \alpha e_{m,\alpha}(x).$$

ゆえに $(D-\alpha)e_{m,\alpha}(x) = e_{m-1,\alpha}(x)$. これから明らか。■

系 G.12 $P = (e_{1,\alpha}, e_{2,\alpha}, \cdots, e_{m,\alpha})$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$(D-\alpha)P = PJ.$$

命題 G.13 $u(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j e_{j,\alpha}(x)$ とするとき、

$$c_j=(D-\alpha)^{j-1}u(0) \quad (j=1,2,\cdots,m).$$

証明 命題 G.11 より

$$(D-\alpha)^{\ell-1}u(x)=\sum_{j=\ell}^{m} c_j e_{j-\ell+1,\alpha}(x)$$

であるから、

$$e_{k,\alpha}(0)=\begin{cases} 1 & (k=1) \\ 0 & (k\neq 1) \end{cases}$$

に注意して、$x=0$ を代入すればよい。■

G.4 方程式 $(D-\alpha)^m u=f$

次の命題が後で必要になる重要なものである。証明は命題 G.4 によるもので、熟読してマスターする価値がある。

命題 G.14 ($(D-\alpha)^m u=0$ の一般解) $\alpha\in\mathbf{C}$, $m\in\mathbf{N}$, I を $\mathbf{R}$ の区間とするとき、$u\in C^m(I;\mathbf{C})$ について、次の二条件は同値である。

(i) $(D-\alpha)^m u=0.$

(ii) $\exists(c_1,\cdots,c_m)\in\mathbf{C}^m$ s.t. $u(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j x^{j-1}e^{\alpha x}.$

証明 $u=e^{\alpha x}v$ つまり $v:=e^{-\alpha x}u$ とおくと

$$\begin{aligned}
(D-\alpha)^m u=0 &\iff e^{-\alpha x}(D-\alpha)^m u=0 \\
&\iff e^{-\alpha x}(D-\alpha)^m e^{\alpha x}v=0 \\
&\iff D^m v=0 \\
&\iff \exists(c_1,\cdots,c_m)\in\mathbf{C}^m \quad \text{s.t.} \quad v=\sum_{j=1}^{m} c_j x^{j-1} \\
&\iff \exists(c_1,\cdots,c_m)\in\mathbf{C}^m \quad \text{s.t.} \quad u=e^{\alpha x}\sum_{j=1}^{m} c_j x^{j-1}.\blacksquare
\end{aligned}$$

もちろん、条件 (ii) の等式は

$$u(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j e_{j,\alpha}(x)$$

としてもよい。こうしておくと命題 G.13 から係数が

$$c_j=(D-\alpha)^{j-1}u(0)$$

と簡単に表せて便利である。

次に非同次方程式について調べよう。簡単のために問題を考える区間 I が 0 を含む (さらに初期条件を考える場合、初期時刻は 0) とする。

命題 G.15 ($(D-\alpha)^m u = f$ の特解) $\alpha \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{N}$, I は 0 を含む $\mathbf{R}$ の区間とするとき、$f \in C(I;\mathbf{C})$ に対して

$$u(x) := e_{m,\alpha} * f(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} e^{\alpha(x-y)} f(y)\, dy$$

とおくと、

$$(D-\alpha)^m u = f, \quad u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(m-1)}(0) = 0$$

が成り立つ。

証明の前に、どうやってこの式が導かれるか説明しよう (これもきちんと書けば一つの証明になる)。やはり $v = e^{-\alpha x} u$ とおくと、

$$\begin{aligned}(D-\alpha)^m u = f &\iff e^{-\alpha x}(D-\alpha)^m e^{\alpha x} v = e^{-\alpha x} f(x) \\ &\iff D^m v = e^{-\alpha x} f(x),\end{aligned}$$

$$u(0) = u'(0) = \cdots u^{(m-1)}(0) = 0 \quad \iff \quad v(0) = v'(0) = \cdots v^{(m-1)}(0) = 0$$

が成り立つことから、$e^{-\alpha x} f(x)$ を次のように m 回積分すれば v が得られることが分かる。

$$v(x) = \int_0^x \int_0^{x_{m-1}} \cdots \int_0^{x_1} e^{-\alpha y} f(y)\, dy dx_1 \cdots dx_{m-1}.$$

$F(x) = e^{-\alpha x} f(x)$ とおくと、v は m 個の定数関数 1 と F の畳み込みである:

$$v(x) = \underbrace{1 * 1 * \cdots * 1}_{m\text{ 個}} * F(x).$$

ところが簡単な計算で分かるように

$$\underbrace{1 * 1 * \cdots * 1}_{m\text{ 個}}(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

である。ゆえに

$$v(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} * F(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} F(y)\, dy = \int_0^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\alpha y} f(y)\, dy.$$

$u = e^{\alpha x} v$ であるから、

$$u(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} e^{\alpha(x-y)} f(y)\, dy. \blacksquare$$

証明 (準備中) ■

ここまでの結果をまとめると次の定理が得られる。

定理 G.16 ($(D-\alpha)^m u = f$ の一般解) I は 0 を含む区間, $f \in X = C(I;\mathbf{C})$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{N}$ とするとき、u が

$$(D-\alpha)^m u = f \quad (I\text{ 上})$$

を満たすならば

$$u(x) = \sum_{j=1}^m c_j e_{j,\alpha}(x) + e_{m,\alpha} * f(x) = \sum_{j=1}^m c_j \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} e^{\alpha x} + \int_0^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} e^{\alpha(x-y)} f(y)\, dy.$$

ただし

$$c_j = (D-\alpha)^{j-1} u(0) \quad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

G.5 一般の方程式 $p(D)u=f$ の場合

準備が済んだので、一般の多項式 $p(x)\in\mathbf{C}[x]$ に対して

$$p(D)u=f$$

を考える。$p(x)$ の因数分解を

$$p(x)=\prod_{j=1}^{r}(x-\lambda_j)^{m_j}\quad(\lambda_j,\ a\in\mathbf{C};\ j\ne k\Longrightarrow\lambda_j\ne\lambda_k,\ m_j\geq 1)\tag{G.2}$$

とする。

補題 G.17 (e_{k,λ_j} は $p(D)y=0$ の解) $p(x)$ が (G.2) で与えられるとき、

$$e_{k,\lambda_j}(x)=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_j x}\quad(j=1,2,\cdots,r;\ k=1,2,\cdots,m_j)\tag{G.3}$$

はみな $p(D)y=0$ の解である。ゆえに任意の定数 c_{jk} に対して

$$y=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}e_{k,\lambda_j}(x)$$

も $p(D)y=0$ の解である。

証明 任意の $j_0\in\{1,2,\cdots,r\}$ に対して、(定数係数の微分演算子は互いに交換可能なので)

$$p(D)=\left[\prod_{j\ne j_0}(D-\lambda_j)^{m_j}\right](D-\lambda_{j_0})^{m_{j_0}}$$

であり、$e_{k,\lambda_{j_0}}$ $(k=1,2,\cdots,m_{j_0})$ は

$$(D-\lambda_{j_0})^{m_{j_0}}y=0$$

の解であるから、微分方程式 $p(D)y=0$ の解になる。

補題 G.18 (G.3) で与えられる関数系 $\{e_{k,\alpha_j}\}$ は 1 次独立である。

証明 定義から、

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}e_{k,\lambda_j}(x)=0\quad(x\in I)\tag{G.4}$$

を仮定して、$c_{jk}=0$ を示せば良い。

$J\in\{1,2,\cdots,r\}$ を固定して、$c_{Jk}=0$ $(k=1,2,\cdots,m_J)$ を示す。

$$T_\ell:=\left[\prod_{j\ne J}(D-\lambda_j)^{m_j}\right](D-\lambda_J)^{\ell}\quad(\ell=0,1,\cdots,m_J-1)$$

とおく。

$$(D-\lambda_J)^{m_J-1}e_{k,\lambda_J}(x)=e_{k-m_J+1,\lambda_J}(x)=\begin{cases}e_{1,\lambda_J}(x)=e^{\lambda_J x} & (k=m_J)\\ 0 & (k<m_J)\end{cases}$$

に注意して、(G.4) に T_{m_J-1} をかけて、

$$
\begin{aligned}
0 &= T_{m_J-1}\left(\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}e_{k,\lambda_j}(x)\right)\\
&= \left[\prod_{j\neq J}(D-\lambda_j)^{m_j}\right](D-\lambda_J)^{m_J-1}\left(\sum_{j\neq J}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}e_{k,\lambda_j}(x)+\sum_{k=1}^{m_J} c_{Jk}e_{k,\lambda_J}(x)\right)\\
&= 0+\left[\prod_{j\neq J}(D-\lambda_j)^{m_j}\right]c_{J,m_J}e^{\lambda_J x}\\
&= \prod_{j\neq J}(\lambda_J-\lambda_j)^{m_j}c_{J,m_J}e^{\lambda_J x}.
\end{aligned}
$$

ゆえに $c_{J,m_J}=0$. ■

別証明　(G.4) に $\prod_{j\neq J}(D-\lambda_j)^{m_j}$ をかけると、(工事中) ■

以上をまとめると次の定理を得る。

定理 G.19 (同次方程式 $p(D)y=0$ の解空間の構造 (一般解)) $p(x)$ が (G.2) で与えられるとき、微分方程式

$$p(D)y=0,\quad D=\frac{d}{dx}$$

の解全体の集合は $C^\infty(I;\mathbf{C})$ の n 次元線型部分空間をなし、基底として

$$e_{k,\lambda_j}(x)=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_j x}\quad (j=1,2,\cdots,r;\ k=1,2,\cdots,m_j)$$

が取れる。すなわち

$$y=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}e_{k,\lambda_j}(x)\quad (c_{jk}\ \text{は任意定数})$$

が $p(D)y=0$ の一般解である。

では非同次方程式にとりかかろう。

命題 G.20 (非同次方程式 $p(D)y=f$ の特解) $p(x)$ が (G.2) で与えられるとき、0 を含む $\mathbf{R}$ の区間 I で連続な $f\in C(I;\mathbf{C})$ に対して、

$$u(x):=e_{m_r,\lambda_r}*e_{m_{r-1},\lambda_{r-1}}*\cdots*e_{m_2,\lambda_2}*e_{m_1,\lambda_1}*f(x)$$

とおくと、

$$p(D)u=f,\quad u(0)=u'(0)=u''(0)=\cdots=u^{(n-1)}(0)=0$$

が成り立つ。

証明　まず

$$y_1=e_{m_1,\lambda_1}*f$$

とおくと

$$(D-\lambda_1)^{m_1}y_1=f.$$

次に

$$y_2=e_{m_2,\lambda_2}*y_1=e_{m_2,\lambda_2}*e_{m_1,\lambda_1}*f$$

とおくと、

$$(D-\lambda_2)^{m_2}y_2 = y_1,$$

$$(D-\lambda_1)^{m_1}(D-\lambda_2)^{m_2}y_2 = y_1,$$

以下、同様に

$$y_j = e_{m_j,\lambda_j} * y_{j-1} = e_{m_j,\lambda_j} * \cdots e_{m_2,\lambda_2} * e_{m_1,\lambda_1} * f$$

とおくと、

$$(D-\lambda_j)^{m_j}y_{m_j} = y_{m_{j-1}},$$

$$(D-\lambda_1)^{m_1}(D-\lambda_2)^{m_2}\cdots(D-\lambda_j)^{m_j}y_j = f,$$

が成り立つことが分かる。ゆえに

$$y_r = e_{m_r,\lambda_r} * \cdots * e_{m_2,\lambda_2} * e_{m_1,\lambda_1} * f$$

は

$$p(D)y_r = (D-\lambda_1)^{m_1}(D-\lambda_2)^{m_2}\cdots(D-\lambda_r)^{m_r}y_r = f$$

を満たす。■

畳み込みは結合律を満たすので、

$$G(x) := e_{m_r,\lambda_r} * e_{m_{r-1},\lambda_{r-1}} * \cdots e_{m_2,\lambda_2} * e_{m_1,\lambda_1}(x)$$

とおくと、

$$u(x) = G * f(x) = \int_0^x G(x-y)f(y)\,dy$$

となる。この関数 G をこの微分方程式の **Green 関数**と呼ぶ。

簡単な場合に Green 関数を具体的に求めてみよう。

まず $n=2$ の場合で、

$$e^{\alpha x} * e^{\beta x} = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\alpha-\beta} & (\alpha\neq\beta) \\ xe^{\alpha x} & (\alpha=\beta). \end{cases} \tag{G.5}$$

これは簡単なので各自計算してチェックするとよい。$\beta\to\alpha$ のとき $e^{\alpha x} * e^{\beta x} \to e^{\alpha x} * e^{\alpha x}$ となることも分かる。

また

$$\underbrace{e^{\alpha x} * e^{\alpha x} * \cdots * e^{\alpha x}}_{m\text{ 個}} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{\alpha x} = e_{m,\alpha}(x)$$

であることも分かる (一見大変そうだが、計算してみるとあっけないくらいに簡単である)。

つまり G はすべての特性根 λ について $e^{\lambda x}$ の畳み込みを計算したものに他ならないことが分かる。

もう一つ結果が簡単になる場合を示しておこう。α_j $(j=1,2,\cdots,n)$ がすべて相異なるとき、

$$e^{\alpha_1 x} * \cdots * e^{\alpha_n x} = \sum_{j=1}^n \frac{e^{\alpha_j x}}{\displaystyle\prod_{k\neq j}(\alpha_j-\alpha_k)}.$$

上にあげた (G.5) の $\alpha\neq\beta$ の場合はこの特別な場合に相当する。

証明　Laplace 変換を使う。

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha_1 x} * \cdots * e^{\alpha_n x}\right](s) = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{L}\left[e^{\alpha_j x}\right](s) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{s-\alpha_j}.$$

右辺の分数を部分分数に分解する。

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{s-\alpha_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{s-\alpha_j}$$

とおくと

$$1 = \sum_{j=1}^{n} A_j \prod_{k\neq j}(s-\alpha_k)$$

であるから、$s=\alpha_\ell$ を代入して

$$1 = A_\ell \prod_{k\neq\ell}(\alpha_\ell-\alpha_k) \quad \text{ゆえに} \quad A_\ell = \left[\prod_{k\neq\ell}(\alpha_\ell-\alpha_k)\right]^{-1}.$$

逆変換することで

$$e^{\alpha_1 x} * \cdots * e^{\alpha_n x} = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{\alpha_j x}.\blacksquare$$

この計算法 (Laplace 変換で Green 関数が計算できる) を理解すると、一般の場合の Green 関数の計算は本質的には

$$\frac{1}{p(s)} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{j=1}^{r}(s-\alpha_j)^{m_j}}$$

の部分分数分解の計算であることが分かる。それがどうなるかについては研究中 (陽に書いている本がないところを見ると、きっと簡単な表示式はないのだと思う— 部分分数分解をした場合の係数を決定する話というと Heaviside の展開定理くらいしか思い浮かばないが、あれで簡単になるとは思えないなあ)。

以下少し見方を変えて、Green 関数は微分方程式の初期値問題の解として特徴づけられることを説明しよう。これは石村 [22] に載っていた説明を一般化したものである[35]。

[35] 他の本では見たことがない (僕の不勉強？そもそも非同次方程式の特解が基本解系との畳み込みで書けることは高橋 [23] には載っていたが、そこでも Green 関数は出て来ない (なぜかな？)。初期値問題の Green 関数が出ているのは、神保 [24], 石村 [22] だけである。基本解系との畳み込みで書けること自体が、標準的な教科書と思われるポントリャーギンにもコディントン・レヴィンソンにも笠原にもない。そうやって解けること自体は古い演算子法の説明 (例えば矢野 [15]) にもあるのだが。もう一度繰り返すと、明示的な公式 $u = G * f$ を書いてあるのは、探した範囲で [24] と [22] だけであった。)。やっていることが極めて自然で (解は Green 関数で書けるはずで、Green 関数が満たすべき条件を導き、実際に求めてしまう)、好感が持てる (正直感動した)。これが初めて学ぶ学生に分りやすいかどうかは判断が難しいが、将来役に立つ重要な考え方に触れさせるというのは、特に数学科では教育的であるかもしれない。

命題 G.21 (Green 関数の特徴づけ) 与えられた n 階微分作用素 $p(D)$ $(p(x) \in \mathbf{C}[x])$ に対して、初期値問題

$$
\begin{aligned}
&p(D)G(x) = 0, \\
&G(0) = G'(0) = \cdots = G^{(n-2)}(0) = 0, \quad G^{(n-1)}(0) = 1
\end{aligned}
$$

の解を G とすると、任意の $f \in C([0,\infty);\mathbf{C})$ に対して

$$u := G * f$$

は

$$p(D)u = f, \quad u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

を満たす。逆にこの条件を満たす G は上の初期値問題の解である。

証明

$$u(x) = \int_0^x G(x-y)f(y)\,dy$$

とするとき、

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= G(0)f(x) + \int_0^x G'(x-y)f(y)\,dy, \\
u''(x) &= G(0)f'(x) + G'(0)f(x) + \int_0^x G''(x-y)f(y)\,dy, \\
&\vdots \\
u^{(r)}(x) &= \sum_{j=0}^{r-1} G^{(j)}(0)f^{r-1-j}(x) + \int_0^x G^{(r)}(x-y)f(y)\,dy, \\
&\vdots \\
u^{(n-1)}(x) &= G(0)f^{(n-2)}(x) + \cdots + G^{(n-2)}(0)f(x) + \int_0^x G^{(n-1)}(x-y)f(y)\,dy,
\end{aligned}
$$

$$u^{(n)}(x) = G(0)f^{(n-1)}(x) + \cdots + G^{(n-1)}(0)f(x) + \int_0^x G^{(n)}(x-y)f(y)\,dy.$$

これから

$$u'(0) = u''(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G(0) = G'(0) = \cdots = G^{n-2}(0) = 0.$$

そしてこの条件が成り立つとき、

$$p(D)u = G^{(n-1)}(0)f(x) + \int_0^x p(D)G(x-y)f(y)\,dy.$$

ゆえに G が $p(D)G(x) = 0$, $G^{(n-1)}(0) = 1$ を満たすならば $p(D)u = f$. 逆に任意の f に対して、$p(D)u = f$ が成り立つならば $G^{(n-1)}(0) = 1$, $p(D)G(x) = 0$ も分かる。■

この定理は Green 関数の一意性の証明にもなっているわけか。ふと Titchmarsh の injectivity theorem でも一意性の証明になるな、と思いついたが、牛刀だろう。

G.5.1　2 階の場合の特解の求め方の説明

ここの構成は上で紹介した石村 [22] をほぼ踏襲している。

特解を求めるわけであるが、こちらで簡単な初期条件を指定してしまって構わないので、

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

を解くことにする。実は Green 関数と呼ばれる関数 $G = G(x)$ が存在して、この y は

$$y(x) = \int_0^x G(x-y)f(y)\,dy$$

と表される。この事実を **Duhamel**[36] **の原理**が成り立つ、とも言う。

相異なる特性根 α, β を持つとき、

$$G(x) = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} \tag{G.6}$$

である。特に $\alpha, \beta = a \pm ib$ $(a,\ b \in \mathbf{R},\ b \neq 0)$ のときは、

$$G(x) = e^{ax}\frac{\sin bx}{b}$$

である。

また特性根が重根 α であるとき、

$$G(x) = xe^{\alpha x} = xe^{-px/2} \tag{G.7}$$

である。これは

$$\lim_{\beta \to \alpha} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}$$

に等しいことに注意しよう (とてももっともらしい、ということだな)。

命題 G.22 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が相異なる 2 根 α, β を持つとき、

$$u(x) := \int_0^x G(x-y)f(y)\,dy, \quad G(x) := \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}$$

とおくと、u は

$$u'' + pu' + qu = f(x), \quad u(0) = u'(0) = 0$$

を満たす。

証明　まず $u(0) = 0$ は明らか。また $G(0) = 0$ より

$$u'(x) = G(x-x)f(x) + \int_0^x G'(x-y)f(y)\,dy = \int_0^x G'(x-y)f(y)\,dy$$

であるから、$u'(0) = 0$. さらに $G'(0) = 1$ より

$$u''(x) = G'(x-x)f(x) + \int_0^x G''(x-y)f(y)\,dy = f(x) + \int_0^x G''(x-y)f(y)\,dy.$$

[36] J. M. C. Duhamel (1797–1872, フランス) は熱方程式に関する 1834 年の学位論文で、Duhamel の原理の原型を提示したという。

以上の準備のもと、$G''+pG'+qG=0$ に注意すると

$$u''+pu'+q=f(x)+\int_0^x [G''(x-y)+pG'(x-y)+qG(x-y)]\,f(y)\,dy=f(x)$$

が得られる。 ■

命題 G.23 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ が重根 α を持つとき、

$$u(x):=\int_0^x G(x-y)f(y)\,dy,\quad G(x):=xe^{\alpha x}$$

とおくと、u は

$$u''+pu'+qu=f(x),\quad u(0)=u'(0)=0$$

を満たす。

証明 証明は同様であるので省略する ($xe^{\alpha x}$ が微分方程式の解であることに注意せよ)。 ■

以下、G が (G.7), (G.6) で与えられることを導出しよう。

$$u(x)=\int_0^x G(x-y)f(y)\,dy$$

とするとき、G が何であっても $u(0)=0$ が成り立つ。また

$$u'(x)=G(0)f(x)+\int_0^x G'(x-y)f(y)\,dy$$

であるから、

$$u'(0)=G(0)f(0).$$

任意の f に対して $u'(0)=0$ であるためには

$$G(0)=0 \tag{G.8}$$

が必要である。次に

$$u''(x)=G'(0)f(x)+\int_0^x G''(x-y)f(y)\,dy$$

であるので、

$$\begin{aligned}0&=u''(x)+pu'(x)+qu(x)\\&=G'(0)f(x)+\int_0^x [G''(x-y)+pG'(x-y)+qG(x-y)]\,f(y)\,dy.\end{aligned}$$

f によらずに成り立つために、

$$G'(0)=0,\quad G''+pG'+qG=0 \tag{G.9}$$

であることが必要である。(G.8), (G.9) がともに成り立つことから、G が求まる。まず微分方程式の解であることから、適当な定数 C_1, C_2 が存在して、

$$G(x)=\begin{cases} C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x} & (\text{特性方程式が相異なる 2 根 } \alpha,\ \beta \text{ を持つ場合})\\ (C_1+C_2x)e^{\alpha x} & (\text{特性方程式が重根 } \alpha \text{ を持つ場合}).\end{cases}$$

$u(0)=u'(0)=0$ を満たすように C_1, C_2 を定めると (G.6), (G.7) が得られる。 ■

G.6　終りに？

まず、TO DO LIST である。

- 計算の実例を
- なるべく短い説明にまとめてみる

そろそろ終りかと思っていたのだが、笠原 [25] を読んで、また良く分からなくなってきた。そもそもこの手の問題で本当に面倒なものとはどういうやつなのか。またコンピューターが利用できる場合とそうでない場合とで事情が変ったりするのかどうかもよく分からない。

H　定数係数 2 階線型同次方程式の解法 (がらくた箱?)

(5.1)
$$y'' + py' + qy = f(x).$$

(5.2)
$$y'' + py' + qy = 0.$$

H.1　なぜこの節があるか

本文中に示した二つの命題

命題 H.1 (定数係数 2 階線型同次方程式 (1) 相異なる特性根を持つ場合) 特性方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ が相異なる 2 根 α, β をもつとき、

(5.4)
$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

は (5.2) の一般解である。すなわち、

(a) 任意の定数 A, B に対して、(5.4) で定まる y は (5.2) の解である。

(b) (5.2) の任意の解は、適当な定数 A, B を用いて、$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ と一意的に表される。

命題 H.2 (定数係数 2 階線型同次方程式 (2) 特性根が重根の場合) 特性方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ が重根 α をもつとき、

(5.6)
$$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\beta x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

は (5.2) の一般解である。すなわち、

(a) (5.6) で定まる y は (5.2) の解である。

(b) (5.2) の任意の解は、適当な定数 A, B を用いて、$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\beta x}$ と一意的に表される。

の証明はなかなか悩ましい。この命題は通常、解の一意性定理を用いて、2 階線型同次方程式の解空間が 2 次元の線型空間であることを導くことで証明される。それは難しいと感じる学生が多いかもしれないと考えたので、別の証明を探してみた。一応微分演算子を用いた証明の焼き直し (微分演算子は見せない) を作ったが、果たしてそれで良いのか自信がもてない。微分演算子を簡単に導入して使うというのも考えているが…

他にもあるようで、もう少し追求してみよう。

H.2 第一積分を利用する

第 1 積分 (エネルギー) を利用して 1 回積分すると変数分離形の微分方程式になることから、いわゆる求積法だけで解くことができる。その方針での証明を探してみた。

H.2.1 1 階微分の項がなければ第一積分がすぐ求まり解決

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega \text{ は正定数})$$

は両辺に y' をかけて

$$y'y'' + \omega^2 y y' = 0.$$

これは

$$\left(\frac{1}{2}\left(y'\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y^2\right)' = 0$$

に同値であるから、

$$\exists C \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{2}\left(y'\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y^2 = \frac{1}{2}\omega^2 C^2.$$

これから

$$y' = \pm\sqrt{\omega^2 C^2 - \omega^2 y^2} = \pm\omega\sqrt{C^2 - y^2}.$$

これは変数分離形であり、通常の手順で[37]

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C^2 - y^2}} = \pm\omega \int dx.$$

積分を実行して

$$\operatorname{Arcsin}\frac{y}{C} = \pm\omega x + C' \quad (C' \text{ は積分定数}).$$

ゆえに

$$\frac{y}{C} = \pm\sin(\omega x + C').$$

これから

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x \quad (A,\ B \text{ は定数})$$

と書けることが分かる。逆にこの形をしている y が微分方程式の解であることは明らかである。

これとまったく同様にして、

$$y'' - \omega^2 y = 0$$

の一般解は

$$y = A\cosh\omega x + B\sinh\omega x \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

であることが分かる。

なお、

$$y'' = 0$$

の一般解は

$$y = Ax + B \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

[37] いわゆる分母 0 問題で、ここが必要条件で解けているのか怪しいという突っ込みはありそうだな。

H.2.2 1 階微分の項がある場合は変数変換で消去

1 階微分の項がある場合を解くには、変数変換で消去することを考える。

補題 H.3 $D = d/dx$ とおくと、任意の $\alpha \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{N}$ に対して

$$(D-\alpha)y = e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x}), \tag{H.1}$$

$$(D-\alpha)^m y = e^{\alpha x} D^m(e^{-\alpha x}). \tag{H.2}$$

証明 前半の証明は簡単である。それを利用して帰納法で後半が証明できる。■

系 H.4 $y = e^{-px/2}z$ とおくとき、

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'' + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) z = 0.$$

証明 1

$y = e^{-px/2}z$ とおくと

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{p}{2}e^{-px/2} + e^{-px/2}z', \\ y'' &= -\frac{p}{2}\left(-\frac{p}{2}e^{-px/2}z + e^{-px/2}z'\right) + \left(-\frac{p}{2}z' + z''\right)e^{-px/2} = \left(\frac{p^2}{4}z - pz' + z''\right)e^{-px/2} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= \left(\frac{p^2}{4}z - pz' + z''\right)e^{-px/2} + \left(-\frac{p^2}{2}z + pz'\right)e^{-px/2} + qe^{-px/2}z \\ &= e^{-px/2}\left[z'' + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)z\right]. ■ \end{aligned}$$

証明 2

補題 H.3 を用いると

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy = D^2y + pDy + qy &= \left(D + \frac{p}{2}\right)^2 y + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) y \\ &= e^{-px/2}D^2(e^{px/2}y) + e^{-px/2}(e^{px/2}y) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{-px/2}D^2(e^{px/2}y) + e^{-px/2}(e^{px/2}y) = 0. \\ &\Longleftrightarrow \quad D^2(e^{px/2}y) + (e^{px/2}y) = 0. ■ \end{aligned}$$

さて、

$$y'' + py' + qy = 0$$

で $y = e^{-px/2}z$ とおくと、方程式は z に関する

$$z'' + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) z = 0$$

に変換される。

(i) $q - p^2/4 > 0$ のとき

$$\omega = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

とおくと

$$z'' + \omega^2 z = 0$$

となるので、

$$z = A\cos\omega x + B\sin\omega x \quad (A,\ B\ \text{は任意定数}).$$

ゆえに

$$y = e^{-px/2}\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right) \quad (A,\ B\ \text{は任意定数}). \tag{H.3}$$

(ii) $q - p^2/4 = 0$ のとき

$$z'' = 0$$

となるので、

$$z = Ax + B \quad (A,\ B\ \text{は任意定数}).$$

ゆえに

$$y = e^{-px/2}(Ax + B) \quad (A,\ B\ \text{は任意定数}). \tag{H.4}$$

(iii) $q - p^2/4 < 0$ のとき

$$\omega = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

とおくと

$$z'' - \omega^2 z = 0$$

となるので、

$$z = A\cosh\omega x + B\sinh\omega x \quad (A,\ B\ \text{は任意定数}).$$

ゆえに

$$y = e^{-px/2}(A\cosh\omega x + B\sinh\omega x) \quad (A,\ B\ \text{は任意定数}).\blacksquare \tag{H.5}$$

H.3 定数係数 1 階線型方程式の解の公式を用いて一回ずつ積分する方法

定数係数 1 階線型方程式の解の公式 (基本解との畳み込みで表現する) を二回用いて解くことができる。それで証明になる。

既に示したように次の補題が成り立つ。

補題 H.5 (定数係数 1 階線型方程式の解の公式) 定数係数 1 階線型常微分方程式

$$y' = ay + f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

の解は一意に存在して

$$y = y_0 e^{a(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{a(x-y)} f(y)\,dy.$$

$$y'' + py' + qy = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

が与えられたとき、特性方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ の 2 根を α, β とすると、

$$(D-\alpha)\left[(D-\beta)y\right]=0.$$

そこで $v:=(D-\beta)y$ とおくと

$$(D-\alpha)v=0\quad\text{i.e.}\quad v'=\alpha v,\quad v(x_0)=y'(x_0)-\beta y(x_0)=y_1-\beta y_0.$$

補題を用いると

$$v(x)=(y_1-\beta y_0)e^{\alpha(x-x_0)}. \tag{H.6}$$

一方、y は

$$(D-\beta)y=v\quad\text{i.e.}\quad y'=\beta y,\quad y(x_0)=y_0$$

の解なので、再び補題を用いて

$$y(x)=y_0e^{\beta(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{\beta(x-y)}v(y)\,dy.$$

(H.6) を代入すると

$$\begin{aligned}y(x)&=y_0e^{\beta(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{\beta(x-y)}\cdot(y_1-\beta y_0)e^{\alpha(y-x_0)}\,dy\\&=y_0e^{\beta(x-x_0)}+(y_1-\beta y_0)e^{\beta x-\alpha x_0}\int_{x_0}^{x}e^{(\alpha-\beta)y}\,dy.\end{aligned}$$

ところで

$$\int_{x_0}^{x}e^{(\alpha-\beta)y}\,dy=\begin{cases}(x-x_0) & (\alpha=\beta)\\ \dfrac{e^{(\alpha-\beta)x}-e^{(\alpha-\beta)x_0}}{\alpha-\beta} & (\alpha\neq\beta).\end{cases}$$

ゆえに $\alpha=\beta$ の場合は

$$y=y_0e^{\alpha(x-x_0)}+(y_1-\alpha y_0)e^{\alpha x-\alpha x_0}(x-x_0)=e^{\alpha(x-x_0)}\left[y_0+(y_1-\alpha y_0)(x-x_0)\right],$$

$\alpha\neq\beta$ の場合は

$$\begin{aligned}y(x)&=y_0e^{\beta(x-x_0)}+(y_1-\beta y_0)e^{\beta x-\alpha x_0}\times\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-e^{(\alpha-\beta)x_0}}{\alpha-\beta}\\&=y_0e^{\beta(x-x_0)}+\frac{y_1-\beta y_0}{\alpha-\beta}\left[e^{\alpha(x-x_0)}-e^{\beta(x-x_0)}\right]\\&=\frac{y_1-\beta y_0}{\alpha-\beta}e^{\alpha(x-x_0)}+\frac{y_1-\alpha y_0}{\beta-\alpha}e^{\beta(x-x_0)}.\end{aligned}$$

以上の議論をまとめておく。

命題 H.6 p, q, y_0, $y_1\in\mathbf{C}$, $x_0\in\mathbf{R}$ とするとき、常微分方程式の初期値問題

$$y''+py'+qy=0,\quad y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1$$

は一意可解で、特性根を α, β としたとき、解は次のように表せる:

$$y=\begin{cases}e^{\alpha(x-x_0)}\left[y_0+(y_1-\alpha y_0)(x-x_0)\right] & (\alpha=\beta\ \text{の場合})\\ \dfrac{y_1-\beta y_0}{\alpha-\beta}e^{\alpha(x-x_0)}+\dfrac{y_1-\alpha y_0}{\beta-\alpha}e^{\beta(x-x_0)} & (\alpha\neq\beta\ \text{の場合}).\end{cases}$$

H.4　一意性を素朴に証明

変数変換により、$y'' - \omega^2 y = 0$ または $y'' = 0$ または $y'' + \omega^2 y = 0$ に変換され、それについて初期値問題の解の一意性を素朴に証明する。

H.4.1　方針

前小節でやったように

$$y'' + py' + qy = 0$$

は変数変換により

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

$$y'' = 0,$$

$$y'' - \omega^2 y = 0$$

のどれかに帰着される。それぞれについて初期条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

を課した初期値問題について解の一意性がなりたつことを示せばよい。それには (線形性から) $y_0 = y_1 = 0$ のときに $y \equiv 0$ が成り立つことを示せば十分である。

H.4.2　$y'' + \omega^2 y = 0$ の場合

エネルギー $E(x)$ を

$$E(x) := \frac{1}{2}\left[(y')^2 + \omega^2 y^2\right]$$

で定義する。

$$E'(x) = y''y' + \omega^2 yy' = y'\left[y'' + \omega^2 y\right] = y' \cdot 0 = 0$$

であるから、エネルギーは x によらない定数関数であることが分かる。$y_0 = y_1 = 0$ であるばあいは、

$$E(x) \equiv E(x_0) = \frac{1}{2}\left[(y_1)^2 + \omega^2 (y_0)^2\right] = 0$$

であることから、

$$y \equiv y' \equiv 0.$$

これは一意性が成り立つことを示す。

H.4.3　$y'' = 0$ の場合

この場合、求積法で

$$y = y_1(x - x_0) + y_0$$

と解が求まり、当然一意性も成り立つ。

H.4.4　$y'' - \omega^2 y = 0$ の場合

(準備中 — どうやるのかな？)

H.5 一意性定理を用いる証明

補題 H.7

(H.7) $$y'' + py' + qy = 0$$

の特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 根を α, β とする。

(1) $\alpha \neq \beta$ の場合、$e^{\alpha x}, e^{\beta x}$ が 1 次独立な (H.7) の解になる。

(2) $\alpha = \beta$ の場合、$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}$ が 1 次独立な (H.7) の解になる。

証明 解であることは本文中で証明済み。一次独立性を示すことが残っている。(工事中) ■

補題 H.8

$$y'' + py' + qy = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

の解は一意的である。

証明

$$u_1 := y, \quad u_2 := y', \quad \vec{u} := (u_1, u_2)^T$$

とおく。

$$\frac{d}{dx}\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -py' - qy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -pu_2 - qu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \vec{u},$$

$$\vec{u}(x_0) = \begin{pmatrix} u_1(x_0) \\ u_2(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \vec{u}, \quad \vec{u}_0 := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\frac{d}{dx}\vec{u} = A\vec{u}, \quad \vec{u}(x_0) = \vec{u}_0.$$

これは積分方程式

$$\vec{u}(x) = \vec{u}_0 + \int_{x_0}^{x} A\vec{u}(y)\, dy$$

と同値である。これが二つの解 $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $\vec{v} = \vec{v}(x)$ を持ったとしよう。

$$\vec{u}(x) - \vec{v}(x) = \int_{x_0}^{x} A\left(\vec{u}(y) - \vec{v}(y)\right) dy, \quad \vec{u}(x_0) - \vec{v}(x_0) = \vec{0}$$

となるので、$\vec{w}(x) := \vec{u}(x) - \vec{v}(x)$ とおくと、

$$\vec{w}(x) = \int_{x_0}^{x} A\vec{w}(y)\, dy, \quad \vec{w}(x_0) = \vec{0}.$$

x_0 を含む任意のコンパクト区間 I を取り、

$$M := \max_{x \in I} \|\vec{w}(x)\|$$

とおくと、任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して

$$\|\vec{w}(x)\|\le\|A\|M\frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

が成り立つことが分かる。$n\to\infty$ として

$$\vec{w}(x)=0\quad(x\in I).$$

I は任意だったから $\vec{w}\equiv 0$. ゆえに $\vec{u}=\vec{v}$.

H.6 演算子を駆使する方法

(工事中)

補題 H.9

$$f(D)e^{\lambda t}=f(\lambda)e^{\lambda t}$$

補題 H.10

$$(f+g)(D)=f(D)+g(D),\quad (f\cdot g)(D)=f(D)g(D).$$

補題 H.11

$$D^j(e^{\lambda x}u)=e^{\lambda x}(D+\lambda)^j u$$

$$f(D)\left(e^{\lambda x}u(x)\right)=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x).$$

あるいは

$$e^{-\lambda x}f(D)e^{\lambda x}=f(D+\lambda).$$

$\alpha\ne\beta$ とするとき、$e^{\alpha x}$ と $e^{\beta x}$ の1次独立性を示そう。

$$C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}=0$$

とするとき、$D-\alpha$ を施すと

$$C_2(\beta-\alpha)e^{\beta x}=0.$$

これから $C_2=0$. すると明らかに $C_1=0$ となり、$C_1=C_2=0$ が示された。

$\alpha=\beta$ とするとき、$e^{\alpha x}$ と $xe^{\alpha x}$ の1次独立性を示そう。

$$C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}=0$$

とするとき、$D-\alpha$ を施すと

$$C_2(\beta-\alpha)e^{\beta x}=0.$$

これから $C_2=0$. すると明らかに $C_1=0$ となり、$C_1=C_2=0$ が示された。

H.7 どれが良いか

色々考えると、早いうちからベクトル値の微分方程式に慣れておいた方がよい。そういう準備があれば、一般的な一意性定理から線型方程式の解空間の次元が n であることを示すのは大変ではないかも知れない。

I　演習問題

2004 年度の基礎数学 IV で配布したプリントの問題 (の一部) とその解答。

I.1　変数分離形

プリントの 5.1 の 3 (小問が全部で 27 個ある) を解け[38]。

(1) $x^3y'+y^2=0$ (2) $y'=3y^{2/3}$ (3) $y'=\sqrt{y-1}$ (4) $x^2y'+y^2=0$ (5) $y^3+x^6y'=0$ (6) $y-xy'=x^2y'$ (7) $y'+ay^2=0$ (8) $\sin x\sin^2 y-y'\cos x=0$ (9) $(1+x)y+(1-y)xy'=0$ (10) $y'\tan x=\cot y$ (11) $(1+x^3)y'+x^2y^2=0$ (12) $y'=a(b^2-y^2)$ (13) $y'=\dfrac{\cos^2 y}{1+x^2}$ (14) $y'=\dfrac{1+\sin x}{\sec^2 x}$ (15) $y'=\dfrac{xy}{x^2-1}$ (16) $x(1+y^2)y'=y(1+x^2)$ (17) $yy'=x(y+1)$ (18) $xy'-y^2+1=0$ (19) $y'=e^{2(x+y)}$ (20) $y'=e^{-(x+y)}$ (21) $y'=|y|$ (22) $y'=\dfrac{x}{y}$ (23) $y'=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ (24) $y'=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ (25) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}$ (26) $y'=\dfrac{y^2}{x^3}$ (27) $y'=\dfrac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$

(1)

$$-\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x^3}$$

を積分して

$$\frac{1}{y}=-\frac{1}{2}x^{-2}+C=\frac{2Cx^2-1}{2x^2}.$$

これを y について解いて、

$$y=\frac{x^2}{Cx^2-1/2}.$$

(2)

$$y^{-2/3}dy=3dx$$

を積分して

$$3y^{1/3}=3x+3C \quad \therefore \quad y^{1/3}=x+C$$

これを 3 乗して

$$y=(x+C)^3.$$

これは特異解がある。

(3)

$$(y-1)^{-1/2}dy=dx$$

を積分して、

$$2(y-1)^{1/2}=x+C.$$

y について解いて

$$y=1+\frac{(x+C)^2}{4}.$$

(4)

$$-\frac{dy}{y^2}=\frac{1}{x^2}dx$$

を積分して

$$y^{-1}=-\frac{1}{x}+C=\frac{Cx-1}{x}$$

[38] もともとは大学数学教育研究会編『大学課程 微分積分学概説 [増補版]』[1] から採ったものである。

y について解いて

$$y = \frac{x}{Cx-1}.$$

(5)

$$-y^{-3}dy = x^{-6}dx$$

を積分して

$$\frac{1}{2}y^{-2} = -\frac{1}{5}x^{-5} + C$$

y について解いて

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\left(C - \frac{1}{5x^5}\right)}}.$$

配布しているプリント p. 20 の解答では

$$y^2 = \frac{5x^2}{Cx^5-2}$$

となっているが、これは

$$y^2 = \frac{5x^{5}}{Cx^5-2}$$

が正しい。

(6) まず dy/dx をまとめるのが先。

$$y = (x+x^2)\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+x^2}$$

を積分して

$$\log|y| = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \log|x| - \log|x+1| + \log C = \log C\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

$$y = C'\frac{x}{x+1}.$$

(8)

$$\frac{dy}{\sin^2 y} = \tan x\, dx$$

を積分して

$$-\cot y = -\log|\cos x| - \log C$$

y について解いて

$$y = \mathrm{Arccot}\,(\log C\cos x)$$

(9)

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)dy = \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

であるから、

$$y - \log|y| = x + \log|x| + C.$$

$F(y) = y - \log y$ とおくと、F は $0 < y < 1$ で単調減少、$y > 1$ で単調増加。

(10)

$$\tan y\, dy = \cot x\, dx$$

$$-\log|\cos y| = \log|\sin x| + \log C$$
$$\frac{1}{|\cos y|} = C\,|\sin x|$$
$$\cos y = \frac{C'}{\sin x}$$
$$y = \mathrm{Arccos}\left(\frac{C'}{\sin x}\right).$$

I.2 一階線型微分方程式

次の微分方程式の一般解を求めなさい。a, b, c, d は定数とする。
(1) $y' + ay = 0$ (2) $y' + ay = b$ (3) $y' + y\cot x = \operatorname{cosec} x$ $(0 < x < \pi/2)$ (4) $y' + 2xy = x$
(5) $y' - y\tan x = \sin x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ (6) $y' - 2xy = e^{x^2}$ (7) $xy' + y = x\log x$ $(x > 0)$
(8) $y' + ay = e^{bx}$ (9) $y' + \dfrac{a}{x}y = 0$ (10) $y' - xy = x$ (11) $y' + \dfrac{1}{x}y = 1 - x^2$ $(x > 0)$
(12) $xy' + y = 4x(1 + x^2)$ (13) $xy' - (y + x^2\sin^2 x) = 0$ (14) $y' + y\cos x = -\sin x e^{-\sin x}$
(15) $x(1 - x^2)y' + (x^2 - 1)y = x^3$ $(0 < x < 1)$ (16) $y' - ay = \sin x$ (17) $(1 + x^2)y' = xy\sqrt{1 + x^2}$ (18) $y' + (1 + x^2)y = e^{-x^3/3}$ (19) $y' + ay = bx^2 + cx + d$ (20) $xy' + (1 + x)y = e^x$

(1) $y = Ce^{-ax}$

(2) $y' = -ay + b$ だが、$y' = -ay$ の一般解は $y = Ce^{-ax}$ (C は任意定数) である。そこで $y = c(x)e^{-ax}$ とおくと、
$$y' = c'(x)\cdot e^{-ax} + c(x)\cdot e^{-ax}(-a) = -ay + c'(x)e^{-ax}.$$
それゆえ微分方程式の解であるための必要十分条件は
$$c'(x)e^{-ax} = b.$$
$c'(x) = be^{ax}$ と解けるので $c(x) = \frac{a}{b}e^{ax} + C$ (C は任意定数). ゆえに求める一般解は
$$y = c(x)e^{-ax} = Ce^{-ax} + \frac{a}{b}.$$

(3) $y' = -(\cot x)y + \dfrac{1}{\sin x}$ であるが、まず $y' = -(\cot x)y$ の一般解を求める。
$$\int\frac{dy}{y} = \int(-\cot x)\,dx = -\log|\sin x| + \log C = -\log\sin x + \log C = \log\frac{C}{\sin x}$$
から
$$y = \pm\frac{C}{\sin x} = \frac{C'}{\sin x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$
そこで $y = \dfrac{c(x)}{\sin x}$ とおくと、
$$y' = \frac{c'(x)}{\sin x} + c(x)\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{y}{\sin x} + \frac{c'(x)}{\sin x}.$$
ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は
$$\frac{c'(x)}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}.$$
これから $c'(x) = 1$. ゆえに $c(x) = x + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は
$$y = \frac{c(x)}{\sin x} = \frac{x + C''}{\sin x}.$$

(4) $y' = -2xy + x$ であるが、まず $y' = -2xy$ の一般解を求める。

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-2x)\,dx = -x^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

より $y = \pm e^C e^{-x^2} = C' e^{-x^2}$ (C' は任意定数). そこで $y = c(x)e^{-x^2}$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} + c(x) \cdot e^{-x^2}(-2x) = -2xy + c'(x)e^{-x^2}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)e^{-x^2} = x.$$

これから $c'(x) = xe^{x^2}$. ゆえに

$$c(x) = \frac{e^{x^2}}{2} + C \quad (C'' \text{ は任意定数}).$$

ゆえに求める一般解は

$$y = c(x)e^{-x^2} = \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C''\right)e^{-x^2} = C''e^{-x^2} + \frac{1}{2}.$$

(5) $y' = 2xy + e^{x^2}$ であるが、まず $y' = 2xy$ の一般解を求める。

$$\frac{dy}{y} = \int 2x\,dx = x^2 + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

これから

$$y = \pm e^C e^{x^2} = C' e^{x^2} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = c(x)e^{x^2}$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x) \cdot e^{x^2}(2x) = 2xy + c'(x)e^{x^2}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)e^{x^2} = e^{x^2}.$$

これから $c'(x) = 1$. ゆえに $c(x) = x + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = c(x)e^{x^2} = (x + C'')e^{x^2}.$$

(6) $y' = 2xy + e^{x^2}$ であるが、まず $y' = 2xy$ の一般解を求める。

$$\frac{dy}{y} = \int 2x\,dx = x^2 + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

これから

$$y = \pm e^C e^{x^2} = C' e^{x^2} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = c(x)e^{x^2}$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x) \cdot e^{x^2}(2x) = 2xy + c'(x)e^{x^2}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)e^{x^2} = e^{x^2}.$$

これから $c'(x) = 1$. ゆえに $c(x) = x + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = c(x)e^{x^2} = (x + C'')e^{x^2}.$$

(7) $y' = -\dfrac{y}{x} + \log x$ であるが、まず $y' = -\dfrac{y}{x}$ の一般解を求める。

$$\frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} = -\log|x| + \log C = \log\frac{C}{|x|} \quad (C \text{ は正の任意定数}).$$

これから

$$y = \pm\frac{C}{x} = \frac{C'}{x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = c(x)/x$ とおくと、

$$y' = c'(x)\cdot\frac{1}{x} + c(x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x} + \frac{c'(x)}{x}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$\frac{c'(x)}{x} = \log x.$$

これから $c'(x) = x\log x$. ゆえに

$$c(x) = \int x\log x\,dx = \int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\log x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C'' \quad (C'' \text{ は任意定数}).$$

ゆえに求める一般解は

$$y = \frac{c(x)}{x} = \frac{x\log x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{C''}{x}.$$

(8) $y' = -ay + e^{bx}$ であるが、まず $y' = -ay$ の一般解は $y = Ce^{-ax}$ (C は任意定数) である。そこで $y = c(x)e^{-ax}$ とおくと、

$$y' = c'(x)\cdot e^{-ax} + c(x)\cdot e^{-ax}(-a) = -ay + c'(x)e^{-ax}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)e^{-ax} = e^{bx}.$$

これから $c'(x) = e^{(a+b)x}$. ゆえに $c(x) = \dfrac{e^{(a+b)x}}{a+b} + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = c(x)e^{-ax} = \frac{e^{bx}}{a+b} + C''e^{-ax}.$$

(9)

(10)

(11) $y' = -\dfrac{y}{x} + (1 - x^2)$ であるが、まず $y' = -y/x$ の一般解は

$$\int\frac{dy}{y} = \int\left(-\frac{1}{x}\right)Dx = -\log|x| + \log C = \log\frac{C}{|x|} \quad (C \text{ は正の任意定数})$$

より

$$y = \pm\frac{C}{x} = \frac{C'}{x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = c(x)/x$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot \frac{1}{x} + c(x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x} + \frac{c'(x)}{x}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$\frac{c'(x)}{x} = 1 - x^2.$$

これから $c'(x) = x - x^3$. ゆえに $c(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = \frac{c(x)}{x} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{C''}{x}.$$

(12)

(13)

(14) $y' = -y\cos x - \sin x e^{-\sin x}$ であるが、まず $y' = -y\cos x$ の一般解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-\cos x)\ Dx = -\sin x + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

より

$$y = \pm e^C e^{-\sin x} = C' e^{-\sin x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = c(x)e^{-\sin x}$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} + c(x) \cdot e^{-\sin x}(-\cos x) = -(\cos x)y + c'(x)e^{-\sin x}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)e^{-\sin x} = -\sin x e^{-\sin x}.$$

これから $c'(x) = -\sin x$. ゆえに $c(x) = \cos x + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = c(x)e^{-\sin x} = C'' e^{-\sin x} + e^{-\sin x}\cos x.$$

(15)

(16)

(17) これは変数分離形だ。$y'/y = x/\sqrt{1+x^2}$ であるから、

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \sqrt{1+x^2} + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

$$y = \pm e^C \exp\sqrt{1+x^2} = C' \exp\sqrt{1+x^2} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

(18)

(19)

(20) $y' = -\dfrac{1+x}{x}y + \dfrac{e^x}{x}$ であるが、まず $y' = -(1+x)y/x$ の一般解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) Dx$$

より

$$\log|y| = -\left(x + \log|x|\right) + \log C = \log \frac{C}{|x|e^x} \quad (C \text{ は正の任意定数}).$$

$$y = \pm\frac{C}{xe^x} = \frac{C'}{xe^x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = \dfrac{c(x)}{xe^x}$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot \frac{1}{xe^x} + c(x) \; = -\frac{1+x}{x}y + c'(x)\frac{1}{xe^x}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)\frac{1}{xe^x} = \frac{e^x}{x}.$$

これから $c'(x) = e^{2x}$. ゆえに $c(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = \frac{c(x)}{xe^x} = \frac{C}{xe^x} + \frac{e^x}{2x}.$$

I.3 定数係数 2 階線型非同次方程式

(1) $y'' - 6y' + 8y = e^x$. $L[y] = y'' - 6y' + 8y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ で、特性根は $\lambda = 2,\ 4$ なので、一般解は $z = Ae^{2x} + Be^{4x}$ ($A,\ B$ は任意定数). $L[y] = e^x$ の特解 u を求めるために $u = Ce^x$ (C は定数) とおく。$L[u] = L[Ce^x] = (C - 6C + 8C)e^x = 3Ce^x$ なので u が特解であるためには、$3C = 1$ ゆえに $C = \dfrac{1}{3}$. ゆえに $L[y] = e^x$ の一般解は $y = u + z = \dfrac{1}{3}e^x + Ae^{2x} + Be^{4x}$.

(2) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$. $L[y] = y'' - 3y' + 2y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ で、特性根は $\lambda = 1,\ 2$ なので、一般解は $z = Ae^x + Be^{2x}$ ($A,\ B$ は任意定数). $L[y] = \sin x$ の特解 u を求めるために $u = k\cos x + \ell\sin x$ ($k,\ \ell$ は定数) とおく。$L[u] = L[k\cos x + \ell\sin x] = (-k\cos x - \ell\sin x) - 3(-k\sin x + \ell\cos x) + 2(k\cos x + \ell\sin x) = (k - 3\ell)\cos x + (3k + \ell)\sin x$ なので、u が特解であるためには、

$$\begin{aligned} k - 3\ell &= 0, \\ 3k + \ell &= 1. \end{aligned}$$

これを解いて $k = \dfrac{3}{10}$, $\ell = \dfrac{1}{10}$. ゆえに $u = \dfrac{3}{10}\cos x + \dfrac{1}{10}\sin x$. ゆえに $L[y] = \sin x$ の一般解は $y = u + z = \dfrac{3}{10}\cos x + \dfrac{1}{10}\sin x + Ae^x + Be^{2x}$.

(3) $y'' - a^2y = xe^{ax}$. $L[y] = y'' - a^2y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - a^2 = 0$ で、特性根は $\lambda = \pm a$. これは $a \neq 0$ の場合は $a = 0$ の場合は重根 0.

(i) $a \neq 0$ の場合、相異なる 2 根なので、一般解は $z = Ae^{ax} + Be^{-ax}$ (A, B は任意定数). $L[y] = xe^{ax}$ の特解を求めるために、$u = (px^2+qx)e^{ax}$ とおくと[39]、$L[u] = L[(px^2+qx)e^{ax}] =$ (途中計算略) $= [4apx + 2(aq+p)]\,e^{ax}$. これが xe^{ax} に等しくなるには

$$4ap = 1,$$
$$aq + p = 0.$$

これから $p = \dfrac{1}{4a}$, $q = -\dfrac{1}{4a^2}$. ゆえに $u = \left(\dfrac{1}{4a}x^2 - \dfrac{1}{4a^2}x\right)e^{ax}$. ゆえに $L[y] = xe^{ax}$ の一般解は $y = u + z = \left(\dfrac{1}{4a}x^2 - \dfrac{1}{4a^2}x\right)e^{ax} + Ae^{ax} + Be^{-ax}$.

(ii) $a = 0$ の場合、$\pm a = 0$ (重根) なので、一般解は $z = Ae^{0x} + Bxe^{0x} = A + Bx$ (A, B は任意定数). $a = 0$ の場合 $L[y] = xe^{ax}$ は $y'' = x$ ということだから、容易に $u = \dfrac{x^3}{6}$ が特解であることが分かる。ゆえに $L[y] = xe^{ax}$ の一般解は $y = u + z = \dfrac{x^3}{6} + A + Bx$.

(4) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$. $L[y] = y'' + 2y' + y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ で、特性根は $\lambda = -1$ (重根) なので、一般解は $z = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ (A, B は任意定数). $L[y] = e^{-x}$ の特解 u を求めるために、$u = kx^2e^{-x}$ (k は定数) とおく[40]。$L[u] = L[kx^2e^{-x}] =$ (途中計算略) $= 2ke^{-x}$ なので、u が特解であるためには、$2k = 1$ すなわち $k = \dfrac{1}{2}$. ゆえに $u = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$. ゆえに $L[y] = e^{-x}$ の一般解は $y = u + z = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.

(5) $y'' + 2y' + y = x^2$. $L[y] = y'' + 2y' + y$ とおく。(これは前問と同じなので) 対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の一般解は $z = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ (A, B は任意定数). $L[y] = x^2$ の特解 u を求めるために、$u = px^2 + qx + r$ (p, q, r は定数) とおく[41]。$L[u] = L[px^2 + qx + r] =$ (途中計算略) $= px^2 + (4p + q)x + (2p + 2q + r)$ なので、u が特解であるためには、$2k = 1$ すなわち $k = \dfrac{1}{2}$. ゆえに $u = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$. ゆえに $L[y] = e^{-x}$ の一般解は $y = u + z = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.

(6) $y'' - 6y' + 9y = x + e^x$. $L[y] = y'' - 6y' + 9y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ で、特性根は $\lambda = 3$ (重根) なので、一般解は $z = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$ (A, B は任意定数). $L[y] = x$ の特解 u を求めるために、$u = px + q$ (p, q は定数) とおく。$L[u] = L[px + q] =$ (途中計算略) $= 9px + (9q - 6p)$ なので、u が特解であるためには、

$$9p = 1,$$
$$9q - 6p = 0.$$

これから $p = 1/9$, $q = 2/27$. ゆえに $u = \dfrac{1}{9}x + \dfrac{2}{27}$.

$L[y] = e^x$ の特解 v を求めるために、$u = ke^x$ (k は定数) とおく。$L[u] = L[ke^x] =$ (途中計算略) $= 4ke^x$ なので、u が特解であるためには、$4k = 1$ すなわち $k = \dfrac{1}{4}$. ゆえに $u = \dfrac{1}{4}e^x$.

ゆえに $L[y] = x + e^x$ の一般解は $y = u + v + z = \dfrac{1}{9}x + \dfrac{2}{27} + \dfrac{1}{4}e^x + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.

[39] a が重根でないとすると、右辺が e^{ax} ならば $u = pe^{ax}$ とおくところだが、右辺に x がかかっているので、$u = (px+q)e^{ax}$ とする。そして実は a が重根なので x をかけて $u = (px^2 + qx)e^{ax}$ とする。

[40] -1 が特性根でなければ $u = ke^{-x}$ とおけば良いが、重根なので x^2 をかける。

[41] 0 が特性根でないので、単に右辺の多項式の次数と同じ 2 次多項式とおけばよい。

(7) $y'' - 6y' + 9y = \cos x$. $L[y] = y'' - 6y' + 9y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ で、特性根は $\lambda = 3$ (重根) なので、一般解は $z = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$ (A, B は任意定数). $L[y] = x$ の特解 u を求めるために、$u = k\cos x + \ell \sin x$ (k, ℓ は定数) とおく。$L[u] = L[k\cos x + \ell\sin x] =$ (途中計算略) $= (8k - 6\ell)\cos x + (8\ell - 6k)\sin x$ なので、u が特解であるためには、

$$8k - 6\ell = 1,$$
$$-6k + 8\ell = 0.$$

これから $k = \dfrac{2}{25}$, $\ell = -\dfrac{3}{25}$. ゆえに $u = \dfrac{2}{25}x - \dfrac{3}{25}$.

ゆえに $L[y] = \cos x$ の一般解は $y = u + z = \dfrac{2}{25}x - \dfrac{3}{25} + Ae^{3x} + Bxe^{3x}$.

(8) $y'' - 2y' = 1 + x$. $L[y] = y'' - 2y'$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ で、特性根は $\lambda = 0, 2$ なので、一般解は $z = Ae^{2x} + B$ (A, B は任意定数). $L[y] = x$ の特解 u を求めるために、$u = (kx + \ell)x$ (k, ℓ は定数) とおく[42]。$L[u] = L[kx^2 + \ell x] =$ (途中計算略) $= -2kx + (2k - \ell)$ なので、u が特解であるためには、

$$-2k = 1,$$
$$2k - \ell = 1.$$

これから $k = -\dfrac{1}{2}$, $\ell = -2$. ゆえに $u = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x$.

ゆえに $L[y] = \cos x$ の一般解は $y = u + z = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + Ae^{2x} + B$. ■

J　微分方程式歴史覚え書き

(これは 2003 年度応用解析 II の講義ノートから抜き出した。ときどきチェックしてマージすること。)

数学の歴史についての読み物と言うと、ベル「数学をつくった人々」[26] や遠山・矢野編集「100 人の数学者」 [27] が手に取って読みやすい本であろう (その他にブルバキ「数学史」というのもあるが、微分方程式についてはあまり書かれていない)。

J.1　微分方程式のはじまり — Newton

Newton (Isaac Newton, 1642–1727) は微分積分学の創始者、力学の創始者 (あるいは理論物理学の創始者) として有名だが、力学の問題を解くために多くの微分方程式を解いている (最短降下線の問題、懸垂線[43])。著書『プリンキピア・マセマティカ』 (自然哲学の数学的原理, 1687 年出版) の中で万有引力の法則を仮定すると惑星の運動に関する Kepler の法則[44]が導かれることを証明した[45]。

[42] 0 が特性根でなければ $u = kx + \ell$ とおけばよいが、0 は特性方程式の単根なので、x をかけて $u = (kx + \ell)x$ とする。

[43] なお、最近の学生はこの手の物理にうといので、参考書を紹介しておく。高桑 [28] は、大学初年級の物理学に現われる常微分方程式を数学的に簡潔に説明してあり、多分現在の数学科の学生にも読みやすいと思われる。

[44] Yohannes Kepler (1571–1630) は偉大な天文観測家である Ticho Brahe (1546–1601) の助手であったが、Brahe の死後に彼の観測結果を整理分析することで有名な Kepler の法則を発見した。第一、第二法則は 1609 年に、第三法則は 1619 年に発表された。

[45] 見方によっては、プリンキピアは、ただ一つのこと (Kepler の法則) を証明するために書かれた書物であり、それを書くために微分積分学、力学を打ち立てる必要があった、つまり Kepler の法則を証明するために微分積分学と力学が作られた、となるであろう。

プリンキピアは微積分を使わない古典的な書き方で書かれているが、本質的には運動方程式 (それは 2 階の常微分方程式である) を解くことによって解決された。

ニュートンのプリンキピア・マセマティカに関する解説としては、筆者の目に止まった本の中から、Gamov(ガモフ) [29], チャンドラセカール [30], Arnold [31] をあげておく。[29] には現代の普通の物理学の言葉で、ニュートンがいかに万有引力の法則を発見し、Kepler の法則を証明したかが書いてある。[30] はプリンキピアを真っ正面から読解するという本である。[31] は著名な力学系の研究者である著者による歴史読み物である。

Newton からライバル Leibniz への手紙

以下は遠山 [32] に載っている話。Newton は 1676 年 10 月に次のような暗号文 (鍵はないので作った本人にしか解けやしない) を Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) に送ったそうである。

> aaaaaa cc d æ eeeeeeeeeeeeee ff iiiiii lll nnnnnnnnn oooo qqqq rr ssss ttttttttt vvvvvvvvvvvv x

これは並べ替えによって

> Data æqvatione qvotcvnqve flventes qvantitates involvente flvxiones invenire, et vice versa.

というラテン語の文になり、その意味は

> 「いくつかの流量をふくむ方程式が与えられているとき、流率をもとめること、また逆に流率から流量をもとめること」

となる。遠山先生の解釈によると「流量から流率をもとめるのは微分であり、逆に流率から流量をもとめることは微分方程式を解くことなのである」。つまり Newton は自分が微分方程式を発見 (発明?) したことをライバルには教えずに、自分が発見したという証拠を残しておこうとした、ということなのでしょう (なかなか世知辛いですね)。

K 数式処理系で常微分方程式の一般解を求める

Mathematica, Maple のような数式処理系で常微分方程式の求積法を実行できる。ここでは Mathematica の DSolve を使ってみよう。

K.1 変数分離形

演習問題の (1)

$$x^3y' + y^2 = 0$$

を解くには

```
DSolve[x^3 y'[x]+y[x]^2==0,y,x]
```

とする。

```
                            2
                        2 #1
Out[13]= {{y -> (------------- & )}}
                           2
                    -1 + #1  C[1]
```

これは

$$y = \frac{2x^2}{cx^2 - 1}$$

ということを意味している。正しく解けている。

続いて (2),

$$y' = 3y^{2/3}$$

```
DSolve[y'[x]==3 (y[x])^(2/3),y,x]
```

```
                      3       2                 2       3
Out[14]= {{y -> (#1  - 3 #1  C[1] + 3 #1 C[1]  - C[1]  & )}}
```

これは

$$y = x^3 - 3Cx^2 + 3C^2x - C^3 = (x - C)^3$$

ということを意味している。これも正しく解けている。

続いて (3),

$$y' = \sqrt{y - 1}$$

```
DSolve[y'[x]==Sqrt[y[x]-1],y]
```

```
                          2                   2
                    4 + #1  - 2 #1 C[1] + C[1]
Out[15]= {{y -> (-------------------------- & )}}
                               4
```

これは

$$y = \frac{4 + x^2 - 2Cx + C^2}{4} = \frac{(x - C)^2 + 4}{4} = 1 + \frac{(x - C)^2}{4}$$

ということを意味している。これも正しく解けている。

続いて (4)

$$x^2y' + y^2 = 0$$

```
DSolve[x^2 y'[x]+y[x]^2==0,y,x]
```

```
                         #1
Out[16]= {{y -> (------------ & )}}
                  -1 + #1 C[1]
```

これは

$$y = \frac{x}{Cx - 1}$$

ということを意味している。これも正しく解けている。
続いて (6)

$$y - xy' = x^2 y'$$

```
DSolve[y[x]-x y'[x]==x^2 y'[x],y,x]
```

```
                    Log[#1] - Log[1 + #1]
Out[17]= {{y -> (E                      C[1] & )}}
```

これは

$$y = Ce^{\log x - \log(1+x)} = \frac{Cx}{x+1}$$

ということを意味している。これも正しく解けている。
続いて (9)

$$(1+x)y + (1-y)xy' = 0$$

```
DSolve[(1+x)y[x]+(1-y[x])x y'[x]==0,y,x]
```

しかし、これは警告が出る。

```
InverseFunction::ifun:
   Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued
    inverses.

Solve::ifun: Inverse functions are being used by Solve, so some
 solutions may
     not be found.

                                -#1 - C[1]
                               E
Out[18]= {{y -> (-ProductLog[-(-----------)] & )}}
                                   #1
```

ちなみにこの解は

$$y - \log|y| = x + \log|x| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であり、y について解くのは確かに難しい。
続いて (10)

$$y' \tan x = \cot y$$

```
DSolve[y'[x]Tan[x]==Cot[y[x]],y,x]
```

これは何故か解けない。ちなみに解は

$$y = \mathrm{Arccos}\,\frac{C}{\sin x} \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。何か困難があるのだろうか？

L　Kepler 運動

(工事中)

藤田 [33] にやさしく (ただし少し簡略化されている) 解説されている。

周期の話が高野 [4] にあった。

小野寺 [34] に「惑星の公転運動のフーリエ解析」という章がある。もっともこれはベッセル関数入門の方がよいかも。

M　水素原子のエネルギー準位

高野恭一, 常微分方程式, 朝倉書店 ().

N　適切性

連続かつ Lipschitz ならば解が存在するというのは、普通 Picard の定理という。Picard の逐次近似法を使うからか。解の存在範囲が違うのに Lindölef の定理というのがある。

連続だけで局所解の存在を保証するのは Cauchy の定理。

N.1　一意性

一意性定理の証明は比較的簡単なので紹介しよう。

命題 N.1

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (x \in I),$$
$$y(x_0) = y_0$$

の解 $y = \varphi_1(x)$ $(x_0 \le x \le x_1)$, $y = \varphi_2(x)$ $(x_0 \le x \le x_2)$ に対して

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad (x_0 \le x \le x_* := \min\{x_1, x_2\}).$$

証明　φ_1, φ_2 が解であることから、

$$\varphi_j(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_j(t))\, dt \quad (j = 1, 2)$$

が成り立つ。$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ とおくと、

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \left[f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t)) \right].$$

ゆえに

$$|\varphi(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))|\, dt \le \int_{x_0}^{x} L\,|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\; dt = L \int_{x_0}^{x} |\varphi(t)|\; dt.$$

$M = \max_{x\in[x_0,x_*]} |\varphi(x)|$ とおくと、

$$\begin{aligned}|\varphi(x)| &\le LM(x-x_0),\\ |\varphi(x)| &\le L\int_{x_0}^x LM(t-x_0)\,dt = L^2M\frac{(x-x_0)^2}{2},\\ |\varphi(x)| &\le L\int_{x_0}^x L^2M\frac{(t-x_0)^2}{2}\,dt = L^3M\frac{(x-x_0)^3}{3!},\end{aligned}$$

以下帰納的に

$$|\varphi(x)| \le M\frac{[L(x-x_0)]^n}{n!}.$$

ゆえに

$$|\varphi(x)| \le M\frac{[L(x_*-x_0)]^n}{n!}.$$

これから $\varphi\equiv 0$. ゆえに $\varphi_1\equiv\varphi_2$. ■

命題 N.2 (局所 Lipschitz ならば一意)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (x\in I),$$

$$y(x_0) = y_0$$

の解 $y=\varphi_1(x)$ $(x_0\le x\le x_1)$, $y=\varphi_2(x)$ $(x_0\le x\le x_2)$ に対して

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad (x_0\le x\le x_+ := \min\{x_1,x_2\}).$$

証明　まず

$$\overline{x} := \sup E,\quad E := \{\beta\in[x_0,x_+]; \forall x\in[x_0,\beta]\quad \varphi_1(x)=\varphi_2(x)\}$$

とおく。$x_0\in E$ であるから $E\ne\emptyset$ であることに注意。x_+ が E の上界になるので E は上に有界で、有限な $\sup E$ が定まる。

1 主張: $\varphi_1=\varphi_2$ on $[x_0,\overline{x}]$ である。

まず $\varphi_1=\varphi_2$ on $[x_0,\overline{x})$ を示す。$\forall x\in[x_0,\overline{x})$ に対して sup の定義より $\exists x_*\in(x,\overline{x})\cap E$. $\varphi_1=\varphi_2$ on $[x_0,x_*]$ であるから、特に $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$. $\varphi_1(\overline{x})=\varphi_2(\overline{x})$ を示すには、$x_n\uparrow\overline{x}$ となる $\{x_n\}$ を取って $\varphi_1(x_n)=\varphi_2(x_n)$ で $n\to\infty$ とすれば、φ_1, φ_2 の連続性より $\varphi_1(\overline{x})=\varphi_2(\overline{x})$.

2 $\overline{x}=x_*$ が成り立つ。1 と合せて $\varphi_1=\varphi_2$ on $[x_0,x_*]$.

x_* は E の上界であるから、$\overline{x}\equiv\sup E\le x_*$. $\overline{x}<x_*$ と仮定して矛盾を導く。$\overline{y}_0 := \varphi_1(\overline{x})=\varphi_2(\overline{x})$ ととくと、φ_1, φ_2 ともに

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)\quad (x\in(\overline{x}_0,x_*)),\quad y(\overline{x})=\overline{y}_0$$

の解である。これから $\lessdot\exists\overline{\overline{x}}\le x_+$ s.t. $\varphi_1=\varphi_2$ on $[x_0,\overline{\overline{x}}]$. $\overline{x}<\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{x}}\in E$ であるから、$\overline{x}=\sup E$ に反する。■

O　問題

O.1　2003 年度基礎数学 IV 練習問題

(注意: この年度の基礎数学 IV は、級数と微分方程式が半分ずつであった。)

O.1.1　問題

当然のことであるが、最終的な結果だけでなく、途中の経過や考え方も答案に書く必要がある。

1　次の各級数の収束・発散を調べよ (判断の理由も簡単に述べよ)。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\pi^n}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

(すると手順としては、まず一般項が 0 に収束するかどうかチェックし、次に項の符号を調べ、正だったら)

2　ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ の収束半径を R とし、$|x|<R$ なる x に対して、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) R の値を求めよ。 (2) $f'(x)$ をなるべく簡単な式で表わせ。(3) $f(x)$ をなるべく簡単な式で表わせ。(4) $\displaystyle\lim_{x\to R-0} f(x)$ を求めよ。

(以下 y', y'' はそれぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表わすとする。)

3　(1) 微分方程式 $y'=xy$ の一般解を求めよ。(2) 微分方程式 $y'=xy+x$ の一般解と、$x=0$ のとき $y=1$ となる解を求めよ。

4　微分方程式

(a)
$$y''+2y'-3y=0,$$

(b)
$$y''+2y'-3y=e^x$$

について以下の問に答えよ。

(1) (a) の一般解を求めよ。(2) (a) の解で $y(0)=1$, $y'(0)=2$ を満たすものを求め、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y$ がどうなるか答えよ。(3) (b) の一般解を求めよ。

O.1.2　解答と解説

1　ここでは一通りの要点が復習できるように 5 問の小問を用意しました。期末試験ではもう少し問題の数を少なくします。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1$$

となり、一般項が 0 に収束しないので、この級数は発散する。

> **命題 O.1 (級数が収束するには一般項の極限が 0 でなければならない)** $\displaystyle\sum_n a_n$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$. 対偶を取って、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$ でなければ $\displaystyle\sum_n a_n$ は発散する。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n}, \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ であるから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$. 発散。

> **命題 O.2 (二つの正項級数については、大きい方が収束すれば小さい方も収束)** すべての n について $0 \leq a_n \leq b_n$ であるとする。もし $\displaystyle\sum_n b_n$ が収束するならば $\displaystyle\sum_n a_n$ も収束する。
> 対偶を取ると、もし $\displaystyle\sum_n a_n$ が発散するならば $\displaystyle\sum_n b_n$ も発散する。
> 覚え方: $0 \leq a_n \leq b_n$ であるから直感的に明らかなように $\displaystyle\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$ で、"収束は $< \infty$ となること", "発散は $= \infty$ となること" だから[a]。
>
> [a] あるいは $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha > 1) \\ \infty & (\alpha \leq 1) \end{cases}$ と対照する。

(3)

$$\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{収束}$$

であるから、$\displaystyle\sum \frac{\cos n}{n^2}$ は絶対収束であり、収束する。

> **命題 O.3** $\displaystyle\sum_n a_n$ が絶対収束するならば (意味は $\displaystyle\sum_n |a_n|$ が収束すること)、$\displaystyle\sum_n a_n$ も収束する。

> **命題 O.4 (超重要 — 優収束定理)** すべての n について $|a_n| \leq b_n$ であり、$\displaystyle\sum_n b_n$ が収束するならば $\displaystyle\sum_n a_n$ 絶対収束する。(一つ上の命題とあわせると、$\displaystyle\sum_n a_n$ も収束することが分かる。)

> **命題 O.5 (超重要)** α を正の数とするとき、
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{収束} & (\alpha > 1) \\ \text{発散} & (\alpha \leq 1). \end{cases}$$
>
> 覚え方: 境目の $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散し、それより指数の大きなもの、例えば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する。

(4) $a_n = \dfrac{n^2}{\pi^n}$ とおくと、$n \to \infty$ のとき

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{\pi^{n+1}} \frac{n^2}{\pi^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{\pi} \to \frac{1}{\pi} < 1$$

であるから、$\sum a_n$ は絶対収束するので、収束する。

命題 O.6 (d'Alembert の判定法 (ratio test)) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=r$ が存在するとき、$\displaystyle\sum_n a_n$ は

$$
\begin{aligned}
r<1 &\implies \text{絶対収束 (ゆえに収束)}\\
r>1 &\implies \text{発散.}
\end{aligned}
$$

$r=1$ のときは収束も発散もありうる (別のやり方で調べないと分からない)。

(これは実は等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ と比較することで証明する。等比級数が収束するための必要十分条件は $|r|<1$ で、和は $\dfrac{1}{1-r}$ だった。)

(5) $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ とおくと、$n\to\infty$ のとき

$$|a_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

は単調減少して 0 に収束する。また a_n は交互に符号を変えるので、$\sum a_n$ は収束する。

命題 O.7 (絶対値が単調減少して 0 に収束する交代級数は収束する (Leibniz)) a_n が交互に符号を変え、

$$|a_1|\geq|a_2|\geq|a_3|\geq\cdots\to 0\quad(n\to\infty)$$

が成り立つとき、$\displaystyle\sum_n a_n$ は収束する。

2 (これは授業中に例題として出したもので、「またか」と思われるかもしれないが、要点が凝縮された「教師にはありがたい」問題である。)

(1) (ちょっと難しい) 問題の級数の収束発散は、x で割ってできる級数

(♯)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(x^2\right)^n$$

の収束発散と一致するから、この級数の収束半径を求めればよい。

であることを背景に、まず

(♯♯)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}y^2$$

の収束半径 R' を求めてみよう。これには

$$a_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

とおいて、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)+1}\frac{2n+1}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{2}{2}=1=\frac{1}{R'}$$

であることから、$R' = 1$. つまり

$$|y| < 1 \quad \Longrightarrow \quad (\sharp\sharp) \text{ は収束}, \quad |y| > 1 \quad \Longrightarrow \quad (\sharp\sharp) \text{ は発散}.$$

もちろん $|x| < 1 \Leftrightarrow |y| < 1$, $|x| > 1 \Leftrightarrow |y| > 1$ であるから、

$$|x| < 1 \quad \Longrightarrow \quad (\sharp) \text{ は収束}, \quad |x| > 1 \quad \Longrightarrow \quad (\sharp) \text{ は発散}.$$

ゆえに $R = 1$.

(2) ベキ級数は収束円の内部 ($|x| < R = 1$) で項別微分できるから、

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n.$$

これは公比 $-x^2$ の等比級数であるが、$|x| < 1$ より $|-x^2| < 1$ であるから、収束し、その和は

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(3) 級数による定義式に代入して容易に $f(0) = 0$ が分かるので、

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = 0 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\operatorname{Arctan} x]_0^x = \operatorname{Arctan} x.$$

(4) $f(x) = \operatorname{Arctan} x$ は $x = 1$ で連続だから、

$$\lim_{x \to R-o} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}. \blacksquare$$

3 (準備中 — 時間切れとも言う)

(1) $\dfrac{dy}{dx} = xy$ から

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx.$$

これから

$$\log|y| = \frac{x^2}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

ゆえに

$$|y| = \exp\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = e^C \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

これから

$$y = \pm e^C \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) = C' \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad (C' \text{ は任意定数})$$

(2) 定数変化法を用いる。$y = C(x)e^{x^2/2}$ とおくと、

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{x^2/2} + C(x) \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^{x^2/2} = xC(x)e^{x^2/2} + C'(x)e^{x^2/2} = xy + C'(x)e^{x^2/2}.$$

ゆえに

$$C'(x)e^{x^2/2} = x.$$

これから

$$C'(x) = xe^{-x^2/2}.$$

積分して

$$C(x) = \int xe^{-x^2/2}dx = -e^{-x^2/2} + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}).$$

ゆえに

$$y = C(x)e^{x^2/2} = \left(-e^{-x^2/2} + C_1\right) e^{x^2/2} = -1 + C_1 e^{x^2/2}.$$

4

(1) 特性方程式は $\lambda^2+2\lambda-3=0$ なので特性根は $\lambda=1,-3$. ゆえに (a) の一般解は $y=Ae^x+Be^{-3x}$ (A, B は任意定数).

(2) $y(0)=1$ より $A+B=1$, $y'(0)=2$ より $A-3B=2$ であるから、$A=5/4$, $B=-1/4$. ゆえに $y=\dfrac{1}{4}e^x-\dfrac{5}{4}e^{-3x}$. これから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\infty$.

(3) 右辺の e^x の指数部の係数 1 は特性根 (でも重根ではない) であるので (講義中の記号で $n=0$, $\alpha=1$, $m=1$ で)、$u=px^me^{\alpha x}=pxe^x$ とおくと、

$$u''+2u'-3u=4pe^x.$$

これが e^x に等しくなるには $4p=1$. つまり $p=1/4$. ゆえに $u=\dfrac{1}{4}xe^x$ が特解となる。ゆえに (b) の一般解は

$$y=Ae^x+Be^{-3x}+\frac{1}{4}xe^x \quad (A,\,B \text{ は任意定数}).\blacksquare$$

$f(x)$ が簡単な場合の $y''+py'+qy=f(x)$ の特解の発見法は、授業中に紹介したが、教科書には書いていないので、念のため再録すると

1. $f(x)=n$ 次多項式 $\times e^{\alpha x}$ で、α が特性方程式の m 重根 ($m\geq 0$) の場合は

$$u(x)=(n \text{ 次多項式})\times x^me^{\alpha x}$$

とおいて、$L[u]=0$ が成り立つように多項式の係数を定めればよい。

2. $f(x)=(n$ 次多項式$)\times e^{ax}\times\left\{\begin{array}{c}\cos bx\\ \sin bx\end{array}\right\}$ で、$a+ib$ が特性方程式の m 重根 ($m\geq 0$) の場合は

$$u(x)=n \text{ 次多項式}\times x^me^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$$

とおけばよい。

O.2 2003 年度基礎数学 IV 期末試験

(注意: この年度の基礎数学 IV は、級数と微分方程式が半分ずつであった。)

O.2.1 問題

ノート等持込み禁止。最終的な結果だけでなく、途中の経過や考え方も書くこと。解答用紙のみ提出。

1 次の各級数の収束・発散を調べよ (判断の理由も簡単に述べよ)。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{n^2}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$

2　ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ の収束半径を R とし、$|x|<R$ なる x に対して、

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$$

とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) R の値を求めよ。(2) $f'(x)$ をなるべく簡単な式で表わせ。(3) $f(x)$ をなるべく簡単な式で表わせ。(4) $\displaystyle\lim_{x\to -R+0} f(x)$ を求めよ。

(以下 y', y'' はそれぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表わすとする。)

3　(1) 微分方程式 $y'=-\dfrac{1}{x}y$ の一般解を求めよ。(2) 微分方程式 $y'=-\dfrac{1}{x}y+e^x$ の一般解と、$x=1$ のとき $y=0$ となる解を求めよ。

4　微分方程式

(a)
$$y''+y'+y=0,$$

(b)
$$y''+y'+y=1+x$$

について以下の問に答えよ。

(1) (a) の一般解を求めよ。$x\to\infty$ のとき y はどうなるか答えよ。(2) (a) の解で $y(0)=1$, $y'(0)=1$ を満たすものを求めよ。(3) (b) の一般解を求めよ。

O.2.2　解答

解答 1　(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=1$ であり、一般項が 0 に収束しないので、この級数は発散する。
(2) $a_n=\dfrac{n^4}{3^n}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\dfrac{n^4}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\frac{1}{3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

この極限は 1 より小さいので、級数 $\sum a_n$ は収束する。
(3) $\left|\dfrac{1+\sin n}{n^2}\right|\leq\dfrac{1+1}{n^2}=\dfrac{2}{n^2}$ で、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ は収束するから、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{n^2}$ も収束する。
(4) $0<\dfrac{1}{n}\leq 1$ で、$\dfrac{1}{n}$ は n について単調減少である。また $y=\sin x$ は $0\leq x\leq 1$ の範囲で単調増加だから、$\sin\dfrac{1}{n}$ は単調減少である。さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0$ である。また $0<\sin\dfrac{1}{n}$ であるから、与えられた級数は交代級数である。ゆえに級数は収束する。
(要点は (i) 交代級数, (ii) 絶対値である $\sin\dfrac{1}{n}$ は単調減少, (iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0$ という 3 つの条件が成り立つということである。なお、この級数は絶対収束しない。)

解説　「収束」とか「発散」だけでは点はあげられません (それじゃ丁半博打でしょう)。ある意味で一番難しい問題だと思いますが、結構点をかせいでいる人がいました (0 点は少数派でした — 0 点は反省すべきらしい)。なお (2), (3) は絶対収束しますが、(4) は (収束はしますが) 絶対収束しません。

解答 2　(1) x^n の係数を a_n とおく: $a_n = \dfrac{1}{n}$. すると

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1.$$

これが $1/R$ に等しいので、$R = 1$.
(2) ベキ級数は収束円の内部 ($|x| < R = 1$) で項別微分できるので、

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

これは初項 1, 公比 x の等比級数で、$|$ 公比 $| = |x| < 1$ なので収束し、

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

(3) $f(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}0^n = 0$ であるから、

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = 0 + \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\int_0^x \frac{1}{t-1}\,dt = -\log|x-1| = -\log(1-x).$$

(4)

$$\lim_{x\to -R+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0}(-\log(1-x)) = -\log[1-(-1)] = -\log 2.$$

解説　(1) で a_n に x を含めた人がちらほら。混同しないように。ベキ級数の場合は係数を a_n とおきます。
(2) はまあまあの出来でした (出来なかった人は要反省)。
(3) もまあまあでしたが、

$$\int\frac{1}{1-t}\,dt = \log|1-t| \quad (\textbf{これは間違いです！！})$$

と符号を間違えた人が多かった。これは不注意と言うよりも、心得が悪い可能性が高く、同じことを何度もやってしまいそうです。さぼらずに

$$\int\frac{1}{1-t}\,dt = -\int\frac{1}{t-1}\,dt = -\log|t-1|$$

としましょう。

解答 3　(1) $\displaystyle\int\frac{dy}{y} = \int\frac{-1}{x}dx$ より $\log|y| = -\log|x| + \log C = \log\dfrac{C}{|x|}$ (ただし C は積分定数). ゆえに $|y| = \dfrac{C}{|x|}$. 絶対値を外して、

$$y = \frac{\pm C}{x} = \frac{C'}{x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

(2) $y = \dfrac{c(x)}{x}$ とおくと、

$$y' = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2} = -\frac{y}{x} + \frac{c'(x)}{x}.$$

ゆえに y は微分方程式 $y = -\dfrac{y}{x} + e^x$ の解になるための条件は

$$\frac{c'(x)}{x} = e^x.$$

これから $c'(x) = xe^x$ なので、

$$c(x) = \int xe^x\,dx = xe^x - \int (x)' \cdot e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

ゆえに

$$y = \frac{c(x)}{x} = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}.$$

$x = 1$ のとき $y = 0$ となる解を求めるために、代入すると

$$0 = 1 - \frac{1}{1} + \frac{C}{1} = 1 - 1 + C = C \quad \therefore \quad C = 0.$$

ゆえに $y = e^x - \dfrac{e^x}{x}$.

解説　(1) $\log|y| = -\log|x| + C$ から、

$$|y| = e^{-\log|x|+C} = e^C e^{-\log|x|} = C' e^{-\log|x|}$$

として、最後まで $e^{-\log|x|}$ の形のままという人がいました。指数関数と対数関数の関係が身についていないのは困ります。例え話をすると、$(a\sqrt{x})^2$ を a^2x と簡単化しないで最後まで $(a\sqrt{x})^2$ と書くようなもので、かなり間が抜けています。
(2) 定数変化法は重要なのでギブアップしないこと。

解答 4　(1) 特性方程式は $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ なので、特性根は

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

これから微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{-x/2} \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + Be^{-x/2} \sin\frac{\sqrt{3}x}{2} \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

cos, sin は絶対値が 1 以下で、$e^{-x/2} \to 0\ (x \to \infty)$ であるから、

$$\lim_{x\to\infty} y = 0.$$

(2) $y(0) = 1$ より $1 = A \cdot 1 \cdot 1 + B \cdot 1 \cdot 0 = A$. また

$$y' = e^{-x/2} \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} \left(-\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2} \right) + e^{-x/2} \sin\frac{\sqrt{3}x}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}A}{2} - \frac{B}{2} \right)$$

であるから、$y'(0)=1$ より

$$1 = 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{A}{2}+\frac{\sqrt{3}B}{2}\right)+1\cdot 0 = -\frac{A}{2}+\frac{\sqrt{3}B}{2}.$$

既に分かっている $A=1$ を代入して $B=\sqrt{3}$. ゆえに

$$y = e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\sqrt{3}e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

(3) 0 は特性根でないので、$u=px+q$ (p, q は定数) の形の特解があるはずである。

$$u'=p,\quad u''=0$$

であるから、

$$u''+u'+u = 0+p+(px+q) = px+(p+q).$$

これが $x+1$ に等しいためには $p=1$, $p+q=1$. ゆえに $p=1$, $q=0$. ゆえに $u=x$. よって求める一般解は

$$y = Ae^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+Be^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}+x\quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

解説　(1) 2 次方程式が解けない人がいました (困ったね)。一般解を

$$y = Ae^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x}+Be^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}x}$$

と書いた人が多かった。間違いではないし、特に減点はしなかったけれど、cos, sin を使って書けるようにしておいて欲しい (オイラーの公式に慣れていないのか…来年は練習問題を用意しなくちゃな)。多分 cos, sin で書かないと lim は分からないでしょう (lim を求める部分の配点は低くしました)。
(2) 虚数の指数関数のままで計算した人が多く、その場合計算は大変だけれど出来はまあまあでした (こういうのは出来るのか…)。
(3) 特解が求められて、それと (1) の一般解が和になることが分かっている人には、たとえ (1) の解が間違っていても (3) の部分に点をつけました (このあたりのところは出来ている人が多くて良かった)。

O.3　2007 年度「微分方程式」参考問題

　この講義には過去問が存在しない (桂田がこの授業を持つのは初めてだから) ので、期末試験にどういう問題を出すか、参考となる問題一式を以下に示す。**1** は変数分離形微分方程式、**2** は 1 階線形微分方程式、**3** は同次形微分方程式 (このように変数変換が必要な場合、どういう変数変換をするか問題文中で与える)、**4** は定数係数 2 階線形微分方程式である。もちろん中間点もつける。例えば **4** は、対応する同次微分方程式 (つまり $y''+2y'-15y=0$, $y''+6y'+9y=0$, $y''-4y'+13y=0$) の一般解を求めておけば、少なくとも半分の得点を与える。

1.　微分方程式 $x(x-1)\dfrac{dy}{dx}=y$ について以下の問に答えよ。

(1) 一般解を求めよ。(2) $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $y=1$ となる解を求めよ。

1 の解答　(1) 与えられた微分方程式から $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x(x-1)}$ であるから、

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx.$$

ゆえに

$$\log|y| = \log|x-1| - \log|x| + \log C = \log C\left|\frac{x-1}{x}\right| \quad (\log C \text{ は積分定数}).$$

これから

$$y = \pm C\frac{x-1}{x}.$$

$\pm C$ を C' とおいて、$y = C'\dfrac{x-1}{x}$ (C' は任意定数).

(2) $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$ を代入すると

$$1 = C'\frac{1/2-1}{1/2} = -C'.$$

これから $C' = -1$. ゆえに $y = (-1)\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1-x}{x}$. ■

2.　(1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y$ の一般解を求めよ。(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y + (x-2)e^x$ の一般解を求めよ。

2 の解答　(1) 変数分離形としても解けます: $\dfrac{dy}{y} = dx$ より $\log|y| = x + C$ (C は積分定数) なので $|y| = e^{x+C} = e^C e^x$. これから $y = \pm e^C e^x = C'x$ ($\pm e^C$ を C' と置いた). あるいは一階線形微分方程式 $y' = a(x)y$ と考えて、解の公式 $y = Ce^{A(x)}$, $A(x) := \displaystyle\int a(x)dx$ を使ってもよい。また定数係数 1 階線形常微分方程式としても解けます (特性根は 1 なので、$y = Ce^{1x} = Ce^x$ が一般解)。

(2) 定数変化法を用います。$y = C(x)e^x$ とおくと、

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^x + C(x)e^x = C'(x)e^x + y$$

なので、y が微分方程式の解であるためには、$C'(x)e^x = (x-2)e^x$ であればよい。これから $C'(x) = x-2$. ゆえに $C(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + D$ (D は任意定数). ゆえに $y = \left(\dfrac{x^2}{2} - 2x + D\right)e^x$.

3.　微分方程式

$$(☆) \qquad (x+y)\frac{dy}{dx} = y$$

について以下の問に答えよ。

(1) $u = \dfrac{y}{x}$ とおくとき、u の満たす微分方程式を求めよ。(2) 微分方程式 (☆) の一般解を求めよ。

解答　(1) まず $(x+y)\dfrac{dy}{dx} = y$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y} = \frac{y/x}{1+y/x}.$$

一方 $u=\dfrac{y}{x}$ より $y=xu$. ゆえに $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$. これを上の式に代入して

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1+u}.$$

移項して

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1+u}-u=\frac{u-u(1+u)}{1+u}=\frac{-u^2}{1+u}.$$

整理して

$$\frac{du}{dx}=\frac{-u^2}{x(1+u)}.$$

(2) 微分方程式から $\dfrac{dx}{x}=-\dfrac{u+1}{u^2}du$ であるから、

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{u+1}{u^2}du=-\int\left(\frac{1}{u}+u^{-2}\right)du=\frac{1}{u}-\log|u|=\log\frac{e^{1/u}}{|u|}.$$

左辺は $\log|x|+\log C=\log C|x|$ ($\log C$ は積分定数) と変形できるので、

$$C|x|=\frac{e^{1/u}}{|u|}\quad すなわち\quad Cx=\frac{e^{1/u}}{u}.$$

$u=x/y$ を代入して $Cx=\dfrac{e^{x/y}}{y/x}$. $Cy=e^{x/y}$. ■

4. 次の各微分方程式の一般解を求めよ。
(1) $y''+2y'-15y=x+1$ (2) $y''+6y'+9y=e^x$ (3) $y''+9y=\sin 3x$

解答 (1) まず対応する同次方程式 $z''+2z'-15z=0$ の一般解を求めよう。特性方程式は $\lambda^2+2\lambda-15=0$ で、特性根は $\lambda=-5,3$. ゆえに一般解は $z=C_1e^{-5x}+C_2e^{3x}$. 特解を求めるため、$u=ax+b$ (a, b は定数) とおくと、

$$u''+2u'-15u=0+2\cdot a-15(ax+b)=-15ax+(2a-15b).$$

これが $x+1$ と等しくなるには、$-15a=1$ かつ $2a-15b=1$ で、$a=-\dfrac{1}{15}$, $b=-\frac{17}{225}$. ゆえに $u=-\dfrac{x}{15}-\dfrac{17}{225}$. ゆえに求める一般解は

$$y=z+u=C_1e^{-5x}+C_2e^{3x}-\frac{x}{15}-\frac{17}{225}.$$

(2) まず対応する同次方程式 $z''+6z'+9z=0$ の一般解を求めよう。特性方程式は $\lambda^2+6\lambda+9=0$ で、特性根は $\lambda=-3$ (重根). ゆえに一般解は $z=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$. 特解を求めるため、$u=ae^x$ (a は定数) とおくと、

$$u''+6u'+9u=(a+6a+9a)e^x=16ae^x.$$

これが e^x と等しくなるには、$16a=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{16}$. ゆえに $u=\dfrac{e^x}{16}$. ゆえに求める一般解は

$$y=z+u=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}+\frac{1}{16}e^x.$$

(3) まず同次方程式 $z''+9z=0$ の一般解は $z=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ (C_1, C_2 は任意定数). $u=x(a\cos 3x+b\sin 3x)$ とおくと、

$$u''+9u=6b\cos 3x-6a\sin 3x.$$

これが $\sin 3x$ に等しいためには、$b=0$, $a=-\dfrac{1}{6}$. すなわち $u=-\dfrac{x}{6}\cos 3x$. ゆえに

$$y=z+u=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-\frac{x}{6}\cos 3x.$$

5. (一つくらいは蓋をあけてのお楽しみ。)

何か 1 問くらいは同じ問題が出ると期待したりしないように。
同じような問題を出すけれど、同じにはしません。

O.4 2007 年度「微分方程式」期末試験

O.4.1 問題

1.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = xy(y+1)$ の一般解を求めよ。また、$x=0$ のとき $y=1$ となる解を求めよ。

(2) $y' = x(y^2+1)$ の一般解を求めよ。$x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ のとき $y=1$ となる解を求めよ。

2.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2+1}y$ の一般解を求めよ。

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2+1}y + 1$ の一般解を求めよ。

3. 微分方程式

$$(☆) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)$$

について以下の問に答えよ。

(1) y が (☆) の解であるとき、$u = \dfrac{y}{x}$ とおくと、u はどのような微分方程式を満たすか。

(2) 微分方程式 (☆) の一般解を求めよ。

4. 次の各微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - 8y = x + 1$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = e^{2x}$

5. 微分方程式の初期値問題

$$x''(t) + x(t) = \sin\omega t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

について以下の問に答えよ (ただし ω は正定数とする)。

(1) $\omega \neq 1$ のとき、解を求めよ。

(2) $\omega = 1$ のとき、解を求めよ。

(3) (1) で得た解は、$\omega \to 1$ とするとき、(2) で得た解に収束することを確めよ。

O.4.2　解答

1 解答

(1) $\displaystyle\int \frac{dy}{y(y+1)} = \int x\,dx$ となるが、

$$\text{左辺} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \log\left|\frac{y}{y+1}\right|, \quad \text{右辺} = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \quad (C\ \text{は積分定数}).$$

これから

$$\frac{y}{y+1} = \pm e^C e^{x^2/2} = C' e^{x^2/2} \quad (C'\ \text{は任意定数}).$$

ゆえに

$$y = \frac{C' e^{x^2/2}}{1 - C' e^{x^2/2}}.$$

$x = 0$ のとき $y = 1$ ならば $1 = \dfrac{C'}{1 - C'}$. これから $C' = \dfrac{1}{2}$. このとき

$$y = \frac{e^{x^2/2}}{2 - e^{x^2/2}}.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2+1} = \int x\,dx$ から $\tan^{-1} y = \dfrac{x^2}{2} + C$. これから $y = \tan\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$. $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ のとき $y = 1$ ならば、$1 = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + C\right)$. これから $C = n\pi$ (n は整数). このとき $y = \tan\dfrac{x^2}{2}$.

2 解答

(1) $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+1}dx$ より、$\log|y| = \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + \log C = \log C\sqrt{x^2+1}$. これから $y = \pm C\sqrt{x^2+1} = C'\sqrt{x^2+1}$.

(2) 定数変化法を用いる。$y = C(x)\sqrt{x^2+1}$ とおくと、

$$y' = C'(x)\sqrt{x^2+1} + C(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot(2x)\cdot(x^2+1)^{-1/2} = C'(x)\sqrt{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}y.$$

ゆえに y が与えられた微分方程式の解であるには、

$$C'(x)\sqrt{x^2+1} = 1.$$

これから

$$C'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

ゆえに

$$C(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + \widetilde{C} \quad (\widetilde{C}\ \text{は積分定数}).$$

ゆえに

$$y = \sqrt{x^2+1}\log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + \widetilde{C}\sqrt{x^2+1}.\blacksquare$$

3 解答

(1) $u = \dfrac{y}{x}$ より $y = xu$. ゆえに $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$. これを微分方程式の左辺に代入して

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = \frac{u^2+1}{2u}.$$

移項して

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2+1}{2u} - u = \frac{u^2+1-2u^2}{2u} = \frac{1-u^2}{2u}.$$

整理して

$$\frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2xu}.$$

(2) 微分方程式から $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{2u}{u^2-1}du$ であるから、

$$\int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{u}{u^2-1}du = -\int\left(\frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1}\right)du = -\log|(u+1)(u-1)| = \log\frac{1}{|u^2-1|}.$$

左辺は $\log|x| + \log C = \log C|x|$ ($\log C$ は積分定数) と変形できるので、

$$C|x| = \frac{1}{|u^2-1|} \quad \text{すなわち} \quad u^2 - 1 = \frac{C'}{x} \quad \text{すなわち} \quad u = \sqrt{1 + \frac{C'}{x}}.$$

$$y = xu = x\sqrt{1 + \frac{C'}{x}}.$$

(この結果は検算ずみ。)

4 解答

(1) $z'' + 2z' - 8z = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$ の根は $\lambda = 2, -4$. ゆえに一般解は $z = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x}$ (C_1, C_2 は任意定数). $u'' + 2u' - 8u = x + 1$ の特解を求めるため、$u = ax + b$ (a, b は定数) とおくと、

$$u'' + 2u' - 8u = 0 + 2\cdot a - 8(ax+b) = -8ax + (2a - 8b).$$

これが $x+1$ に等しくなるには、$-8a = 1$, $2a - 8b = 1$. すなわち $a = -\dfrac{1}{8}$, $b = -\dfrac{5}{32}$. ゆえに $u = -\dfrac{x}{8} - \dfrac{5}{32}$. 求める一般解は $y = z + u = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x} - \dfrac{x}{8} - \dfrac{5}{32}$.

(2) $z'' + 2z' + z = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ の根は $\lambda = -1$ (重根). ゆえに一般解は $z = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$ (C_1, C_2 は任意定数). $u'' + 2u' + u = e^{2x}$ の特解を求めるため、$u = ae^{2x}$ (a は定数) とおくと、

$$u'' + 2u' + u = (4a + 2\cdot 2a + a)e^{2x} = 9ae^{2x}.$$

これが e^{2x} に等しくなるには、$9a = 1$. すなわち $a = \dfrac{1}{9}$. ゆえに $u = \dfrac{e^{2x}}{9}$. 求める一般解は $y = z + u = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \dfrac{e^{2x}}{9}$.

5 解答

対応する同次方程式 $z''(t)+z(t)=0$ の一般解は $z(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$ (C_1, C_2 は任意定数) である。非同次方程式の特解 $u(t)$ (つまり $u''(t)+u(t)=\sin\omega t$ を満たす u) を求めれば、$z(t)+u(t)$ が一般解となる。

特解をどうやってもとめるかが問題である。§6.3 (p. 35) で説明したことを用いる。

(1) $u(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ とおくと、$u''(t)=-\omega^2 u(t)$. ゆえに

$$u''(t)+u(t)=(1-\omega^2)u(t)=(1-\omega^2)(A\cos\omega t+B\sin\omega t).$$

これが $\sin\omega t$ と一致するには、$A=0$, $(1-\omega^2)B=1$. ゆえに $u(t)=\dfrac{\sin\omega t}{1-\omega^2}$. ゆえに一般解は

$$x(t)=z(t)+u(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{\sin\omega t}{1-\omega^2}.$$

$x(0)=1$, $x'(0)=0$ を満たすように C_1, C_2 を定めると $C_1=1$, $C_2=-\dfrac{\omega}{1-\omega^2}$.

$$x(t)=\cos t-\frac{\omega}{1-\omega^2}\sin t+\frac{\sin\omega t}{1-\omega^2}.$$

(2) $u(t)=t(A\cos t+B\sin t)$ とおくと、

$$u'(t)=A\cos t+B\sin t+t(-A\sin t+B\cos t),\quad u''(t)=-2A\sin t+2B\cos t+t(-A\cos t-B\sin t).$$

ゆえに $u''(t)+u(t)=-2A\sin t+2B\cos t$. これが $\sin t$ に等しくなるためには、$-2A=1$, $B=0$. すなわち $A=-\dfrac{1}{2}$, $B=0$. これから $u(t)=-\dfrac{t}{2}\cos t$. ゆえに

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{t}{2}\cos t.$$

$x(0)=1$, $x'(0)=0$ を満たすように C_1, C_2 を定めると $C_1=1$, $C_2=\dfrac{1}{2}$. ゆえに

$$x(t)=\cos t+\frac{1}{2}\sin t-\frac{t}{2}\cos t.$$

(3) ロピタルの定理を使うと

$$\lim_{\omega\to1}\frac{\sin\omega t-\omega\sin t}{1-\omega^2}=\lim_{\omega\to1}\frac{t\cos\omega t-\sin t}{-2\omega}=-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\sin t$$

であるから、

$$\lim_{\omega\to1}\left(\cos t-\frac{\omega}{1-\omega^2}\sin t+\frac{\sin\omega t}{1-\omega^2}\right)=\cos t+\frac{1}{2}\sin t-\frac{t}{2}\cos t.$$

この問題は、物理では「強制振動」と呼ばれて良く取り上げられますが、(1) に相当する計算を詳しい説明抜きに示してあるだけのことが多いようです (解は求まるんだし、文句言うなよ、ということかな)。せっかく勉強したのだから、きちんとやってみよう、という問題です (数学の本に載っていることはあまりないみたい)。

講評

信じられないことだが、

$$\int x\,dx = \log x$$

とした人が少なくなかった (もちろん $\dfrac{x^2}{2} + C$ とすべき)。それ以外にも、1 次方程式を解けない人 (同じような問題を連続して解き間違える)、2 次方程式を解き間違う人、指数関数が微分できない人、対数関数の処理を間違える人 (極めつけは $\log A + \log B = \log(A + B)$, $\log A - \log B = \dfrac{\log A}{\log B}$, ...) …高校までに学んだ数学をおろそかにしていると、大学の数学でまともな成績を取ることはかなり難しいので (≒ 数学的議論をすることが難しい)、真剣に高校数学の復習をするべきである。

それから

$$\int \frac{du}{1-u} = \log|1-u| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

とした人が多かったのだが、正しくは

$$\int \frac{du}{1-u} = -\int \frac{du}{u-1} = -\log|u-1| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であり、符号が異なり、まったくの別物であることに注意。これは他がしっかりしている人も結構間違えていた。

指数・対数に弱い人が多いが、そのままでは、自然現象の数理的な取り扱いに非常な困難を覚えることになる (私は数学屋で理科詳しくないけれど、身近なところでも、音や光の強さ、気圧の高度変化、地震の強さ、pH, …色々ある)。文部科学省の方針で、高校までの理科と数学はなるべく独立に勉強できるようになっていて、理科では数学を極力使わず、数学でも理科の話題は出さないことになっているのだが、その乏しい経験から、両者が関係ないと勘違いしたりしないように。まあ、数学以外の分野で、すべての人が数学に堪能である必要はなくて、少数の人間が数学を使いこなして、他の大部分の人達に「これはこうすれば OK」とやり方だけ伝えれば何とかなる、ということはあるかもしれない。そういう意味で処世術としては「(自分に) 数学は必要ない」というのは本当かもしれない。しかし「なぜ？」を突き詰めると数学は避けて通れない。

1. (1) $\dfrac{y}{y+1} = Ce^{x^2/2}$ とか、$y = Ce^{x^2/2}(y+1)$ のような答案が結構あった。1 次方程式くらい解こう。

(2) $y = \tan\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$ で、$x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ のとき $y = 1$ となることから、$\tan(\dfrac{\pi}{4} + C) = 1$ が導かれるが、この解は

$$C = n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

である。これが全然解けなかったり、$C = 2n\pi$ (n は整数) としたり (tan は周期 π の周期関数であることを思い出そう)、$C = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) としたり、ちょっと情けない。今の場合、n がなんであっても、$y = \tan\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$ は同じになってしまうので、$y = \tan\dfrac{x^2}{2}$ を解とすればよい。

2. (1) はまあまあの出来。(2) 「$y = C(x)\sqrt{x^2+1}$ とおく」が書けない人が。$C'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ まで出来たが、後は実に様々な迷計算をしてくれる人が多かった。この授業の最初に時間を取って、積分計算を復習したのに…分からないことを責める気はないが、間違ったことを書く態度は猛省をうながしたい。

3. (1) u に関する微分方程式が導けた人は多かったが、余計なことまで書いてあったり、逆に (2) の中に紛れ込んでしまったり、問の答え方としては変な答案がかなり多かった。

4. (1) で e^{2x}, e^{-4x} が出て来るのが分かったとして、結果を $y = e^{2x} + e^{-4x} - \frac{1}{8}x - \frac{5}{32}$ とした人が何人かいた。もちろん正しくは、$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{8}x - \frac{5}{32}$ (C_1, C_2 は任意定数) である。C_1, C_2 を両方とも 1 とする理由なんかない。

5. この問題は良い問題であると信じている。テキストを改訂する機会があれば例題または演習問題に含めるであろう。変数が x でなく t になっていることに惑わされている人がちらほらいた (うーん…)。ともあれ、非同次方程式の特解を求めることが出来た人は多く、ほっとしました。なぜか初期値問題の解を求められなかった人が多いのは時間切れかなぁ…

P　参考文献案内

言葉の正しい意味での数学の教養書として、(少し古いけれども) 遠山 [32] は広く勧めたい読み物である (レベル的には高校上級〜大学生というところ？)。微分方程式についてもかなりの紙幅を費やしている。微分方程式を用いる意味の「古典的」説明を余すところ無くしていて、微分方程式入門としても勧められる本であると思う (この本はもっときちんと紹介したいな…この文章推敲しないと)。

神保 [24] は入門書であるにも係わらず、類書に見られない記述が多い。常微分方程式のみならず偏微分方程式も扱っている。数学者としての所感は楽しくもあり、初学者をはっと悟らせてくれるくれるところがあると信じる。大学初年級の物理に現われる重要な方程式をきちんと解説している。入門的な話もかなり技術的に面白い取り扱いが多く、正直かなり勉強させられた。さらに数学者の書いた本には珍しくラプラス変換をきちんと紹介してある。

高桑 [28] は、初学者が出会う可能性のある重要な微分方程式について、一通りの解説がしてある。最近、色々な意味で物理離れが進んでいるため、こういう本は貴重な存在になりつつあると感じる。

高橋 [23] は、色々なことが書いてあって有用で面白いし、読める人には良い本だと思うが、率直に言って、曖昧な記述も多く、また行間が空いていて (しかも、著者自身が行間をちゃんと埋めていないのでは？と思われるところもあって) 初学者に勧めて良いかどうか迷ってしまう[46]。ある程度の腕力を身につけてから読むべき本だと思う。

…と思っていたら、高橋 [35] が出た。これは最初、岩波講座として書かれたものであるが、単行本化されて入手が容易になった。これはずっと読み易く、お勧め。

P.1　1 年生にむけて

P.1.1　参考書

常微分方程式の本はたくさん出版されているが、内容は多岐に渡っていて、どれを選ぶべきかなかなか難しい。

まず読みやすく、内容も (力学系の説明をしたりしていて) 現代的で良いと思われる本として、石村 [22] (2001) をあげておく。授業の副読本として勧められる。

[46] 実は、筆者が大学で微分方程式を最初に学んだのは他ならぬ高橋先生の講義であった。何となく靄がかかった印象があって、何年か後にその授業の内容が (この本で) 出版されてから、雪辱戦と意気込んで読み始めたのだが、なかなか消化できなかった経験がある。

神保 [24] (1999) は内容はあくまで入門的でありながら、骨太の問題を複数取り上げ、格調の高ささえ感じられる、良い本である。正直に白状すると、常微分方程式のところに限っても、かなり勉強になった (読めば正統的な内容だと理解できるのだが、なぜか他の本にはあまり説明されていないことが書いてあった)。

もっと工学よりの参考書としては、マイベルク・ファヘンアウア [14] がある。豊富な例が載っているので、間違っても「微分方程式を学んで何の得があるのだろう」とは思わないと信じる。多くの図を含み、微分方程式の解の数値計算の話題にも言及した、内容豊かなテキストである。

この講義の内容はおおむね古くからある標準的なものである。内容を作るために参考にした文献の主なものをあげておくと、(古いものもあるが、数学の本の場合、古い = 遅れている、とはならないことに注意)、笠原 [25] (1982), 高橋 [23] (1988), 藤田 [36] (1991), ポントリャーギン [37] (1963), 保野 [38] (1993) などがある。

つい最近、最近の大学生の実情に合せた講義科目 (半年) 用のテキストとして、長崎・中村 [39] というのを見つけた。新しく作る教科書は質量内容ともにこれに近くなるのだろうか、と考えている (講義時間はこの 2/3 程度なので、もっと内容は小さくなる？)。

参考文献

[1] 大学数学教育研究会編：大学課程 微分積分学概説 [増補版], 共立出版株式会社 (1984).

[2] 一松信：微分積分学入門第二課, 近代科学社 (1990).

[3] Yosida, K.: *Functional analysis, sixth edition*, Springer (1980).

[4] 高野恭一：常微分方程式, 朝倉書店 (1994), 線形微分方程式のモノドロミー表現やフックス型微分方程式等、複素領域における微分方程式の話が載っているのが特徴.

[5] 桂田祐史：常微分方程式の初期値問題の解の延長, `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/continuation_of_solution.pdf` (2022/3/19).

[6] コディントン・レヴィンソン：常微分方程式論 上, 下, 吉岡書店 (1968, 1969).

[7] ミクシンスキー, Mikusiński, J.：演算子法 上, 裳華房 (1965), 松村 英之・松浦 重武 訳.

[8] ミクシンスキー, Mikusiński, J.：演算子法 下, 裳華房 (1967), 松浦 重武・笠原 晧司 訳.

[9] 吉田耕作：演算子法 一つの超函数論, 東京大学出版会 (1982).

[10] 森毅, 齋藤正彦, 野崎昭弘：数学ブックガイド 100, 培風館 (1984).

[11] 木村英紀(ひでのり)：Fourier-Laplace 解析, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1993).

[12] 森口繁一(しげいち), 宇田川銈久(うだがわかねひさ), 一松信：岩波 数学公式 II　級数・フーリエ解析, 岩波書店 (1957).

[13] 堤正義(つつみまさよし)：応用数学演習, サイエンス社 (1989).

[14] マイベクル／ファヘンアウア：工科系の数学 5　常微分方程式, サイエンス社 (1997).

[15] 矢野健太郎：大学演習 微分方程式, 裳華房 (1957).

[16] L. シュワルツ, Schwartz, L.：物理数学の方法, 岩波書店 (1966), 吉田耕作, 渡辺二郎 訳.

[17] Schwartz, L.: Transformation de Laplace des distributions, *Comm. Sém. Math.*, pp. 196–206 (1952), de l'Univ. de Lund, tome suppl. dédié à M. Riesz.

[18] L. シュワルツ (L.Schwartz)：超函数の理論, 岩波書店 (1971), 岩村 聯(つらね), 石垣 春夫, 鈴木 文夫 訳.

[19] 吉田耕作, 村松寿延, 折原明夫, 伊藤 清三著：関数解析と微分方程式, 現代数学演習叢書 4, 岩波書店 (1976), 吉田 耕作，伊藤 清三編.

[20] Titchmarsh, E. C.: The zeros of certain integral functions, *Proceedings London Mathematical Society*, Vol. **25**, pp. 283–302 (1926).

[21] Doss, D.: An Elementary Proof of Titchmarsh's Convolution Theorem, *Proceedings of the American Mathematical Society*, pp. 181–184 (1988).

[22] 石村直之：パワーアップ微分方程式, 共立出版 (2001).

[23] 高橋陽一郎：微分方程式入門, 東京大学出版会 (1988), 丸善 eBook にある。https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046850.

[24] 神保秀一：微分方程式概論, サイエンス社 (1999).

[25] 笠原晧司(こうじ)：微分方程式の基礎, 数理科学ライブラリー, 朝倉書店 (1982).

[26] E. T. ベル：数学をつくった人びと I, II, III, 早川書店 (2003/9/1, 2003/10/1, 2003/11/19), Eric Temple Bell, Men of Mathematics, The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré, Simon & Schuster (1937) の翻訳. 1963 年に東京図書から出版された 4 冊本の文庫化.

[27] 遠山啓, 矢野 健太郎編：100 人の数学者, 数学セミナー増刊, 日本評論社 (1971).

[28] 高桑昇一郎：微分方程式と変分法, 共立出版 (2003).

[29] ジョージ・ガモフ (GeorgeGamow)：重力の話, 河出書房新社 (1977), 伏見 康治 訳.

[30] チャンドラ・セカール：チャンドラ・セカールのプリンキピア講義, 講談社 (1998), 監訳 中村 誠太郎.

[31] V・I・アーノルド：数理解析のパイオニアたち, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1999).

[32] 遠山 啓(ひらく)：数学入門 (下), 岩波新書 G5, 岩波書店 (1960).

[33] 藤田宏：三訂版 応用数学, 放送大学出版協会 (2000), 第 7 章『発展系の数値解析』は https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/heat-fdm-0.pdf から入手できる。

[34] 小野寺嘉孝(おのでらよしたか)：コンピュータで学ぶ 物理のための 応用数学, 裳華房 (1991).

[35] 高橋陽一郎：力学と微分方程式, 岩波書店 (2020/1/10), 岩波講座 現代数学への入門「力学と微分方程式」(1996/05/29) の単行本化。 丸善 eBook にある。https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000007597.

[36] 藤田宏：現代解析入門, 前篇「現代解析入門」, 岩波書店 (1991), 後篇は吉田耕作著.

[37] ポントリャーギン (L. S.Pontryagin)：常微分方程式 [新版], 共立出版 (1963), 木村 俊房 校閲, 千葉 克裕 訳.

[38] 俣野博：常微分方程式入門 — 基礎から応用へ —, 岩波書店 (2003), 俣野 博, 微分方程式 II, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1993) の単行本化.　2015/6/10 にオンデマンドブックスとして復刊された.

[39] 長崎憲一, 中村正彰：明解 微分方程式, 培風館 (1997).