微分方程式入門　補足

桂田 祐史

2004 年 9 月 14 日

目次

基礎数学 IV の微分方程式部分のテキストを作るためのノートとして書き始めた『微分方程式入門』だが、そろそろまとめなので、付録部分を別冊にすることにした。

A　2003 年度基礎数学 IV のメモ

A.1　ガイダンス

2003 年度の基礎数学 IV の授業では以下のようなことをしゃべった。

A.1.1　今日からパート 2

基礎数学 IV では、ここまで級数の勉強をしてきましたが、今回から最後まで、微分方程式の勉強をします。級数と微分方程式はオーバーラップするところもありますが、この基礎数学 IV で学ぶ範囲に限定すると、完全に独立した話です。

A.1.2　勉強の仕方

ある意味で微分方程式の範囲は勉強がしやすい。今回の君達に求められているのは、優しい計算問題を解ける力をつけ、その過程で微分方程式に対する感覚を養うことです。問題集に載っている問題を解くことでトレーニングをする、という方法が十分通用します。身につけて欲しい概念というのがあるわけですが、それは問題を解けるようになってからで OK というか、解けるようになることで身につけられます。

微分方程式に限って言えば、プリントの問題をこなすのが良いでしょう。

A.2　基礎数学 IV の微分方程式のあらすじ (授業最後のまとめ)

落体の法則の方程式

$$y'' = -g \quad (g \text{ は正の定数})$$

のように $y'' = f(x)$ あるいは $y' = f(x)$ の場合には単純に積分することで解ける。この場合

$$y' = -gx + C \quad (C \text{ は積分定数}), \quad y = -\frac{g}{2}x^2 + Cx + C' \quad (C' \text{ は積分定数}).$$

変数分離形の方程式

$$y' = f(x)g(y)$$

は $f(x)$, $1/g(y)$ の原始関数 F, G を用いると

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \quad \therefore \quad G(y) = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \therefore \quad y = G^{-1}(F(x) + C)$$

という手順で解ける。この変数分離形に分類される方程式としては、

$$y' = ay \quad (\text{放射性元素の崩壊, マルサスの法則}),$$

$$y' = (a - by)y \quad (\text{ロジスティック方程式}),$$

(1) $$y' = a(x)y \quad (\textbf{1 階線型同次方程式})$$

などを扱った。最後の方程式を非同次に変えた

(2) $$y' = a(x)y + b(x) \quad (\textbf{1 階線型非同次方程式})$$

は変数分離形ではないが、**定数変化法**で解ける。

　さて、実は、最も簡単な定数係数1階線型常微分方程式 $y' = ay$ の一般化がこの講義の背後にひそむ遠大な（？）ストーリーである。ここまでで、「変数係数」にした $y' = a(x)y$ や、それを非同次にした $y' = a(x)y + b(x)$ が出現したが、次は 2 階の方程式に一般化する。

注意 A.1 (線型とは？) $L[y] = y' - a(x)y$ とおくと、

$$L[y+z] = L[y] + L[z], \quad L[ky] = kL[y]$$

が成り立つ。つまり L は**線型作用素**であるが、この理由で (2), (1) は線型 方程式と呼ばれている (次の (3), (4) も同様の理由[1]で線型方程式と呼ばれる)。大ざっぱに言って、未知関数 y についての 1 次方程式が線型方程式ということである。線型方程式については、**重ね合せの原理**が成立し、それが解法の大枠を支配する。 ■

　(定数係数のまま) 2 階にした

(3) $$y'' + py' + qy = 0$$

や、それを非同次にした

(4) $$y'' + py' + qy = f(x)$$

を考える (大学1年次の物理学に現れる、単振動の方程式、減衰振動の方程式、強制振動の方程式などがこの範疇に入る)。

　同次方程式 (3) は特性根の方法で解ける。つまり特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の2根を α, β とすれば

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ (A, B は任意定数) が一般解

(ii) $\alpha = \beta$ のとき $y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x}$ (A, B は任意定数) が一般解

ただし虚根の場合、(i) のままでは使いづらい。$\alpha, \beta = a \pm ib$ (a, $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$) として

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$$

という形の一般解が便利である。

　非同次方程式 (4) については、何らかの方法で特解 u を一つ見つければ、

$$y = u + z \quad (z \text{ は対応する同次方程式 } L[z] = 0 \text{ の一般解})$$

が一般解になる (これも重ね合せの原理)。特解の見つけ方には次のように色々な方法がある。

[1] $L[y] = y'' + py' + qy$ とおくと $L[y+z] = L[y] + L[z]$, $L[ky] = kL[y]$ が成り立つ。

(a) 擬多項式の方法

(b) 定数変化法

(c) 演算子法

(d) Laplace 変換の利用

(e) 微分作用素の因数分解を利用して一階ずつ基本解との畳み込みを用いて解く方法

来年に向けて

最初に

$$y'' = -g \quad (\text{落体の法則})$$

を持ってくるのはこのまま。次に

$$y' = ay \quad (\text{放射性元素の崩壊}),$$

$$y'' = -\omega^2 y \quad (\text{単振動の方程式})$$

を求積法で解いてみせよう。

やはり柱は線型方程式だが、そういう概念は最後に説明することにする。

まずは変数分離形。ここでの例はやはりロジスティック方程式。

1 階線型方程式。同次は変数分離形で、非同次は定数変化法で。

定数係数 2 階線型方程式。重ね合せの原理も最後にまとめることに。ただし $L[y]$ という記号はそっと導入して、線形性という前に $L[y+z] = L[y] + L[z]$ など見せておく。

もちろん同次方程式は特性根の方法を説明する。

非同次方程式はどうするのだろう…ラプラス変換の復活はむつかしそうだが、一般の場合に使える解法がなくなるのは問題だから、因数分解法を説明する。

ここまででかなりの時間を使ってしまい、残り 2 or 3 コマである。

最後は応用編にするか？単振動とか減衰振動とか強制振動とか。

ベクトル値関数の微分方程式は説明すべきかもしれない。それで解の一意性の証明をして、2 階線型方程式の解空間が 2 次元になることを証明してしまえば、理論的にはすっきりする。適切性の概念をぶつこともできそう。解はあるが、解けない方程式とか。

入らなかったもの。ラプラス変換、畳み込み。

『常微分方程式メモ』`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/members/ODE.pdf` も整理して、出来たところからこちらに移したい。

B　定数係数 2 階線型非同次方程式の特解の発見法

B.1　定数変化法

1 階線型非同次方程式のところで紹介した定数変化法 (の変種) で特解を求めることもできる。この方法はさらに大きく二つに分類できる。

(a) 連立 1 階方程式

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{F}(x)$$

に直して、公式[2]

$$\vec{y} = e^{xA}\vec{y}_0 + e^{xA}\int_{x_0}^{x} e^{-tA}\vec{F}(t)\,dt$$

を用いる。

この公式は定数変化法で簡単に導出できて「暗記要らず」であり、また理論的な考察には非常に便利だが、具体的な問題を解く場合には、計算は大げさと言うか非常に煩雑になりやすい。

(b) 直接 2 階方程式のままで扱う方法

同次方程式の解の基本系 y_1, y_2 を求めておいて、

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

とおいてみる。まず

$$y' = [c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2] + [c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'] .$$

このまま y'' を計算するとき、第 1 項の微分が煩雑になるので、

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \tag{5}$$

という条件を仮定してしまう (c_1, c_2 に条件として課す)。すると、

$$\begin{aligned} y' &= c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2', \\ y'' &= [c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'] + [c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2''] \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} L[y] &= y'' + py' + qy = c_1(x)L[y_1] + c_2(x)L[y_2] + [c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'] \\ &= c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'. \end{aligned}$$

ゆえに $L[y] = f(x)$ を満たすには、

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \tag{6}$$

でなければならない。

(5), (6) を連立方程式として解いて $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ を求め、積分して $c_1(x)$, $c_2(x)$ を求め、特解 $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ を得る。

例 B.1 (2 階方程式に対する定数変化法の例) $L[y] = y'' - 6y' + 8y = e^x$. まず同次方程式 $L[z] = 0$ の一般解は $z = Ae^{2x} + Be^{4x}$. そこで特解を

$$y = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{4x}$$

[2]既に見た定数係数 1 階線型非同次方程式の解の公式 (本文中にある) の一般化である。

とおいてみる。

$$y' = \left(c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{4x}\right) + \left(c_1(x)2e^{2x} + c_2(x)4e^{4x}\right)$$

であるが

$$c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{4x} = 0 \tag{7}$$

を仮定すると

$$y' = 2c_1(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{4x}.$$

これから

$$y'' = \left(2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}\right) + \left(4c_1(x)e^{2x} + 16c_2(x)e^{4x}\right).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} L[y] &= \left(2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}\right) + \left(4c_1(x)e^{2x} + 16c_2(x)e^{4x}\right) - 6\left(2c_1(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{4x}\right) \\ &\quad + \left(c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{4x}\right) \\ &= 2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}. \end{aligned}$$

これが e^x に等しければよいので、

$$2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x} = e^x. \tag{8}$$

(7), (8) をまとめて、

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ 2e^{2x} & 4e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}.$$

これを c_1', c_2' について解く。

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ 2e^{2x} & 4e^{4x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}e^{-x} \\ \dfrac{1}{2}e^{-3x} \end{pmatrix}.$$

これを満たす c_1, c_2 としては、例えば

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}e^{-x} \\ -\dfrac{1}{6}e^{-3x} \end{pmatrix}$$

とすれば良い。つまり特解として

$$u = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{4x} = \frac{1}{2}e^{-x}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{-3x}e^{4x} = \frac{1}{3}e^x$$

が得られる。これから $L[y] = e^x$ の一般解は

$$y = Ae^{2x} + Be^{4x} + \frac{1}{3}e^x.\blacksquare$$

この方法も理論的な問題にはしばしば効力を発揮するが、実際の問題を解くには計算が面倒になりがちである。

B.2 演算子法

演算子法にも色々あるが、Oliver Heaviside[3] (1850–1925, London に生まれ、英国の Devon に没する) が電気回路の問題に現れる常微分方程式 (不連続な非同次項を持つ) を解くために導入し、組織的に使ってみせたものが、一番強力で、また広く普及している。微分演算子 p とその逆演算子 p^{-1}

$$pf(x) = \frac{d}{dx}f(x), \quad p^{-1}f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

を導入することで、微分方程式を代数方程式に変換し、特解を機械的に容易に求めることが出来る。

残念ながら珍しくない話で、数学的正当化をしなかった (できなかった) ために発表当時の大多数の数学者達には受け入れてもらえなかった。

その後 Thomas John l'Anson Bromwich (1875–1929, 英国の Wolverhampton に生まれ、Northampton にて没する) が Laplace 変換を用いて初めて厳密な正当化に成功した。

演算子法の数学的正当化として、主なものは次の二つがある。

1. Laplace 変換を用いるもの
   多くの本に載っている。

2. ミクシンスキー (Jan Mikusiński) による方法
   日本の数学界では、故吉田耕作先生がファンで、有名な著作 "Functional Analysis" でも紹介してあるが、このテーマだけで一冊の書物 『演算子法 一つの超函数論』 [32] を著している。ミクシンスキー自身による教科書 [27] も有名であるが最近は入手しづらい。

[3]業績としては、Maxwell の理論の整理なども重要である (有名な Maxwell の方程式も、あれだけ簡単になったのは Heaviside の貢献が大きいという— `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Heaviside.html` などを見よ)。ベクトル解析の開発も彼によるところが大きいとか。

演算子法の正当化 — Laplace 変換を使うかどうか

次は松浦重武氏による吉田 [32] の書評中の文章である ([28] に収録されている)。

> そこで、演算子法の数学的正当性を証明するための努力が払われた。そのために最初に案出されたのは、**ラプラス変換**を用いる方法である。これが、ながい間大学の電気工学科において、ラプラス変換が重要科目となった理由である (いまでも、その伝統は残っているようである)。しかし、ラプラス変換による正当化は、演算子法の適用範囲を狭くするし、学習者に複素関数論の高度な知識を要求することになって、重荷となり、ヘビサイド算法の自由闊達さを抹殺することになった。

一方、木村 [6] には次のようにある。

> … Laplace 変換は線形微分方程式と複素関数論を結びつける。Laplace 変換は線形微分方程式を代数的に解く簡単な手法 (演算子法) を与えてくれるだけでなく、それが表現する動的な現象や動的なシステムの構造や性質を、複素関数の解析的、代数的性質として表現することによって動的なシステムに対する深い洞察を与えてくれる。

対照的な意見ではある。

演算子法の評価は正直言って私には良く分からない。頻繁に解く必要があるのならば[4]、マスターする価値があるのだろうか…

B.3 Laplace 変換の利用

本質的には演算子法と同じと言えるのかもしれないが、演算子法と違って間違えやすいところがなく、学生に不安なく勧められる方法である。現在の日本の数学科のカリキュラムではあまり人気がないが、Fourier 変換を用いて偏微分方程式を解く方法に通じるところがあるので、数学科の学生も覚えておいて損になることはないと思う。

Laplace 変換をマスターするには少し手間がかかるが、覚えてしまえば簡単だし、応用が効くので勉強の価値はありそう。

この文書の付録に簡単にまとめる予定である。

B.4 畳み込みを用いる方法

微分作用素 L の因数分解を用いて一階ずつ基本解との畳み込みで解いていく方法がある。

一般 (n 階) の場合に使える方法であるが、以下 2 階の場合に限って、素朴に説明してみよう。

$$y'' + py' + qy = 0$$

[4]何でも高専ではミクシンスキーの有名な本を教科書にして授業が行われることもあるのだとかいう話だが…

は

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 y + p\left(\frac{d}{dx}\right) y + qy = 0$$

と書ける。$D = \dfrac{d}{dx}$ とおくと、

$$D^2 y + pDy + qy = 0$$

と書いても良いだろう。すると、これを

$$(D^2 + pD + q)y = 0$$

と書いてみたくなる。そこでその記法を約束しよう。

約束

任意の多項式 $F(\lambda) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$ に対して

$$F(D)y := \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{d^j y}{dx^j}$$

と定義する。

これで $D^2 + pD + q$ という式にイノチが引き込まれた。こういう式の和・積は自然に定義できるが、すると

$$\begin{cases} (F(D) + G(D))y = F(D)y + G(D)y, \\ (F(D) \cdot G(D))y = F(D)(G(D)y) \end{cases}$$

が成立する。特に

$$\lambda^2 + p\lambda + q = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

ならば

$$L[y] = (D^2 + pD + q)y = ((D - \alpha)(D - \beta))y = (D - \alpha)((D - \beta)y)$$

が成り立つことに注意しよう。

さて $L[y] = f$ とする。

$$(D - \alpha)(D - \beta)y = f$$

であるから、$v := (D - \beta)y$ とおくと、

$$(D - \alpha)v = f.$$

この微分方程式に初期条件 $v(x_0) = C$ を課した初期値問題の解は

$$v(x) = Ce^{\alpha(x - x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-t)} f(t)\, dt \quad (C \text{ は任意定数}) \tag{9}$$

である[5]。さて、ひとたび v が既知となれば、

$$(D - \beta)y = v$$

[5] ここで x_0 は自分の都合のよいように決めれば良い定数である。例えば微分方程式を考えている区間が 0 を含むのならば $x_0 = 0$ として良い。

を解いて y が求まる:

$$y(x) = C' e^{\beta(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)} v(t)\,dt. \tag{10}$$

(9) を

$$v(t) = C e^{\alpha(t-x_0)} + \int_{x_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\,ds$$

と書き換えて、(10) に代入すると

$$y(x) = C' e^{\beta(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)} \left(C e^{\alpha(t-x_0)} + \int_{x_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\,ds \right) dt.$$

これを計算しても良いが、我々の当面の目的は特解を求めることだったから、$C = C' = 0$ とおいて

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)} \left(\int_{x_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\,ds \right) dt.$$

もし $x_0 = 0$ の場合には、右辺は畳み込みを用いて

$$e^{\beta x} * e^{\alpha x} * f$$

と書ける。$G(x) = e^{\beta x} * e^{\alpha x}$ とおくと、$y = G * f(x)$ と書くこともできる。(**注意:** ここでは定積分の下端 x_0 を 0 としたが、$x_0 \neq 0$ とした場合は、畳み込みの結合則は成立しなくなるので、このようにして G を計算することはできない。事前に変数変換して初期時刻を 0 にしておくこと。)

なお、$C = v(x_0) = y'(x_0) - \beta y(x_0)$, $C' = y(x_0)$ であるから、条件 $C = C' = 0$ は $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ ということである。

まとめておく。

定理 B.1 α, β が特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の根で、f が区間 I 上の連続関数、x_0 は I に含まれる任意の点とするとき、

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)} \left(\int_{x_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\,ds \right) dt \tag{11}$$

は

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

の特解となる (初期条件 $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ を満たす)。

$x_0 = 0$ の場合には、

$$u = e^{\alpha x} * e^{\beta x} * f(x)$$

であるので、

$$G(x) := e^{\alpha x} * e^{\beta x}$$

とおくと、

$$u(x) = G * f(x) := \int_0^x G(x-y) f(y)\,dy$$

と書けることが分かる。

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき、

$$G(x) = \int_0^x e^{\alpha(x-y)} e^{\beta y}\, dy = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}.$$

(ii) $\alpha = \beta$ のとき、

$$G(x) = \int_0^x e^{\alpha(x-y)} e^{\alpha y}\, dy = x e^{\alpha x}.$$

定理 B.2 (区間が 0 を含む場合の簡単な特解の公式) α, β が特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の根で、f が 0 を含む区間 I 上の連続関数とするとき、

$$u(x) := \int_0^x G(x-y) f(y)\, dy, \quad G(x) := \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ x e^{\alpha x} & (\alpha = \beta) \end{cases} \tag{12}$$

は

$$u'' + pu' + qu = f(x), \quad u(0) = u'(0) = 0$$

を満たす。

関数 G のことを Green 関数と呼ぶ。ここではボトムアップに Green 関数を導出したが、天下り (?) に Green 関数を発見する方法もある。付録 D.5.1 を見よ。

畳み込み法 (定理 B.1) を Mathematica で実行 定理 B.1 を利用して特解を求める方法 (仮に畳み込み法と呼んでおく) は、二重積分の計算が必要だが、Mathematica のような数式処理系が利用できる場合は特に有効である[6]。以下の例は F.3 の問題の特解を Mathematica で計算した結果である。

```
special[a_,b_,f_]:=
 Expand[Integrate[Exp[a(x-t)]Integrate[Exp[b(t-s)]f,{s,0,t}],{t,0,x}]]
```

という関数定義をしておく。

(1) `special[4,2,Exp[s]]`

とすると

$$y = \int_0^x e^{4(x-t)} \left(\int_0^t e^{2(t-s)} e^s\, ds \right) dt = -\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{6} e^{4x} + \frac{1}{3} e^x.$$

(2) `special[2,1,Sin[s]]`

とすると

$$y = \int_0^x e^{2(x-t)} \left(\int_0^t e^{(t-s)} \sin s\, ds \right) dt = -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{5} e^{2x} + \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x.$$

[6] 簡単な問題を未定係数法で解くのと比べたりすると、手で積分計算をするのは結構面倒であり、あまり推奨できないのかもしれないが、数式処理系が気軽に使える時代ではむしろこちらの方が便利であると思う。試験に出題することを考えると採用は難しいのだろうか…考え方がゆがんでいるかな。

(3) `special[-a,a,Exp[a s]]`

とすると

$$y=\int_0^x e^{-a(x-t)}\left(\int_0^t e^{a(t-s)}se^{as}\,ds\right)dt=-\frac{1}{8a^3}e^{-ax}+\frac{1}{8a^3}e^{ax}-\frac{1}{4a^2}xe^{ax}+\frac{1}{4a}x^2e^{ax}.$$

(4) `special[-1,-1,Exp[-s]]`

$$y=\int_0^x e^{-(x-t)}\left(\int_0^t e^{-(t-s)}e^{-s}\,ds\right)dt=\frac{1}{2}x^2e^{-x}.$$

(5) `special[-1,-1,s^2]`

$$y=\int_0^x e^{-(x-t)}\left(\int_0^t e^{-(t-s)}s^2\,ds\right)dt=-6e^{-x}-2xe^{-x}+x^2-4x+6.$$

(6) `special[3,3,(s+Exp[s])]`

$$y=\int_0^x e^{3(x-t)}\left(\int_0^t e^{3(t-s)}(s+e^s)\,ds\right)dt=-\frac{35}{108}e^{3x}+\frac{11}{18}xe^{3x}+\frac{1}{9}x+\frac{2}{27}.$$

(7) `special[3,3,Cos[s]]`

$$y=\int_0^x e^{3(x-t)}\left(\int_0^t e^{3(t-s)}\cos s\,ds\right)dt=-\frac{2}{25}e^{3x}+\frac{3}{10}xe^{3x}+\frac{2}{25}\cos x-\frac{3}{50}\sin x.$$

(8) `special[2,0,1+s]`

$$y=\int_0^x e^{2(x-t)}\left(\int_0^t e^{0(t-s)}(1+s)\,ds\right)dt=\frac{3}{8}e^{2x}-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x.\blacksquare$$

以上述べた方法は一般の階数にも自然に拡張できる。結果だけ書いておこう。

特解を求める公式 (一般の階数)

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$

で f と g の畳み込み $f*g$ を定義する。

$$L[y] = p\,(D)\,y, \quad D = \frac{d}{dx}, \quad p(x) = \prod_{j=1}^{\ell}(x-\beta_j)^{r_j}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} G_j(x) &:= \frac{1}{(r_j-1)!}x^{r_j-1}e^{\beta_j x} \quad (j=1,2,\cdots,\ell), \\ G &:= G_1 * G_2 * \cdots * G_\ell, \\ u &:= G * f \end{aligned}$$

とおくと、u は $L[u]=f(x)$ を満たす。

B.5 Green 関数を用いる方法の n 階方程式への拡張

n 階の微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$$

でも同様にして特解を求めることができる。実際、特性根を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ として、

$$G(x) = e^{\alpha_1 x} * e^{\alpha_2 x} * \cdots * e^{\alpha_n x},$$

$$u(x) = G * f(x)$$

とおくと、u は

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}u' + a_n u = f(x), \quad u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

をみたす。Green 関数 G の計算には Laplace 変換が役立つ。

$$\mathcal{L}[G](s) \;=\; \mathcal{L}[e^{\alpha_1 x} * \cdots * e^{\alpha_n x}](s) = \mathcal{L}[e^{\alpha_1 x}](s) \cdots \mathcal{L}[e^{\alpha_n x}](s) = \frac{1}{s-\alpha_1} \cdots \frac{1}{s-\alpha_n}.$$

もしも特性根が相異なるならば、この右辺は

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{s-\alpha_j}, \quad A_j = \prod_{j \neq k}(\alpha_k - \alpha_j)$$

と部分分数分解できるので、容易に Laplace 逆変換ができて

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{\alpha_j x}$$

となる。なお、G は次の条件で特徴づけられる:

$$\begin{aligned} &G^{(n)} + a_1 G^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}G' + a_n G = 0, \\ &G(0) = G'(0) = \cdots = G^{(n-2)}(0) = 0, \quad G^{(n-1)}(0) = 1. \end{aligned}$$

問　上の余談の状況で、$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha$ の場合は、$G(x) = \dfrac{x^{n-1}e^{\alpha x}}{(n-1)!}$ であることを示せ。

問　二階方程式の場合の Green 関数

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\alpha-\beta} & (\alpha \neq \beta \text{ の場合}) \\ xe^{\alpha x} & (\alpha = \beta \text{ の場合}) \end{cases}$$

が

$$G'' + pG' + qG = 0, \quad G(0) = 0, \quad G'(0) = 1$$

を満たすことを確かめよ。

C　Laplace 変換

おしゃべり

Laplace 変換は、既に L.Euler が微分方程式を解くために使っていたが、もちろん名前を冠される P.S. de Laplace (1749–1827) も (Euler とは独立に) 微分方程式や差分方程式を解くために使っていたということである。しかし、何といっても今世紀に入って Heaviside の演算子法の正当化のために使われたのが大きいということである (岩波数学辞典などに書いてあった話)。もっとも Heaviside 自身も使っていたそうだし、本当のところは良く分からない (原典を見たら「ありゃりゃ」となりそうな予感がする)。

Laplace 変換について、手元の数学書にはあまり載っていない。理論的な面は岩波数学辞典にそれなりに整理されてまとまっているが。応用面でやはり詳しいのは、森口・宇田川・一松 [29] のような公式集か、あるいは堤 [16], マイベルク・ファヘンアウア [25] のような「応用数学」系の本である。応用数学系でも矢野 [30] には Laplace 変換はなく、素朴な演算子法が載っているだけである (これはこれで参考になる)。

超関数の Laplace 変換について一度勉強しておこうと思う。

ともあれ、ここでは Laplace 変換の勉強に深入りする気は毛頭なくて、定数係数線型常微分方程式に役立つ範囲でつまみ食いする (と決めておかないと深入りしそうだから)。

C.1　基本的な公式

定義 C.1 (Laplace 変換)　$f \in C([0,\infty);\mathbf{C})$ に対して、

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

で関数 $\mathcal{L}[f]$ が定まるとき、それを f の **Laplace 変換** と呼ぶ。

命題 C.1 (線形性)

$$\mathcal{L}[f+g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s).$$

命題 C.2 (擬多項式の Laplace 変換) 指数関数 × 多項式の Laplace 変換は公式

$$\mathcal{L}\left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{ax}\right] = \frac{1}{(s-a)^\alpha}.$$

から計算できる。その特別な場合として、以下の (1)–(5) がある。

(1) (指数関数の Laplace 変換)

$$\mathcal{L}\left[e^{ax}\right](s) = \frac{1}{s-a} \quad (s > \mathrm{Re}\, a),$$

(2) (1 の Laplace 変換)

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

(3) (単項式 x^k の Laplace 変換)

$$\mathcal{L}\left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right](s) = \frac{1}{s^n},$$

(4) (三角関数の Laplace 変換)

$$\mathcal{L}\left[\cos\omega x\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}\left[\sin\omega x\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

(5) (双曲線関数の Laplace 変換)

$$\mathcal{L}\left[\cosh\omega x\right] = \frac{s}{s^2-\omega^2}, \quad \mathcal{L}\left[\sinh\omega x\right] = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}.$$

証明

$$\mathcal{L}\left[e^{ax}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](s) = \int_0^x e^{-sx}e^{ax}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^{(a-s)x}x^{\alpha-1}\,dx$$

において $(s-a)x = y$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{ax}\frac{x^\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\right](s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{y}{s-a}\right)^{\alpha-1}\frac{dy}{s-a} = \frac{1}{(s-a)^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-1}\,dy \\ &= \frac{1}{(s-a)^\alpha\Gamma(\alpha)}\cdot\Gamma(\alpha) = \frac{1}{(s-a)^\alpha}.\end{aligned}$$

(1) もちろん上で $\alpha = 1$ とすればよい。(同じことだが) 直接やるのもほとんど高校数学で簡単である。

$$\mathcal{L}\left[e^{ax}\right](s) = \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}\,dx = \int_0^\infty e^{(a-s)x}\,dx = \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)x}\right]_0^\infty = \frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}.$$

(2) これも直接証明は簡単である。

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dx = \frac{1}{-s}\left[e^{-sx}\right]_0^\infty = \frac{1}{-s}(0-1) = \frac{1}{s}.$$

(3) もちろん、上の公式で $a=0, \alpha=n$ とすれば良いが、自然数だから帰納法も簡単である。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[x^{k+1}\right](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}x^{k+1}\,dx = \left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\cdot x^{k+1}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}\right)e^{-sx}\cdot(k+1)x^k\,dx \\ &= \frac{k+1}{s}\mathcal{L}[x^k](s)\end{aligned}$$

という漸化式を用いればよい。あるいは $sx=y$ と変数変換して[7]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[x^n\right](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}x^n\,dx = \int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{y}{s}\right)^n\cdot\frac{dy}{s} \\ &= \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-y}y^{(n+1)-1}\,dy = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

(4) 高校数学流に

$$\mathcal{L}[\cos\omega x](s) = \int_0^\infty e^{-sx}\cos\omega x\,dx$$

を部分積分を 2 回行って計算したり、結果を予想して

$$\begin{aligned}\left(e^{-sx}\cos\omega x\right)' &= -se^{-sx}\cos\omega x + (-\omega)e^{-sx}\sin\omega x, \\ \left(e^{-sx}\sin\omega x\right)' &= -se^{-sx}\sin\omega x + \omega e^{-sx}\cos\omega x\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}\left(se^{-sx}\cos\omega x - \omega e^{-sx}\sin\omega x\right)' &= -(s^2+\omega^2)e^{-sx}\cos\omega x, \\ \left(\omega e^{-sx}\cos\omega x + se^{-sx}\sin\omega x\right)' &= -(\omega^2+s^2)e^{-sx}\sin\omega x\end{aligned}$$

を導いて解いてもよい。しかし Euler の公式を用いて、指数関数の Laplace 変換に帰着するのがもっとも簡単であろう。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos\omega x](s) &= \mathcal{L}\left[(e^{i\omega x}+e^{-i\omega x})/2\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^{i\omega x}\right](s) + \mathcal{L}\left[e^{-i\omega x}\right](s)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega}+\frac{1}{s+i\omega}\right) \\ &= \frac{s}{s^2+\omega^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin\omega x](s) &= \mathcal{L}\left[(e^{i\omega x}-e^{-i\omega x})/(2i)\right] = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}\left[e^{i\omega x}\right](s) - \mathcal{L}\left[e^{-i\omega x}\right](s)\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega}-\frac{1}{s+i\omega}\right) \\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

(なお $\cos\omega x = \mathrm{Re}\,e^{i\omega x}$ は ω が実数のときしか有効でない。実数として計算して解析接続するという手もあるが。)

(5)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cosh\omega x](s) &= \mathcal{L}\left[(e^{\omega x}+e^{-\omega x})/2\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^{\omega x}\right](s) + \mathcal{L}\left[e^{-\omega x}\right](s)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}+\frac{1}{s+\omega}\right) \\ &= \frac{s}{s^2-\omega^2},\end{aligned}$$

[7] 漸化式がらみは、Γ 関数に任せているわけだ。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sinh\omega x](s) &= \mathcal{L}\left[(e^{\omega x}-e^{-\omega x})/2\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^{\omega x}\right](s) - \mathcal{L}\left[e^{-\omega x}\right](s)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\right) \\ &= \frac{\omega}{s^2-\omega^2}.\blacksquare\end{aligned}$$

命題 C.3 (δ 関数の Laplace 変換)

$$\mathcal{L}[\delta](s) = 1.$$

証明　形式的には簡単。超関数の Laplace 変換をどう定義するかが問題でしょうね。■

命題 C.4 (Laplace 変換と微分 (1))

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) &= s^n\mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(n-1-j)}(0) \\ &= s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-1)}(0) - f^{n-1}(0)\end{aligned}$$

証明　帰納法による。$n=1$ のとき、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}f'(x)\,dx = \left[e^{-sx}f(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)e^{-sx}f(x)\,dx \\ &= 0 + s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx = s\mathcal{L}[f](s).\end{aligned}$$

n のとき OK とするとき、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f^{(n+1)}\right](s) &= \mathcal{L}\left[\left(f^{(n)}\right)'\right](s) \\ &= s\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) - f^{(n)}(0) = s\left(s^n\mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(n-1-j)}(0)\right) - f^{(n)}(0) \\ &= s^{n+1}\mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{n} s^j f^{(n+1-1-j)}(0).\blacksquare\end{aligned}$$

命題 C.5 (Laplace 変換と積分)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s).$$

証明

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[F](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}F(x)\,dx = \left[\frac{1}{-s}e^{-sx}\cdot F(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{-s}e^{-sx}F'(x)\,dx \\ &= \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s).\blacksquare\end{aligned}$$

命題 C.6 (Laplace 変換と微分 (2))

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}\left[-xf(x)\right](s).$$

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^n \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}\left[(-x)^n f(x)\right](s).$$

証明　積分記号下の微分によって

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-sx}(-x)f(x)\,dx = \mathcal{L}\left[(-x)f(x)\right](s).\blacksquare$$

命題 C.7 (畳み込みの Laplace 変換)

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s).$$

証明

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^x f(x-y)g(y)\,dy\right)dx \\
&= \int_0^\infty dy \int_y^\infty e^{-sx} f(x-y)g(y)\,dx \\
&= \int_0^\infty e^{-sy} g(y)\,dy \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \\
&= \mathcal{L}[g](s)\mathcal{L}[f](s).\blacksquare
\end{aligned}$$

命題 C.8

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{x}f(x)\right](s) == \int_s^\infty \mathcal{L}[f](t)dt.$$

命題 C.9

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha x} f(x)\right](s) = \mathcal{L}[f](s-\alpha).$$

証明

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha x} f(x)\right](s) = \int_0^\infty e^{-sx} e^{\alpha x} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)x} f(x)\,dx = \mathcal{L}[f](s-\alpha).\blacksquare$$

例えば

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right](s-\alpha) = \frac{1}{(s-\alpha)^n}.$$

命題 C.10 (周期関数の Laplace 変換)　f が周期 T の周期関数ならば

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-sy} f(y)\,dy.$$

証明

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx} f(x)\,dx.$$

$x = nT + y\ (0 \le y \le T)$ とおくと $dx = dy$, $e^{-sx} = e^{-s(nT+y)} = e^{-nsT}e^{-sy}$, $f(x) = f(y)$ であるから、

$$\mathcal{L}[f](s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^T e^{-nsT}e^{-sy} f(y)\,dy = \sum_{n=0}^\infty (e^{-sT})^n \int_0^T e^{-sy} f(y)\,dy = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-sy} f(y)\,dy. \blacksquare$$

C.2　計算例

例 C.1 微分方程式の初期値問題

$$y'' - 5y' + 6y = x + \sin x + e^{3x}$$

を解け。両辺の Laplace 変換を取ると

$$\left(s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)\right) - (s\mathcal{L}[f](s) - f(0)) + 6\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-3}.$$

整理して

$$(s^2 - 5s + 6)\mathcal{L}[f](s) = f'(0) + f(0)(s-5) + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-3}.$$

$\mathcal{L}[f](s)$ について解くと

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) &= f'(0)\frac{1}{s^2-5s+6} + f(0)\frac{s-5}{s^2-5s+6} \\
&\quad + \frac{1}{s^2(s-2)(s-3)} + \frac{1}{(s^2+1)(s-2)(s-3)} + \frac{1}{(s-2)(s-3)^2} \\
&= f'(0)\left(\frac{-1}{s-2} + \frac{1}{s-3}\right) + f(0)\left(\frac{3}{s-2} + \frac{-2}{s-3}\right) \\
&\quad + \left(\frac{5}{36}\frac{1}{s} + \frac{1}{6}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{9}\frac{1}{s-3}\right) + \left(\frac{1}{10}\frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{5}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{10}\frac{1}{s-3}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}\right) \\
&= f'(0)\left(\frac{-1}{s-2} + \frac{1}{s-3}\right) + f(0)\left(\frac{3}{s-2} + \frac{-2}{s-3}\right) \\
&\quad + \frac{5}{36}\frac{1}{s} + \frac{1}{6}\frac{1}{s^2} + \frac{11}{20}\frac{1}{s-2} - \frac{71}{90}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1}{10}\frac{s+1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

ゆえに逆 Laplace 変換して

$$\begin{aligned}
f(x) &= f'(0)\left(e^{3x} - e^{2x}\right) + f(0)\left(3e^{2x} - 2e^{3x}\right) \\
&\quad + \frac{5}{36} + \frac{1}{6}x + \frac{11}{20}e^{2x} - \frac{71}{90}e^{3x} + xe^{3x} + \frac{1}{10}(\cos x + \sin x). \blacksquare
\end{aligned}$$

余談 C.1 (Mathematica で楽をしよう) 数式処理系 Mathematica で部分分数への分解を行うには `Apart[]` を用いる。

```
solution=Solve[(s^2-5s+6)y==1/s^2+1/(s^2+1)+1/(s-3),y]
Ly= y /. solution[[1,1]]
Ly=Apart[Ly]
```

Mathematica で逆 Laplace 変換を行うには、`InverseLaplaceTransform[]` を用いる。

```
InverseLaplaceTransform[Ly,s,x]
```

この結果は

$$\frac{5}{36}+\frac{11}{20}e^{2x}-\frac{71}{90}e^{3x}+\frac{x}{6}+xe^{3x}+\frac{1}{10}(\cos x+\sin x)$$

となる (もちろん一致する)。■

例 C.2 $\omega\in\mathbf{R}$ とするとき、

$$\mathcal{L}\left[e^{i\omega x}\right](s)=\frac{1}{s-i\omega}=\frac{s+i\omega}{(s-i\omega)(s+i\omega)}=\frac{s}{s^2+\omega^2}+i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

の実部虚部を取って、

$$\mathcal{L}[\cos\omega x](s)=\frac{s}{s^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}[\sin\omega x](s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.■$$

例 C.3

$$\mathcal{L}[f''](s)=s^2\mathcal{L}[f](s)-sf(0)-f'(0)$$

に $f(x)=\sin\omega x$ を代入して

$$-\omega^2\mathcal{L}[\sin\omega x](s)=s^2\mathcal{L}[\sin\omega x](s)-s\cdot 0-\omega\cdot 1.$$

ゆえに

$$(s^2+\omega^2)\mathcal{L}[\sin\omega x](s)=\omega.$$

これから

$$\mathcal{L}[\sin\omega x](s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.■$$

例 C.4

$$\mathcal{L}[f](s)=\frac{1}{s^2+2s}$$

となる f を求めよ。普通は

$$\frac{1}{s^2+2s}=\frac{1}{s(s+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)$$

より

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2x}\right).$$

あるいは

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](x)=e^{-2x},\quad \mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right](s)=\frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$$

より

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s}\right](x)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+2}\right](x)=\int_0^x e^{-2t}\,dt=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2x}\right).■$$

例 C.5 各自然数 n に対して

$$\mathcal{L}[f_n](s) = \frac{1}{s^n}$$

を満たす f_n を求めよ。

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right](x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^{n-2}}\right](x) = \int_0^x \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{x^{n-1}}\right](t)\,dt = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt.$$

$f_1(x) \equiv 1$ より容易に $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. ■

例 C.6

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

となる f を求めよ。

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{-2s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2} &= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right) = -\frac{1}{2\omega}\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2\omega}\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[\cos\omega x\right](s) \\
&= -\frac{1}{2\omega}\mathcal{L}\left[-x\cos\omega x\right](s) = \mathcal{L}\left[\frac{x\cos\omega x}{2\omega}\right](s).
\end{aligned}$$

ゆえに

$$f(x) = \frac{x\cos\omega x}{2\omega}. ■$$

例 C.7

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega x}{x}\right](s) &= \int_s^\infty \mathcal{L}\left[\sin\omega x\right](t)\,dt = \int_s^\infty \frac{\omega}{t^2+\omega^2}\,dt \\
&= \int_{\mathrm{Arctan}(s/\omega)}^{\pi/2} \frac{\omega}{\omega^2(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{\omega^2+\omega^2\tan^2\theta}{\omega}\,d\theta = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{s}{\omega}\right).
\end{aligned}$$

例 C.8

$$\mathcal{L}[f](s) = \log\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)$$

となる f を求めよ。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[-xf(x)\right](s) &= \frac{d}{ds}\log\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right) = \frac{-2\omega^2 s^{-3}}{1+\omega^2/s^2} = \frac{-2\omega^2}{s(s^2+\omega^2)} \\
&= \frac{1}{s}\cdot(-2\omega)\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[-2\omega\sin\omega x\right](s) \\
&= \mathcal{L}\left[\int_0^x -2\omega\sin\omega t\,dt\right](s) = \mathcal{L}\left[2\left[\cos\omega t\right]_0^x\right](s) = \mathcal{L}\left[2(\cos\omega x - 1)\right].
\end{aligned}$$

ゆえに
$$-xf(x) = 2(\cos \omega x - 1).$$
これから
$$f(x) = \frac{2(1 - \cos \omega x)}{x}. \blacksquare$$

命題 C.11 H を Heaviside の階段関数、すなわち
$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$
とするとき、
$$\mathcal{L}\left[H(x-a)f(x-a)\right] = e^{-as}\mathcal{L}[f](s).$$

証明
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[H(x-a)f(x-a)\right] &= \int_0^\infty e^{-sx}H(x-a)f(x-a)\,dx = \int_a^\infty e^{-sx}f(x-a)\,dx \\ &= \int_0^\infty e^{-as-sy}f(y)\,dy = e^{-as}\int_0^\infty e^{-st}f(y)\,dy = e^{-as}\mathcal{L}[f](s). \blacksquare \end{aligned}$$

例 C.9
$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{e^{-as}}{s^2}$$
をみたす f を求めよ。

C.3 存在条件

ある $s_0 \in \mathbf{C}$ に対して積分
$$\int_0^\infty e^{-s_0 x}f(x)\,dx$$
が普通の Lebesgue 積分の意味で存在すれば、
$$\mathrm{Re}\, s \geq \mathrm{Re}\, s_0$$
を満たすすべての s について
$$\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$$
は存在する (ベキ級数の収束と同じだね)。

少なくとも一つは積分が存在するような s_0 が存在するとき、積分が収束するような $\mathrm{Re}\, s_0$ の inf を σ とすれば ($\sigma = -\infty$ もありうる)、
$$\mathrm{Re}\, s > \sigma \quad \Longrightarrow \quad \text{積分は存在する},$$
$$\mathrm{Re}\, s < \sigma \quad \Longrightarrow \quad \text{積分は存在しない}.$$
σ のことを収束 (横) 座標 (abscissa of convergence) と呼ぶ。

Laplace 変換が定義できるための簡単な十分条件として

$$(\exists M \in \mathbf{R}) \quad (\exists \alpha \in \mathbf{R}) \quad (\forall x \in \mathbf{R}) \quad |f(x)| \le M e^{\alpha x}$$

がある[8]。このとき $s > \alpha$ で Laplace 変換が定義できる。

C.4 Fourier 変換との関係, 逆 Laplace 変換

f の Fourier 変換を

$$\mathcal{F}[f](y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot y} f(x)\,dx,$$

g の逆 Fourier 変換を

$$\mathcal{F}^*[g](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot y} g(y)\,dy$$

で定める。

Laplace 変換

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx \quad (\mathrm{Re}\ s > a),$$

との間には

$$\mathcal{F}[f](y) = \mathcal{L}[f](iy)$$

という関係がある。$y = -i\xi$ とおくと、$iy = \xi$ となるので

$$\mathcal{L}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](-i\xi).$$

Laplace 変換は Fourier 変換の虚軸上での値である、とみなせる。

Fourier の反転公式から

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^*\left[\mathcal{F}f\right](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot y}\mathcal{F}[f](y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{xz}\mathcal{L}[f](z)\,dz \end{aligned}$$

ただし C は $z = a^* + it$ $(-\infty < t < \infty)$.

次の命題は [12] に載っていたものである (もっとも証明は省略されている)。

命題 C.12 (逆 Laplace 変換の計算用) (1) $P(x)$ が $n-1$ 次以下の多項式、$a_1, \cdots, a_n$ がすべて相異なる複素数とするとき、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{(s-a_1)\cdots(s-a_n)}\right](x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)e^{a_k x}}{\prod_{j\ne k}(a_k - a_j)}.$$

(2) $P(x)$ が $n-1$ 次以下の多項式、$a \in \mathbf{C}$ とするとき、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{(s-a)^n}\right](x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(n-k)}(a)x^{k-1}e^{ax}}{(n-k)!(k-1)!}.$$

[8]やはり Laplace 変換を勉強しておいた方が、半群理論を勉強するときに少し役に立ったのではないかな。ちょっとため息。

C.5 超関数の Laplace 変換

忘れないために見出しだけでも。

何を参考にするのが良いか。Schwartz [8] には一応書いてあるが。

Yosida [31] から二つの命題を。要するに L^2 のクラスで考えると、片側 Laplace 変換はまっとうな正則関数で、逆変換できる、ということらしい。

命題 C.13 $f \in L^2(0,\infty)$ とするとき、片側 Laplace 変換

$$g(z) := \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt$$

は Hardy-Lebesgue クラス $H^2(0)$ に属する。すなわち

(i) g は右半平面 $\{z \in \mathbf{C}; \mathrm{Re}\, z > 0\}$ で正則な関数である。

(ii) $\forall x > 0$ に対して $y \mapsto g(x+iy)$ は $L^2(\mathbf{R})$ に属し、

$$\sup_{x>0} \int_{\mathbf{R}} |g(x+iy)|^2\,dy < \infty.$$

命題 C.14 (Paley-Wiener) $g \in H^2(0)$ とするとき、次の意味で g の境界値 $y \mapsto g(iy) \in L^2(\mathbf{R})$ が定まる:

$$\lim_{x\downarrow 0} \int_{\mathbf{R}} |g(x+iy) - g(iy)|^2\ dy = 0 \quad (\text{要するに } L^2 \text{ での極限}).$$

また

$$f(t) := \frac{1}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} g(iy) e^{ity}\,dy$$

で定まる f は $(-\infty, 0)$ で 0 であり、f の片側 Laplace 変換は g に等しい。

ここで Payley-Wiener の名前が出て来るのは、なるほどと思う。Yosida [31] にはこれ以外ほとんど Laplace 変換の話は出て来なくて、Schwartz の論文 [9] を見よ、となっている。有名な Schwartz [7] にも Laplace 変換の章があるが、その脚注には、[9] のコンパクトなバージョンであるという断り書きがある。[8] はどうなのだろう？ふと折原 ([33] の第 I 部第 4 章) も思い出した。まあ、またいつか暇があって、興味が湧いたときに、だろうか。

C.6 作用素半群

(すでにかなり脱線してきているが、昔から納得行かなかったところなので…)

Banach 空間 X 上の C_0 半群 $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ があるとき、その生成作用素とは

$$Ax = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h}(U(h) - I)x$$

で定められる X 上の線型作用素 A のことである。A の定義域 $D(A)$ は X の稠密な線型部分

空間で、A は閉作用素である。また評価

$$\exists M \in \mathbf{R} \quad \exists \beta > 0 \quad (\forall \lambda \in \mathbf{C}; \mathrm{Re}\,\lambda > \beta) \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \|(\lambda - A)^{-n}\| \le M(\mathrm{Re}\,\lambda - \beta)^{-n}$$

が成り立つ。半群 $\{U(t)\}$ の Laplace 変換は生成作用素 A のレゾルベントになる:

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-st}U(t)x\,dt \quad (x \in X,\, \mathrm{Re}\,\lambda > \beta).$$

これは

$$\frac{1}{s-a} = \mathcal{L}\left[e^{at}\right](s)$$

という公式の拡張、というわけである。

また反転公式

$$U(t)x = \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x\,d\lambda \quad (c > \beta,\, t > 0,\, x \in D(A))$$

が成り立つ ($\{U(t)\}$ が解析的半群であれば、すべての $x \in X$ と、$t \ge 0$ について成り立つ)。

もし $A \in L(X)$ (X 上の有界線型作用素) ならば、

$$U(t) = e^{tA} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}A^n \quad (\text{ノルム収束})$$

である。また一般に

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t}{n}A\right)^{-n} x,$$

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty} e^{-tA_n}x, \quad A_n = A\left(1 + \frac{1}{n}A\right)^{-1} \quad (\text{吉田近似}).$$

C.7 公式

$f(x)$	$\mathcal{L}[f](s)$	収束範囲
1	$\dfrac{1}{s}$	$s > 0$
x^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{\alpha x}$	$\dfrac{1}{s-\alpha}$	$s > \mathrm{Re}\,\alpha$
$\cos\omega x$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$\sin\omega x$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$\cosh\omega x$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert\omega\rvert$
$\sinh\omega x$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert\omega\rvert$

$\varphi(s) := \mathcal{L}[f](s)$ とおくとき

元の関数	Laplace 変換
$f(x)$	$\varphi(s)$
$x^n f(x)$	$(-1)^n \varphi(s)$
$\dfrac{1}{x} f(x)$	$\int_s^\infty \varphi(t)\,dt$
$e^{ax} f(x)$	$\varphi(s-a)$
$f'(x)$	$s\varphi(s) - f(0)$
$\int_0^x f(t)\,dt$	$\dfrac{1}{s}\varphi(s)$
$f(x-a)H(x-a)$	$e^{-as}\varphi(s)$
$f(ax)\ (a>0)$	$\dfrac{1}{a}\varphi\left(\dfrac{s}{a}\right)$

D　定数係数線型常微分方程式

(この節は自分の頭の整理のために書いたものである。非数学系学生、特に初学者が読んで分かりやすいとは思えない。)

定数 a_j $(j=1,2,\cdots,n)$ とある区間 I 上連続な関数 $f\colon I \to \mathbf{C}$ が与えられたとき、未知関数 $y = y(x)$ についての方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

を定数係数線型常微分方程式という。

$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, $D = \dfrac{d}{dx}$ とおくと、

$$p(D)y = f(x)$$

と書ける。この時点では形式的な書き方だが、以下で記号をきちんと定義する。

D.1　作用素代数

独り言

自分が学生だった頃、演習書などで演算子法 (色々な流儀があるようだ) を勉強して、何となく霞がかかったような感じがした。一応計算は進められるのだが、足元がおぼつかない感じがしたのである。今から考えると、この § に記すようなことを明示されなかったためと思う。一方、そのときにここに書いてあることを読んだとしてもチンプンカンプンだったかもしれない。
講義では時間も少ないし、多項式 $f(x)=\sum_{j=0}^n a_j x^j$ に対して、

$$f(D)y := \sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}$$

と天下りに定義して、

$$(f(D)+g(D))y = f(D)y + g(D)y, \quad (f(D)g(D))\,y = f(D)\,(g(D)y)$$

が成り立つ、くらいで誤魔化すのかなあ。あ、多項式の和 $(f+g)(x)$ と積 $(f\cdot g)(x)$ を定義しておいて、

$$(\text{☆}) \qquad f(D)+g(D) := (f+g)(D), \quad f(D)\cdot g(D) := (f\cdot g)(D)$$

と言っておかないと嘘になるかな？でも (☆) を見せると、かえって混乱する学生がいるような気もする。やはり気持ちが悪いなあ。 ■

X, Y を $\mathbf{C}$ 上の線型空間とするとき、$T\colon X\to Y$ が線型写像であるとは

$$\begin{cases} T(x+y) = T(x)+T(y) & (x,\, y\in X), \\ T(\lambda x) = \lambda T(x) & (\lambda\in\mathbf{C},\, x\in X) \end{cases}$$

が成り立つことをいう。T のことを線型作用素ということもある。その場合は x の像を $T(x)$ ではなく Tx と書くことが多い (行列 × ベクトルの真似)。

$$L(X,Y) := \{T; T\colon X\to Y \quad \text{線型作用素}\}.$$

集合 $L(X,Y)$ は、その上で次のように和、スカラー積が定義できて、$\mathbf{C}$ 上の線型空間になる。

$$\begin{cases} (T+S)x := Tx+Sx & (T,\, S\in L(X,Y),\, x\in X), \\ (\lambda T)x := \lambda(Tx) & (T\in L(X,Y),\, \lambda\in\mathbf{C},\, x\in X), \end{cases}$$

$L(X,Y)$ の零元は

$$T_0 x = 0 \quad (x\in X)$$

で定まる $T_0\colon X\to Y$ のことであるが、以下この T_0 のことを単に 0 と書く。
特に $X=Y$ のとき、$L(X,Y)$ を単に $L(X)$ と書く。
$L(X)$ には次のように積が定義できる: T, $S\in L(X)$ に対して、$ST\in L(X)$ を

$$(ST)x := S(Tx) \quad (x\in X)$$

で定める。

これは写像の言葉で言えば、合成写像 $S\circ T$ ということである。従って、よく知られているように結合法則 $(RS)T=R(ST)$ が成り立つ。

$L(X)$ は $\mathbf{C}$ 上の多元環 (algebra) である。

単位元はいわゆる恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X\ni x\mapsto x\in X$ であるが、I と書いたり、このすぐ後に導入する記法を用いて単に 1 と書くことが多い。

$\lambda\in\mathbf{C}$ に対して、

$$T_\lambda x:=\lambda x\quad(x\in X)$$

とおくと、$T_\lambda\in L(X)$ であるが、T_λ を単に λ と書く。(要するに $\mathbf{C}$ を $L(X)$ に埋め込むということである。)

1 は X 上の恒等写像 id_X を表すので、$L(X)$ の単位元である。

$T\in L(X)$, $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ に対して、T の n 乗 T^n を

$$T^n:=\begin{cases}\underbrace{TT\cdots T}_{n\text{ 個}} & (n\ge 1)\\ 1 & (n=0)\end{cases}$$

で定義する。

容易に指数法則

$$T^{n+m}=T^nT^m,\quad (T^n)^m=T^{nm}\quad(n,\,m\ge 0)$$

が成り立つことが分かる。特に任意の T の冪は交換可能である:

$$T^nT^m=T^mT^n.$$

T が全単射であるとき、写像としての逆写像が存在するが、それを T^{-1} と書く。そして負の整数 n に対して

$$T^n:=\left(T^{-1}\right)^{-n}\quad(n\in\mathbf{Z},\,n<0)$$

で T^n を定義する。こうしてすべての整数 n に対して T^n が定義でき、指数法則も

$$T^{n+m}=T^nT^m,\quad (T^n)^m=T^{nm}\quad(n,\,m\in\mathbf{Z})$$

と拡張される。

$T\in\mathcal{L}(X)$, $f(x)=\displaystyle\sum_{j=0}^n a_jx^j\in\mathbf{C}[x]$ に対して

$$f(T)=\sum_{j=0}^n a_jT^j$$

で $f(T)\in\mathcal{L}(X)$ が定義される。もちろん

$$f(T)y=\sum_{j=0}^n a_j(T^jy).$$

一般化

これまで、線型作用素の定義域を X 全体であるとしたが、応用上は X のある線型部分空間とする方が望ましい。例えば微分作用素は、その階数を n とするとき、C^n 級関数全体の集合を定義域とするのが自然である。一つの定義域ですませる場合は C^∞ 級関数全体の集合を定義域とせざるを得ないが、不自然であり、応用上重要な問題を適用範囲外としてしまう。そこで、ここでは定義域が X のある線型部分空間とする一般化について言及する。

X 上の線型作用素の定義を、X のある線型部分空間 $\mathcal{D}(T)$ から X への線型写像 $T\colon \mathcal{D}(T) \to X$ と改めて、その全体を $\mathcal{L}(X)$ と書く ($\mathcal{L}(X)$ の元 T に対して T の定義域をつねに $\mathcal{D}(T)$ と表すことにする)。そして作用素の和 $T+S$, スカラー積 λT, 積 ST を

$$\begin{cases} (T+S)(x) = Tx + Sx & (x \in \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S)) \\ (\lambda T)(x) = \lambda(Tx) & (x \in \mathcal{D}(T)) \\ (ST)(x) = S(Tx) & (x \in \{y \in \mathcal{D}(T); Ty \in \mathcal{D}(S)\}) \end{cases}$$

で定める。

$T \in \mathcal{L}(X)$ に対して

$$R(T) := \{Tx; x \in \mathcal{D}(T)\}$$

を T の値域と呼ぶ。

$T \in \mathcal{L}(X)$ が写像として単射であるとき、逆写像

$$S\colon R(T) \ni y \mapsto x \in X \quad (\text{ただし } Tx = y \text{ となるような } x)$$

を T^{-1} と書き、T の逆作用素と呼ぶ。

D.2 微分演算子 D

この節を通じて、I を $\mathbf{R}$ の区間として、$X = C^\infty(I;\mathbf{C})$ とおく。

定義 D.1 (微分演算子 D) $D \in \mathcal{L}(X)$ を

$$Dy = y' \quad (y \text{ の導関数})$$

で定める。

(C^∞ 級でなく、なるべく一般にやるためには、$X^m := C^m(I;\mathbf{C})$, $X := X^0$ として、D の定義域 $\mathcal{D}(D)$ は X^1 とすることになる。)

定義 D.2 (掛け算作用素) $f \in X$ に対して、$T_f y := fy$ (掛け算) として定まる $T_f \in \mathcal{L}(X)$ のことを単に f と書く。

次の命題は簡単であるが重要である。特性多項式を考える理由の一つの説明になるだろう (特性根 α に対して $e^{\alpha x}$ は微分方程式の解になることがはっきり見える)。

命題 D.1 $f(x) \in \mathbf{C}[x]$, $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して

$$f(D)e^{\alpha x} = f(\alpha)e^{\alpha x}.$$

証明 $D^k e^{\alpha x} = \alpha^k e^{\alpha x}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ に注意すればよい。 ■

次の命題 (の特に (1)) が後の議論で大活躍する。

命題 D.2 (微分演算子のキー・レンマ) $u \in X$, α, $\beta \in \mathbf{C}$ に対して次の (0), (1), (2) が成り立つ。

(0) $D(e^{\alpha x}u) = e^{\alpha x}(D + \alpha)u$.

(1) $\forall m \in \mathbf{N}$ に対して

$$e^{-\alpha x}(D - \alpha)^m \left(e^{\alpha x}u\right) = D^m u.$$

(2) $\forall m \in \mathbf{N}$ に対して

$$e^{-\alpha x}(D - \beta)^m \left(e^{\alpha x}u\right) = (D + \alpha - \beta)^m u.$$

証明

(0) 積の微分法により

$$D(e^{\alpha x}u) = \alpha e^{\alpha x} \cdot u + e^{\alpha x} \cdot Du = e^{\alpha x}(D + \alpha)u.$$

(1) (0) より

$$e^{-\alpha x}D\left(e^{\alpha x}u\right) = (D + \alpha)u.$$

両辺から $e^{-\alpha x}\alpha e^{\alpha x}u = \alpha u$ を引いて

$$e^{-\alpha x}(D - \alpha)e^{\alpha x}u = Du.$$

両辺を m 乗して

$$\left[e^{-\alpha x}(D - \alpha)e^{\alpha x}\right]^m u = D^m u.$$

左辺は $e^{-\alpha x}(D - \alpha)^m e^{\alpha x}u$ に等しい (Cf. $(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^m P$)。

(2) まず $m = 1$ の場合

$$\begin{aligned} e^{-\alpha x}(D - \beta)(e^{\alpha x}u) &= e^{-\alpha x}\left[(D - \alpha + (\alpha - \beta))\right]e^{\alpha x}u = e^{-\alpha x}(D - \alpha)e^{\alpha x}u + (\alpha - \beta)u \\ &= Du + (\alpha - \beta) = \left[D + (\alpha - \beta)\right]u. \end{aligned}$$

(Cf. $P^{-1}(\lambda I - A)P = \lambda I - P^{-1}AP$.) この後は (1) の後半と同様、両辺を m 乗して整理すればよい。 ■

D.3　準備

D.3.1　畳み込み

定義 D.3 (畳み込み) $f, g \in C([0,\infty);\mathbf{C})$ に対して、f と g の**畳み込み** (**合成積**, **convolution**) と呼ばれる関数 $f*g$ を以下のように定める。

$$f*g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\,dy \quad (x \in [0,\infty)).$$

(ある種の積と考え、関数の和よりも優先順位が高いと考える。例えば $f+g*h = f+(g*h)$ とみなす。)

命題 D.3 (畳み込みの性質) (準備中)

(1) (結合律) $f*(g*h) = (f*g)*h$.

(2) (可換性) $f*g = g*f$.

(3) (線形性) $f*(g_1+g_2) = f*g_1 + f*g_2$, $f*(cg) = c(f*g)$.

(4) (分配則) $(f+g)*h = f*h+g*h$.

(5) (零因子の非存在[a]) $f*g=0$ ならば $f=0$ または $g=0$. (ここで 0 は定数関数 0 を表す。)

[a]E.C.Titchmarsh の Injectivity 定理 (1926)

証明　(5) は吉田 [31] などを見よ (色々な証明へのポインターがある)。それ以外は簡単である。■

微分方程式の初期値問題を考える場合には、0 における微分係数が問題になることが多い。明らかに任意の f, g について $f*g(0)=0$ であるが、畳み込みの回数が 1 つ増えるごとに 1 つ深い階数までの微係数が 0 になる。これを示そう。

さて、一般に

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,t)\,dt = f(x,x) + \int_a^x \frac{df}{dx}(x,t)\,dt$$

が成り立つ。これを畳み込みに応用すると次の補題を得る。

補題 D.1 (畳み込みの導関数) $f \in C^r(I;\mathbf{C})$, $g \in C^{r-1}(I;\mathbf{C})$ とするとき $f*g \in C^r(I;\mathbf{C})$ であり、

$$(f*g)^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^{r-1} f^{(j)}(0)g^{(r-1-j)}(x) + \int_0^x f^{(r)}(x-y)g(y)\,dy.$$

証明

$$
\begin{aligned}
(f*g)'(x) &= f(0)g(x)+\int_0^x f'(x-y)g(y)\,dy,\\
(f*g)''(x) &= f(0)g'(x)+f'(0)g(x)+\int_0^x f''(x-y)g(y)\,dy,\\
(f*g)^{(3)}(x) &= f(0)g''(x)+f'(0)g'(x)+f''(0)g(x)+\int_0^x f^{(3)}(x-y)g(y)\,dy,
\end{aligned}
$$

以下同様。■

系 D.1 $f\in C^k([0,\infty);\mathbf{C})$, $g\in C^{k-1}([0,\infty);\mathbf{C})$,

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(k-1)}(0)=0$$

ならば

$$(f*g)^{(r)}(0)=0\quad (R=0,1,\cdots,k).$$

証明　補題の等式に $x=0$ を代入すると、右辺の各項が 0 になる。■

命題 D.4 g_1, g_2, $\cdots$, $g_m\in C([0,\infty);\mathbf{C})$ とするとき、

$$f=g_1*g_2*\cdots*g_m$$

とおくと

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-2)}(0)=0.$$

証明　m に関する帰納法。$m=2$ のとき、畳み込みの定義から $g_1*g_2(0)=0$. $m-1$ まで成り立つとする。$f=g_1*\cdots*g_m$ に対して、$h=g_1*\cdots*g_{m-1}$ とおくと、$f=h*g_m$. 帰納法の仮定から $h(0)=h'(0)=\cdots=h^{(m-3)}(0)=0$. 系 D.1 から、$f(0)=f'(0)=\cdots f^{(m-2)}(0)=0$. ■

D.3.2　関数 $e_{m,\alpha}$

関数系 $e_m(x)=\dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}$ $(m=1,2,\cdots)$ は

$$e_m'(x)=e_{m-1}(x)\quad \text{ゆえに}\quad e_m^{(\ell)}=e_{m-\ell}$$

という微分に関して簡単な性質を持つ。これを一般化しよう。

定義 D.4 ($e_{m,\alpha}$ の定義) $\alpha\in\mathbf{C}$, $m\in\mathbf{Z}$ に対して

$$e_{m,\alpha}(x):=\begin{cases}\dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{\alpha x} & (m\ge 1)\\ 0 & (m\le 0)\end{cases}\tag{13}$$

で関数 $e_{m,\alpha}$ を定義する。

$e_{m,0}(x) = x^{m-1}/(m-1)!$, $e_{1,\alpha}(x) = e^{\alpha x}$ などに注意しよう。

命題 D.5 ($e_{m,\alpha}$ と $(D-\alpha)$ との関係) $\alpha \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{N}$ に対して

$$(D-\alpha)^{\ell} e_{m,\alpha}(x) = e_{m-\ell,\alpha}(x) \quad (\ell \in \mathbf{N}).$$

証明　積の微分法より

$$e'_{m,\alpha}(x) = \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} e^{\alpha x} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \alpha e^{\alpha x} = e_{m-1,\alpha}(x) + \alpha e_{m,\alpha}(x).$$

ゆえに $(D-\alpha)e_{m,\alpha}(x) = e_{m-1,\alpha}(x)$. これから明らか。■

系 D.2 $P = (e_{1,\alpha}, e_{2,\alpha}, \cdots, e_{m,\alpha})$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \text{\Large 0} \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \text{\Large 0} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$(D-\alpha)P = PJ.$$

命題 D.6 $u(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j e_{j,\alpha}(x)$ とするとき、

$$c_j = (D-\alpha)^{j-1} u(0) \quad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

証明　命題 D.5 より

$$(D-\alpha)^{\ell-1} u(x) = \sum_{j=\ell}^{m} c_j e_{j-\ell+1,\alpha}(x)$$

であるから、

$$e_{k,\alpha}(0) = \begin{cases} 1 & (k=1) \\ 0 & (k \neq 1) \end{cases}$$

に注意して、$x = 0$ を代入すればよい。■

D.4　方程式 $(D-\alpha)^m u = f$

次の命題が後で必要になる重要なものである。証明は命題 D.2 によるもので、熟読してマスターする価値がある。

命題 D.7 (**$(D-\alpha)^m u=0$ の一般解**) $\alpha\in\mathbf{C}$, $m\in\mathbf{N}$, I を $\mathbf{R}$ の区間とするとき、$u\in C^m(I;\mathbf{C})$ について、次の二条件は同値である。

(i) $(D-\alpha)^m u=0$.

(ii) $\exists(c_1,\cdots,c_m)\in\mathbf{C}^m$ s.t. $u(x)=\displaystyle\sum_{j=1}^m c_j x^{j-1}e^{\alpha x}$.

証明 $u=e^{\alpha x}v$ つまり $v:=e^{-\alpha x}u$ とおくと

$$
\begin{aligned}
(D-\alpha)^m u=0 &\iff e^{-\alpha x}(D-\alpha)^m u=0\\
&\iff e^{-\alpha x}(D-\alpha)^m e^{\alpha x}v=0\\
&\iff D^m v=0\\
&\iff \exists(c_1,\cdots,c_m)\in\mathbf{C}^m\quad\text{s.t.}\quad v=\sum_{j=1}^m c_j x^{j-1}\\
&\iff \exists(c_1,\cdots,c_m)\in\mathbf{C}^m\quad\text{s.t.}\quad u=e^{\alpha x}\sum_{j=1}^m c_j x^{j-1}.\blacksquare
\end{aligned}
$$

もちろん、条件 (ii) の等式は

$$u(x)=\sum_{j=1}^m c_j e_{j,\alpha}(x)$$

としてもよい。こうしておくと命題 D.6 から係数が

$$c_j=(D-\alpha)^{j-1}u(0)$$

と簡単に表せて便利である。

次に非同次方程式について調べよう。簡単のために問題を考える区間 I が 0 を含む (さらに初期条件を考える場合、初期時刻は 0) とする。

命題 D.8 (**$(D-\alpha)^m u=f$ の特解**) $\alpha\in\mathbf{C}$, $m\in\mathbf{N}$, I は 0 を含む $\mathbf{R}$ の区間とするとき、$f\in C(I;\mathbf{C})$ に対して

$$u(x):=e_{m,\alpha}*f(x)=\int_0^x\frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!}e^{\alpha(x-y)}f(y)\,dy$$

とおくと、

$$(D-\alpha)^m u=f,\quad u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(m-1)}(0)=0$$

が成り立つ。

証明の前に、どうやってこの式が導かれるか説明しよう (これもきちんと書けば一つの証明になる)。やはり $v=e^{-\alpha x}u$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
(D-\alpha)^m u=f &\iff e^{-\alpha x}(D-\alpha)^m e^{\alpha x}v=e^{-\alpha x}f(x)\\
&\iff D^m v=e^{-\alpha x}f(x),
\end{aligned}
$$

$$u(0) = u'(0) = \cdots u^{(m-1)}(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v(0) = v'(0) = \cdots v^{(m-1)}(0) = 0$$

が成り立つことから、$e^{-\alpha x} f(x)$ を次のように m 回積分すれば v が得られることが分かる。

$$v(x) = \int_0^x \int_0^{x_{m-1}} \cdots \int_0^{x_1} e^{-\alpha y} f(y)\, dy dx_1 \cdots dx_{m-1}.$$

$F(x) = e^{-\alpha x} f(x)$ とおくと、v は m 個の定数関数 1 と F の畳み込みである:

$$v(x) = \underbrace{1 * 1 * \cdots * 1}_{m個} * F(x).$$

ところが簡単な計算で分かるように

$$\underbrace{1 * 1 * \cdots * 1}_{m個}(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

である。ゆえに

$$v(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} * F(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} F(y)\, dy = \int_0^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\alpha y} f(y)\, dy.$$

$u = e^{\alpha x} v$ であるから、

$$u(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} e^{\alpha(x-y)} f(y)\, dy. \blacksquare$$

証明 (準備中) ■

ここまでの結果をまとめると次の定理が得られる。

定理 D.1 ($(D-\alpha)^m u = f$ の一般解) I は 0 を含む区間, $f \in X = C(I;\mathbf{C})$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{N}$ とするとき、u が

$$(D-\alpha)^m u = f \quad (I \text{ 上})$$

を満たすならば

$$u(x) = \sum_{j=1}^m c_j e_{j,\alpha}(x) + e_{m,\alpha} * f(x) = \sum_{j=1}^m c_j \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} e^{\alpha x} + \int_0^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} e^{\alpha(x-y)} f(y)\, dy.$$

ただし

$$c_j = (D-\alpha)^{j-1} u(0) \quad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

D.5 一般の方程式 $p(D)u = f$ の場合

準備が済んだので、一般の多項式 $p(x) \in \mathbf{C}[x]$ に対して

$$p(D)u = f$$

を考える。$p(x)$ の因数分解を

$$(14) \qquad p(x) = \prod_{j=1}^r (x - \lambda_j)^{m_j} \quad (\lambda_j,\, a \in \mathbf{C};\, j \neq k \Longrightarrow \lambda_j \neq \lambda_k,\, m_j \geq 1)$$

とする。

補題 D.2 **(e_{k,λ_j} は $p(D)y=0$ の解)** $p(x)$ が (14) で与えられるとき、

$$e_{k,\lambda_j}(x)=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_j x}\quad (j=1,2,\cdots,r;\ k=1,2,\cdots,m_j) \tag{15}$$

はみな $p(D)y=0$ の解である。ゆえに任意の定数 c_{jk} に対して

$$y=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}e_{k,\lambda_j}(x)$$

も $p(D)y=0$ の解である。

証明 任意の $j_0\in\{1,2,\cdots,r\}$ に対して、(定数係数の微分演算子は互いに交換可能なので)

$$p(D)=\left[\prod_{j\neq j_0}(D-\lambda_j)^{m_j}\right](D-\lambda_{j_0})^{m_{j_0}}$$

であり、$e_{k,\lambda_{j_0}}$ $(k=1,2,\cdots,m_{j_0})$ は

$$(D-\lambda_{j_0})^{m_{j_0}}y=0$$

の解であるから、微分方程式 $p(D)y=0$ の解になる。

補題 D.3 (15) で与えられる関数系 $\{e_{k,\alpha_j}\}$ は 1 次独立である。

証明 定義から、

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}e_{k,\lambda_j}(x)=0\quad (x\in I) \tag{16}$$

を仮定して、$c_{jk}=0$ を示せば良い。

$J\in\{1,2,\cdots,r\}$ を固定して、$c_{Jk}=0$ $(k=1,2,\cdots,m_J)$ を示す。

$$T_\ell:=\left[\prod_{j\neq J}(D-\lambda_j)^{m_j}\right](D-\lambda_J)^{\ell}\quad (\ell=0,1,\cdots,m_J-1)$$

とおく。

$$(D-\lambda_J)^{m_J-1}e_{k,\lambda_J}(x)=e_{k-m_J+1,\lambda_J}(x)=\begin{cases} e_{1,\lambda_J}(x)=e^{\lambda_J x} & (k=m_J)\\ 0 & (k<m_J)\end{cases}$$

に注意して、(16) に T_{m_J-1} をかけて、

$$\begin{aligned}
0 &= T_{m_J-1}\left(\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}e_{k,\lambda_j}(x)\right)\\
&= \left[\prod_{j\neq J}(D-\lambda_j)^{m_j}\right](D-\lambda_J)^{m_J-1}\left(\sum_{j\neq J}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}e_{k,\lambda_j}(x)+\sum_{k=1}^{m_J} c_{Jk}e_{k,\lambda_J}(x)\right)\\
&= 0+\left[\prod_{j\neq J}(D-\lambda_j)^{m_j}\right]c_{J,m_J}e^{\lambda_J x}\\
&= \prod_{j\neq J}(\lambda_J-\lambda_j)^{m_j}c_{J,m_J}e^{\lambda_J x}.
\end{aligned}$$

ゆえに $c_{J,m_J}=0$. ■

別証明　(16) に $\prod_{j\neq J}(D-\lambda_j)^{m_j}$ をかけると、(工事中) ■

以上をまとめると次の定理を得る。

定理 D.2 (同次方程式 $p(D)y=0$ の解空間の構造 (一般解)) $p(x)$ が (14) で与えられるとき、微分方程式

$$p(D)y=0,\quad D=\frac{d}{dx}$$

の解全体の集合は $C^\infty(I;\mathbf{C})$ の n 次元線型部分空間をなし、基底として

$$e_{k,\lambda_j}(x)=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_j x}\quad (j=1,2,\cdots,r;\ k=1,2,\cdots,m_j)$$

が取れる。すなわち

$$y=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}e_{k,\lambda_j}(x)\quad (c_{jk}\ \text{は任意定数})$$

が $p(D)y=0$ の一般解である。

では非同次方程式にとりかかろう。

命題 D.9 (非同次方程式 $p(D)y=f$ の特解) $p(x)$ が (14) で与えられるとき、0 を含む $\mathbf{R}$ の区間 I で連続な $f\in C(I;\mathbf{C})$ に対して、

$$u(x):=e_{m_r,\lambda_r}*e_{m_{r-1},\lambda_{r-1}}*\cdots*e_{m_2,\lambda_2}*e_{m_1,\lambda_1}*f(x)$$

とおくと、

$$p(D)u=f,\quad u(0)=u'(0)=u''(0)=\cdots=u^{(n-1)}(0)=0$$

が成り立つ。

証明　まず

$$y_1=e_{m_1,\lambda_1}*f$$

とおくと

$$(D-\lambda_1)^{m_1}y_1 = f.$$

次に

$$y_2 = e_{m_2,\lambda_2} * y_1 = e_{m_2,\lambda_2} * e_{m_1,\lambda_1} * f$$

とおくと、

$$(D-\lambda_2)^{m_2}y_2 = y_1,$$

$$(D-\lambda_1)^{m_1}(D-\lambda_2)^{m_2}y_2 = y_1,$$

以下、同様に

$$y_j = e_{m_j,\lambda_j} * y_{j-1} = e_{m_j,\lambda_j} * \cdots e_{m_2,\lambda_2} * e_{m_1,\lambda_1} * f$$

とおくと、

$$(D-\lambda_j)^{m_j}y_{m_j} = y_{m_{j-1}},$$

$$(D-\lambda_1)^{m_1}(D-\lambda_2)^{m_2}\cdots(D-\lambda_j)^{m_j}y_j = f,$$

が成り立つことが分かる。ゆえに

$$y_r = e_{m_r,\lambda_r} * \cdots * e_{m_2,\lambda_2} * e_{m_1,\lambda_1} * f$$

は

$$p(D)y_r = (D-\lambda_1)^{m_1}(D-\lambda_2)^{m_2}\cdots(D-\lambda_r)^{m_r}y_r = f$$

を満たす。■

　畳み込みは結合律を満たすので、

$$G(x) := e_{m_r,\lambda_r} * e_{m_{r-1},\lambda_{r-1}} * \cdots e_{m_2,\lambda_2} * e_{m_1,\lambda_1}(x)$$

とおくと、

$$u(x) = G * f(x) = \int_0^x G(x-y)f(y)\,dy$$

となる。この関数 G をこの微分方程式の **Green 関数**と呼ぶ。

　簡単な場合に Green 関数を具体的に求めてみよう。

　まず $n=2$ の場合で、

$$e^{\alpha x} * e^{\beta x} = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\alpha-\beta} & (\alpha \neq \beta) \\ xe^{\alpha x} & (\alpha = \beta). \end{cases} \tag{17}$$

　これは簡単なので各自計算してチェックするとよい。$\beta \to \alpha$ のとき $e^{\alpha x} * e^{\beta x} \to e^{\alpha x} * e^{\alpha x}$ となることも分かる。

　また

$$\underbrace{e^{\alpha x} * e^{\alpha x} * \cdots * e^{\alpha x}}_{m\text{ 個}} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{\alpha x} = e_{m,\alpha}(x)$$

であることも分かる (一見大変そうだが、計算してみるとあっけないくらいに簡単である)。

　つまり G はすべての特性根 λ について $e^{\lambda x}$ の畳み込みを計算したものに他ならないことが分かる。

もう一つ結果が簡単になる場合を示しておこう。α_j $(j=1,2,\cdots,n)$ がすべて相異なるとき、

$$e^{\alpha_1 x}*\cdots*e^{\alpha_n x}=\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{\alpha_j x}}{\prod_{k\ne j}(\alpha_j-\alpha_k)}.$$

上にあげた (17) の $\alpha\ne\beta$ の場合はこの特別な場合に相当する。
証明　Laplace 変換を使う。

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha_1 x}*\cdots*e^{\alpha_n x}\right](s)=\prod_{j=1}^{n}\mathcal{L}\left[e^{\alpha_j x}\right](s)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{s-\alpha_j}.$$

右辺の分数を部分分数に分解する。

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{s-\alpha_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{s-\alpha_j}$$

とおくと

$$1=\sum_{j=1}^{n}A_j\prod_{k\ne j}(s-\alpha_k)$$

であるから、$s=\alpha_\ell$ を代入して

$$1=A_\ell\prod_{k\ne\ell}(\alpha_\ell-\alpha_k)\quad ゆえに\quad A_\ell=\left[\prod_{k\ne\ell}(\alpha_\ell-\alpha_k)\right]^{-1}.$$

逆変換することで

$$e^{\alpha_1 x}*\cdots*e^{\alpha_n x}=\sum_{j=1}^{n}A_j e^{\alpha_j x}.\blacksquare$$

この計算法 (Laplace 変換で Green 関数が計算できる) を理解すると、一般の場合の Green 関数の計算は本質的には

$$\frac{1}{p(s)}=\frac{1}{\prod_{j=1}^{r}(s-\alpha_j)^{m_j}}$$

の部分分数分解の計算であることが分かる。それがどうなるかについては研究中 (陽に書いている本がないところを見ると、きっと簡単な表示式はないのだと思う— 部分分数分解をした場合の係数を決定する話というと Heaviside の展開定理くらいしか思い浮かばないが、あれで簡単になるとは思えないなあ)。

以下少し見方を変えて、Green 関数は微分方程式の初期値問題の解として特徴づけられることを説明しよう。これは石村 [2] に載っていた説明を一般化したものである[9]。

[9]他の本では見たことがない (僕の不勉強？そもそも非同次方程式の特解が基本解系との畳み込みで書けることは高橋 [15] には載っていたが、そこでも Green 関数は出て来ない (なぜかな？)。初期値問題の Green 関数が出ているのは、神保 [10], 石村 [2] だけである。基本解系との畳み込みで書けること自体が、標準的な教科書と思われるポントリャーギンにもコディントン・レヴィンソンにも笠原にもない。そうやって解けること自体は古い演算子法の説明 (例えば矢野 [30]) にもあるのだが。もう一度繰り返すと、明示的な公式 $u=G*f$ を書いてあるのは、探した範囲で [10] と [2] だけであった。)。やっていることが極めて自然で (解は Green 関数で書けるはずで、Green 関数が満たすべき条件を導き、実際に求めてしまう)、好感が持てる (正直感動した)。これが初めて学ぶ学生に分りやすいかどうかは判断が難しいが、将来役に立つ重要な考え方に触れさせるというのは、特に数学科では教育的であるかもしれない。

命題 D.10 (Green 関数の特徴づけ) 与えられた n 階微分作用素 $p(D)$ $(p(x) \in \mathbf{C}[x])$ に対して、初期値問題

$$p(D)G(x) = 0,$$
$$G(0) = G'(0) = \cdots = G^{(n-2)}(0) = 0, \quad G^{(n-1)}(0) = 1$$

の解を G とすると、任意の $f \in C([0, \infty); \mathbf{C})$ に対して

$$u := G * f$$

は

$$p(D)u = f, \quad u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

を満たす。逆にこの条件を満たす G は上の初期値問題の解である。

証明

$$u(x) = \int_0^x G(x-y)f(y)\,dy$$

とするとき、

$$\begin{aligned}
u'(x) &= G(0)f(x) + \int_0^x G'(x-y)f(y)\,dy, \\
u''(x) &= G(0)f'(x) + G'(0)f(x) + \int_0^x G''(x-y)f(y)\,dy, \\
&\vdots \\
u^{(r)}(x) &= \sum_{j=0}^{r-1} G^{(j)}(0)f^{r-1-j}(x) + \int_0^x G^{(r)}(x-y)f(y)\,dy, \\
&\vdots \\
u^{(n-1)}(x) &= G(0)f^{(n-2)}(x) + \cdots + G^{(n-2)}(0)f(x) + \int_0^x G^{(n-1)}(x-y)f(y)\,dy, \\
u^{(n)}(x) &= G(0)f^{(n-1)}(x) + \cdots + G^{(n-1)}(0)f(x) + \int_0^x G^{(n)}(x-y)f(y)\,dy.
\end{aligned}$$

これから

$$u'(0) = u''(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G(0) = G'(0) = \cdots = G^{n-2}(0) = 0.$$

そしてこの条件が成り立つとき、

$$p(D)u = G^{(n-1)}(0)f(x) + \int_0^x p(D)G(x-y)f(y)\,dy.$$

ゆえに G が $p(D)G(x) = 0$, $G^{(n-1)}(0) = 1$ を満たすならば $p(D)u = f$. 逆に任意の f に対して、$p(D)u = f$ が成り立つならば $G^{(n-1)}(0) = 1$, $p(D)G(x) = 0$ も分かる。 ■

この定理は Green 関数の一意性の証明にもなっているわけか。ふと Titchmarsh の injectivity theorem でも一意性の証明になるな、と思いついたが、牛刀だろう。

D.5.1　2 階の場合の特解の求め方の説明

ここの構成は上で紹介した石村 [2] をほぼ踏襲している。

特解を求めるわけであるが、こちらで簡単な初期条件を指定してしまって構わないので、

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

を解くことにする。実は Green 関数と呼ばれる関数 $G = G(x)$ が存在して、この y は

$$y(x) = \int_0^x G(x-y) f(y)\, dy$$

と表される。この事実を **Duhamel**[10] **の原理**が成り立つ、とも言う。

相異なる特性根 α, β を持つとき、

$$G(x) = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} \tag{18}$$

である。特に $\alpha, \beta = a \pm ib$ $(a,\, b \in \mathbf{R},\, b \neq 0)$ のときは、

$$G(x) = e^{ax} \frac{\sin bx}{b}$$

である。

また特性根が重根 α であるとき、

$$G(x) = xe^{\alpha x} = xe^{-px/2} \tag{19}$$

である。これは

$$\lim_{\beta \to \alpha} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}$$

に等しいことに注意しよう (とてももっともらしい、ということだな)。

命題 D.11 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が相異なる 2 根 α, β を持つとき、

$$u(x) := \int_0^x G(x-y) f(y)\, dy, \quad G(x) := \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}$$

とおくと、u は

$$u'' + pu' + qu = f(x), \quad u(0) = u'(0) = 0$$

を満たす。

証明　まず $u(0) = 0$ は明らか。また $G(0) = 0$ より

$$u'(x) = G(x-x) f(x) + \int_0^x G'(x-y) f(y)\, dy = \int_0^x G'(x-y) f(y)\, dy$$

[10] J.M.C.Duhamel (1797–1872, フランス) は熱方程式に関する 1834 年の学位論文で、Duhamel の原理の原型を提示したという。

であるから、$u'(0)=0$. さらに $G'(0)=1$ より

$$u''(x)=G'(x-x)f(x)+\int_0^x G''(x-y)f(y)\,dy=f(x)+\int_0^x G''(x-y)f(y)\,dy.$$

以上の準備のもと、 $G''+pG'+qG=0$ に注意すると

$$u''+pu'+q=f(x)+\int_0^x \left[G''(x-y)+pG'(x-y)+qG(x-y)\right]f(y)\,dy=f(x)$$

が得られる。 ■

命題 D.12 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ が重根 α を持つとき、

$$u(x):=\int_0^x G(x-y)f(y)\,dy,\quad G(x):=xe^{\alpha x}$$

とおくと、u は

$$u''+pu'+qu=f(x),\quad u(0)=u'(0)=0$$

を満たす。

証明 証明は同様であるので省略する ($xe^{\alpha x}$ が微分方程式の解であることに注意せよ)。 ■

以下、G が (19), (18) で与えられることを導出しよう。

$$u(x)=\int_0^x G(x-y)f(y)\,dy$$

とするとき、G が何であっても $u(0)=0$ が成り立つ。また

$$u'(x)=G(0)f(x)+\int_0^x G'(x-y)f(y)\,dy$$

であるから、

$$u'(0)=G(0)f(0).$$

任意の f に対して $u'(0)=0$ であるためには

$$G(0)=0 \tag{20}$$

が必要である。次に

$$u''(x)=G'(0)f(x)+\int_0^x G''(x-y)f(y)\,dy$$

であるので、

$$\begin{aligned} 0 &= u''(x)+pu'(x)+qu(x)\\ &= G'(0)f(x)+\int_0^x \left[G''(x-y)+pG'(x-y)+qG(x-y)\right]f(y)\,dy. \end{aligned}$$

f によらずに成り立つために、

$$G'(0)=0,\quad G''+pG'+qG=0 \tag{21}$$

であることが必要である。(20), (21) がともに成り立つことから、G が求まる。まず微分方程式の解であることから、適当な定数 C_1, C_2 が存在して、

$$G(x)=\begin{cases} C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x} & (\text{特性方程式が相異なる 2 根 } \alpha, \beta \text{ を持つ場合}) \\ (C_1+C_2x)e^{\alpha x} & (\text{特性方程式が重根 } \alpha \text{ を持つ場合}). \end{cases}$$

$u(0)=u'(0)=0$ を満たすように C_1, C_2 を定めると (18), (19) が得られる。 ■

D.6　終りに？

まず、TO DO LIST である。

- 計算の実例を
- なるべく短い説明にまとめてみる

そろそろ終りかと思っていたのだが、笠原 [4] を読んで、また良く分からなくなってきた。そもそもこの手の問題で本当に面倒なものとはどういうやつなのか。またコンピューターが利用できる場合とそうでない場合とで事情が変ったりするのかどうかもよく分からない。

E　定数係数 2 階線型同次方程式の解法 (がらくた箱?)

(22) $$y''+py'+qy=f(x).$$

(23) $$y''+py'+qy=0.$$

E.1　なぜこの節があるか

本文中に示した二つの命題

命題 E.1 (定数係数 2 階線型同次方程式 (1) 相異なる特性根を持つ場合) 特性方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ が相異なる 2 根 α, β をもつとき、

(24) $$y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}\quad (A, B \text{ は任意定数})$$

は (23) の一般解である。すなわち、

(a) 任意の定数 A, B に対して、(24) で定まる y は (23) の解である。

(b) (23) の任意の解は、適当な定数 A, B を用いて、$y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$ と一意的に表される。

命題 E.2 (定数係数 2 階線型同次方程式 (2) 特性根が重根の場合) 特性方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ が重根 α をもつとき、

$$y=Ae^{\alpha x}+Bxe^{\beta x} \quad (A,\, B \text{ は任意定数}) \tag{25}$$

は (23) の一般解である。すなわち、

(a) (25) で定まる y は (23) の解である。

(b) (23) の任意の解は、適当な定数 $A,\, B$ を用いて、$y=Ae^{\alpha x}+Bxe^{\beta x}$ と一意的に表される。

の証明はなかなか悩ましい。この命題は通常、解の一意性定理を用いて、2 階線型同次方程式の解空間が 2 次元の線型空間であることを導くことで証明される。それは難しいと感じる学生が多いかもしれないと考えたので、別の証明を探してみた。一応微分演算子を用いた証明の焼き直し (微分演算子は見せない) を作ったが、果たしてそれで良いのか自信がもてない。微分演算子を簡単に導入して使うというのも考えているが…

他にもあるようで、もう少し追求してみよう。

E.2 第一積分を利用する

第 1 積分 (エネルギー) を利用して 1 回積分すると変数分離形の微分方程式になることから、いわゆる求積法だけで解くことができる。その方針での証明を探してみた。

E.2.1 1 階微分の項がなければ第一積分がすぐ求まり解決

$$y''+\omega^2 y=0 \quad (\omega \text{ は正定数})$$

は両辺に y' をかけて

$$y'y''+\omega^2 yy'=0.$$

これは

$$\left(\frac{1}{2}\left(y'\right)^2+\frac{1}{2}\omega^2y^2\right)'=0$$

に同値であるから、

$$\exists C\geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{2}\left(y'\right)^2+\frac{1}{2}\omega^2y^2=\frac{1}{2}\omega^2C^2.$$

これから

$$y'=\pm\sqrt{\omega^2C^2-\omega^2y^2}=\pm\omega\sqrt{C^2-y^2}.$$

これは変数分離形であり、通常の手順で[11]

$$\int\frac{dy}{\sqrt{C^2-y^2}}=\pm\omega\int dx.$$

[11] いわゆる分母 0 問題で、ここが必要条件で解けているのか怪しいという突っ込みはありそうだな。

積分を実行して

$$\mathrm{Arcsin}\,\frac{y}{C} = \pm\omega x + C' \quad (C' \text{ は積分定数}).$$

ゆえに

$$\frac{y}{C} = \pm\sin(\omega x + C').$$

これから

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x \quad (A,\ B \text{ は定数})$$

と書けることが分かる。逆にこの形をしている y が微分方程式の解であることは明らかである。

これとまったく同様にして、

$$y'' - \omega^2 y = 0$$

の一般解は

$$y = A\cosh\omega x + B\sinh\omega x \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

であることが分かる。

なお、

$$y'' = 0$$

の一般解は

$$y = Ax + B \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

E.2.2　1 階微分の項がある場合は変数変換で消去

1 階微分の項がある場合を解くには、変数変換で消去することを考える。

補題 E.1 $D = d/dx$ とおくと、任意の $\alpha \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{N}$ に対して

(26)
$$(D-\alpha)y = e^{\alpha x}D(e^{-\alpha x}),$$

(27)
$$(D-\alpha)^m y = e^{\alpha x}D^m(e^{-\alpha x}).$$

証明　前半の証明は簡単である。それを利用して帰納法で後半が証明できる。 ■

系 E.1 $y = e^{-px/2}z$ とおくとき、

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'' + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)z = 0.$$

証明 1

$y = e^{-px/2}z$ とおくと

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{p}{2}e^{-px/2} + e^{-px/2}z', \\ y'' &= -\frac{p}{2}\left(-\frac{p}{2}e^{-px/2}z + e^{-px/2}z'\right) + \left(-\frac{p}{2}z' + z''\right)e^{-px/2} = \left(\frac{p^2}{4}z - pz' + z''\right)e^{-px/2} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= \left(\frac{p^2}{4}z - pz' + z''\right)e^{-px/2} + \left(-\frac{p^2}{2}z + pz'\right)e^{-px/2} + qe^{-px/2}z \\ &= e^{-px/2}\left[z'' + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)z\right].\blacksquare \end{aligned}$$

証明 2

補題 E.1 を用いると

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= D^2y + pDy + qy = \left(D + \frac{p}{2}\right)^2 y + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)y \\ &= e^{-px/2}D^2(e^{px/2}y) + e^{-px/2}(e^{px/2}y) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{-px/2}D^2(e^{px/2}y) + e^{-px/2}(e^{px/2}y) = 0. \\ &\Longleftrightarrow \quad D^2(e^{px/2}y) + (e^{px/2}y) = 0.\blacksquare \end{aligned}$$

さて、

$$y'' + py' + qy = 0$$

で $y = e^{-px/2}z$ とおくと、方程式は z に関する

$$z'' + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)z = 0$$

に変換される。

(i) $q - p^2/4 > 0$ のとき

$$\omega = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

とおくと

$$z'' + \omega^2 z = 0$$

となるので、

$$z = A\cos\omega x + B\sin\omega x \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

ゆえに

(28) $$y = e^{-px/2}\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right) \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

(ii) $q - p^2/4 = 0$ のとき

$$z'' = 0$$

となるので、

$$z = Ax + B \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

ゆえに

(29) $$y = e^{-px/2}(Ax + B) \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

(iii) $q - p^2/4 < 0$ のとき

$$\omega = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

とおくと

$$z'' - \omega^2 z = 0$$

となるので、

$$z = A\cosh\omega x + B\sinh\omega x \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

ゆえに

$$y = e^{-px/2}(A\cosh\omega x + B\sinh\omega x) \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).\blacksquare \tag{30}$$

E.3　定数係数 1 階線型方程式の解の公式を用いて一回ずつ積分する方法

定数係数 1 階線型方程式の解の公式 (基本解との畳み込みで表現する) を二回用いて解くことができる。それで証明になる。

既に示したように次の補題が成り立つ。

補題 E.2 (定数係数 1 階線型方程式の解の公式) 定数係数 1 階線型常微分方程式

$$y' = ay + f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

の解は一意に存在して

$$y = y_0 e^{a(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{a(x-y)} f(y)\, dy.$$

$$y'' + py' + qy = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

が与えられたとき、特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 根を α, β とすると、

$$(D - \alpha)\left[(D - \beta)y\right] = 0.$$

そこで $v := (D - \beta)y$ とおくと

$$(D - \alpha)v = 0 \quad \text{i.e.} \quad v' = \alpha v, \quad v(x_0) = y'(x_0) - \beta y(x_0) = y_1 - \beta y_0.$$

補題を用いると

$$v(x) = (y_1 - \beta y_0) e^{\alpha(x-x_0)}. \tag{31}$$

一方、y は

$$(D - \beta)y = v \quad \text{i.e.} \quad y' = \beta y, \quad y(x_0) = y_0$$

の解なので、再び補題を用いて

$$y(x) = y_0 e^{\beta(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-y)} v(y)\, dy.$$

(31) を代入すると

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 e^{\beta(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-y)} \cdot (y_1 - \beta y_0) e^{\alpha(y-x_0)}\, dy \\ &= y_0 e^{\beta(x-x_0)} + (y_1 - \beta y_0) e^{\beta x - \alpha x_0} \int_{x_0}^{x} e^{(\alpha-\beta)y}\, dy. \end{aligned}$$

ところで

$$\int_{x_0}^{x} e^{(\alpha-\beta)y}\, dy = \begin{cases} (x - x_0) & (\alpha = \beta) \\ \dfrac{e^{(\alpha-\beta)x} - e^{(\alpha-\beta)x_0}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

ゆえに $\alpha = \beta$ の場合は

$$y = y_0 e^{\alpha(x-x_0)} + (y_1 - \alpha y_0) e^{\alpha x - \alpha x_0}(x - x_0) = e^{\alpha(x-x_0)} \left[y_0 + (y_1 - \alpha y_0)(x - x_0) \right],$$

$\alpha \neq \beta$ の場合は

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 e^{\beta(x-x_0)} + (y_1 - \beta y_0) e^{\beta x - \alpha x_0} \times \frac{e^{(\alpha-\beta)x} - e^{(\alpha-\beta)x_0}}{\alpha - \beta} \\ &= y_0 e^{\beta(x-x_0)} + \frac{y_1 - \beta y_0}{\alpha - \beta} \left[e^{\alpha(x-x_0)} - e^{\beta(x-x_0)} \right] \\ &= \frac{y_1 - \beta y_0}{\alpha - \beta} e^{\alpha(x-x_0)} + \frac{y_1 - \alpha y_0}{\beta - \alpha} e^{\beta(x-x_0)}. \end{aligned}$$

以上の議論をまとめておく。

命題 E.3 $p, q, y_0, y_1 \in \mathbf{C}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ とするとき、常微分方程式の初期値問題

$$y'' + py' + qy = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

は一意可解で、特性根を α, β としたとき、解は次のように表せる:

$$y = \begin{cases} e^{\alpha(x-x_0)} \left[y_0 + (y_1 - \alpha y_0)(x - x_0) \right] & (\alpha = \beta \text{ の場合}) \\ \dfrac{y_1 - \beta y_0}{\alpha - \beta} e^{\alpha(x-x_0)} + \dfrac{y_1 - \alpha y_0}{\beta - \alpha} e^{\beta(x-x_0)} & (\alpha \neq \beta \text{ の場合}). \end{cases}$$

E.4 一意性を素朴に証明

変数変換により、$y'' - \omega^2 y = 0$ または $y'' = 0$ または $y'' + \omega^2 y = 0$ に変換され、それについて初期値問題の解の一意性を素朴に証明する。

E.4.1 方針

前小節でやったように

$$y'' + py' + qy = 0$$

は変数変換により

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

$$y'' = 0,$$

$$y'' - \omega^2 y = 0$$

のどれかに帰着される。それぞれについて初期条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

を課した初期値問題について解の一意性がなりたつことを示せばよい。それには (線形性から) $y_0 = y_1 = 0$ のときに $y \equiv 0$ が成り立つことを示せば十分である。

E.4.2 $y'' + \omega^2 y = 0$ の場合

エネルギー $E(x)$ を

$$E(x) := \frac{1}{2}\left[(y')^2 + \omega^2 y^2\right]$$

で定義する。

$$E'(x) = y''y' + \omega^2 yy' = y'\left[y'' + \omega^2 y\right] = y' \cdot 0 = 0$$

であるから、エネルギーは x によらない定数関数であることが分かる。$y_0 = y_1 = 0$ であるばあいは、

$$E(x) \equiv E(x_0) = \frac{1}{2}\left[(y_1)^2 + \omega^2 (y_0)^2\right] = 0$$

であることから、

$$y \equiv y' \equiv 0.$$

これは一意性が成り立つことを示す。

E.4.3 $y'' = 0$ の場合

この場合、求積法で

$$y = y_1(x - x_0) + y_0$$

と解が求まり、当然一意性も成り立つ。

E.4.4 $y'' - \omega^2 y = 0$ の場合

(準備中 — どうやるのかな？)

E.5　一意性定理を用いる証明

補題 E.3

(32)
$$y'' + py' + qy = 0$$

の特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 根を α, β とする。

(1) $\alpha \neq \beta$ の場合、$e^{\alpha x}, e^{\beta x}$ が 1 次独立な (32) の解になる。

(2) $\alpha = \beta$ の場合、$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}$ が 1 次独立な (32) の解になる。

証明　解であることは本文中で証明済み。一次独立性を示すことが残っている。(工事中) ■

補題 E.4

$$y'' + py' + qy = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

の解は一意的である。

証明

$$u_1 := y, \quad u_2 := y', \quad \vec{u} := (u_1, u_2)^T$$

とおく。

$$\frac{d}{dx}\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -py' - qy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -pu_2 - qu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \vec{u},$$

$$\vec{u}(x_0) = \begin{pmatrix} u_1(x_0) \\ u_2(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \vec{u}, \quad \vec{u}_0 := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\frac{d}{dx}\vec{u} = A\vec{u}, \quad \vec{u}(x_0) = \vec{u}_0.$$

これは積分方程式

$$\vec{u}(x) = \vec{u}_0 + \int_{x_0}^{x} A\vec{u}(y)\,dy$$

と同値である。これが二つの解 $\vec{u} = \vec{u}(x), \vec{v} = \vec{v}(x)$ を持ったとしよう。

$$\vec{u}(x) - \vec{v}(x) = \int_{x_0}^{x} A\left(\vec{u}(y) - \vec{v}(y)\right) dy, \quad \vec{u}(x_0) - \vec{v}(x_0) = \vec{0}$$

となるので、$\vec{w}(x) := \vec{u}(x) - \vec{v}(x)$ とおくと、

$$\vec{w}(x) = \int_{x_0}^{x} A\vec{w}(y)\,dy, \quad \vec{w}(x_0) = \vec{0}.$$

x_0 を含む任意のコンパクト区間 I を取り、

$$M := \max_{x\in I} \|\vec{w}(x)\|$$

とおくと、任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\|\vec{w}(x)\| \le \|A\| M \frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

が成り立つことが分かる。$n \to \infty$ として

$$\vec{w}(x) = 0 \quad (x \in I).$$

I は任意だったから $\vec{w} \equiv 0$. ゆえに $\vec{u} = \vec{v}$.

E.6 演算子を駆使する方法

(工事中)

補題 E.5

$$f(D)e^{\lambda t} = f(\lambda)e^{\lambda t}$$

補題 E.6

$$(f+g)(D) = f(D) + g(D), \quad (f \cdot g)(D) = f(D)g(D).$$

補題 E.7

$$D^j(e^{\lambda x}u) = e^{\lambda x}(D+\lambda)^j u$$

$$f(D)\left(e^{\lambda x}u(x)\right) = e^{\lambda x} f(D+\lambda)u(x).$$

あるいは

$$e^{-\lambda x} f(D) e^{\lambda x} = f(D+\lambda).$$

$\alpha \neq \beta$ とするとき、$e^{\alpha x}$ と $e^{\beta x}$ の 1 次独立性を示そう。

$$C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} = 0$$

とするとき、$D - \alpha$ を施すと

$$C_2(\beta - \alpha)e^{\beta x} = 0.$$

これから $C_2 = 0$. すると明らかに $C_1 = 0$ となり、$C_1 = C_2 = 0$ が示された。

$\alpha = \beta$ とするとき、$e^{\alpha x}$ と $xe^{\alpha x}$ の 1 次独立性を示そう。

$$C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} = 0$$

とするとき、$D - \alpha$ を施すと

$$C_2(\beta - \alpha)e^{\beta x} = 0.$$

これから $C_2 = 0$. すると明らかに $C_1 = 0$ となり、$C_1 = C_2 = 0$ が示された。

E.7 どれが良いか

色々考えると、早いうちからベクトル値の微分方程式に慣れておいた方がよい。そういう準備があれば、一般的な一意性定理から線型方程式の解空間の次元が n であることを示すのは大変ではないかも知れない。

F 演習問題

2004 年度の基礎数学 IV で配布したプリントの問題 (の一部) とその解答。

F.1 変数分離形

プリントの 5.1 の 3 (小問が全部で 27 個ある) を解け[12]。
(1) $x^3y' + y^2 = 0$ (2) $y' = 3y^{2/3}$ (3) $y' = \sqrt{y-1}$ (4) $x^2y' + y^2 = 0$ (5) $y^3 + x^6y' = 0$ (6) $y - xy' = x^2y'$ (7) $y' + ay^2 = 0$ (8) $\sin x \sin^2 y - y' \cos x = 0$ (9) $(1+x)y + (1-y)xy' = 0$ (10) $y' \tan x = \cot y$ (11) $(1+x^3)y' + x^2y^2 = 0$ (12) $y' = a(b^2 - y^2)$ (13) $y' = \dfrac{\cos^2 y}{1+x^2}$ (14) $y' = \dfrac{1+\sin x}{\sec^2 x}$ (15) $y' = \dfrac{xy}{x^2-1}$ (16) $x(1+y^2)y' = y(1+x^2)$ (17) $yy' = x(y+1)$ (18) $xy' - y^2 + 1 = 0$ (19) $y' = e^{2(x+y)}$ (20) $y' = e^{-(x+y)}$ (21) $y' = |y|$ (22) $y' = \dfrac{x}{y}$ (23) $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$ (24) $y' = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ (25) $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$ (26) $y' = \dfrac{y^2}{x^3}$ (27) $y' = \dfrac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$

(1)

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^3}$$

を積分して

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = \frac{2Cx^2 - 1}{2x^2}.$$

これを y について解いて、

$$y = \frac{x^2}{Cx^2 - 1/2}.$$

(2)

$$y^{-2/3}dy = 3dx$$

を積分して

$$3y^{1/3} = 3x + 3C \quad \therefore \quad y^{1/3} = x + C$$

これを 3 乗して

$$y = (x+C)^3.$$

これは特異解がある。

(3)

$$(y-1)^{-1/2}dy = dx$$

[12] もともとは大学数学教育研究会編『大学課程 微分積分学概説 [増補版]』[12] から採ったものである。

を積分して、

$$2(y-1)^{1/2} = x + C.$$

y について解いて

$$y = 1 + \frac{(x+C)^2}{4}.$$

(4)

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{x^2}dx$$

を積分して

$$y^{-1} = -\frac{1}{x} + C = \frac{Cx-1}{x}$$

y について解いて

$$y = \frac{x}{Cx-1}.$$

(5)

$$-y^{-3}dy = x^{-6}dx$$

を積分して

$$\frac{1}{2}y^{-2} = -\frac{1}{5}x^{-5} + C$$

y について解いて

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\left(C - \frac{1}{5x^5}\right)}}.$$

配布しているプリント p.20 の解答では

$$y^2 = \frac{5x^2}{Cx^5 - 2}$$

となっているが、これは

$$y^2 = \frac{5x^{5}}{Cx^5 - 2}$$

が正しい。

(6) まず dy/dx をまとめるのが先。

$$y = (x + x^2)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x + x^2}$$

を積分して

$$\log|y| = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \log|x| - \log|x+1| + \log C = \log C \left|\frac{x}{x+1}\right|$$

$$y = C'\frac{x}{x+1}.$$

(8)

$$\frac{dy}{\sin^2 y} = \tan x\, dx$$

を積分して

$$-\cot y = -\log|\cos x| - \log C$$

y について解いて

$$y = \mathrm{Arccot}\,(\log C \cos x)$$

(9)

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right) dy = \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

であるから、

$$y - \log|y| = x + \log|x| + C.$$

$F(y) = y - \log y$ とおくと、F は $0 < y < 1$ で単調減少、$y > 1$ で単調増加。

(10)

$$\tan y\, dy = \cot x\, dx$$

$$-\log|\cos y| = \log|\sin x| + \log C$$

$$\frac{1}{|\cos y|} = C\,|\sin x|$$

$$\cos y = \frac{C'}{\sin x}$$

$$y = \mathrm{Arccos}\left(\frac{C'}{\sin x}\right).$$

F.2　一階線型微分方程式

次の微分方程式の一般解を求めなさい。a, b, c, d は定数とする。

(1) $y' + ay = 0$ (2) $y' + ay = b$ (3) $y' + y\cot x = \mathrm{cosec}\, x$ $(0 < x < \pi/2)$ (4) $y' + 2xy = x$
(5) $y' - y\tan x = \sin x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ (6) $y' - 2xy = e^{x^2}$ (7) $xy' + y = x\log x$ $(x > 0)$
(8) $y' + ay = e^{bx}$ (9) $y' + \dfrac{a}{x}y = 0$ (10) $y' - xy = x$ (11) $y' + \dfrac{1}{x}y = 1 - x^2$ $(x > 0)$
(12) $xy' + y = 4x(1 + x^2)$ (13) $xy' - (y + x^2\sin^2 x) = 0$ (14) $y' + y\cos x = -\sin x e^{-\sin x}$
(15) $x(1 - x^2)y' + (x^2 - 1)y = x^3$ $(0 < x < 1)$ (16) $y' - ay = \sin x$ (17) $(1 + x^2)y' = xy\sqrt{1 + x^2}$
(18) $y' + (1 + x^2)y = e^{-x^3/3}$ (19) $y' + ay = bx^2 + cx + d$ (20) $xy' + (1 + x)y = e^x$

(1) $y = Ce^{-ax}$

(2) $y' = -ay + b$ だが、$y' = -ay$ の一般解は $y = Ce^{-ax}$ (C は任意定数) である。そこで $y = c(x)e^{-ax}$ とおくと、

$$y' = c'(x)\cdot e^{-ax} + c(x)\cdot e^{-ax}(-a) = -ay + c'(x)e^{-ax}.$$

それゆえ微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)e^{-ax} = b.$$

$c'(x) = be^{ax}$ と解けるので $c(x) = \frac{a}{b}e^{ax} + C$ (C は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = c(x)e^{-ax} = Ce^{-ax} + \frac{a}{b}.$$

(3) $y' = -(\cot x)y + \dfrac{1}{\sin x}$ であるが、まず $y' = -(\cot x)y$ の一般解を求める。

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-\cot x)\,dx = -\log|\sin x| + \log C = -\log \sin x + \log C = \log \frac{C}{\sin x}$$

から

$$y = \pm \frac{C}{\sin x} = \frac{C'}{\sin x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = \dfrac{c(x)}{\sin x}$ とおくと、

$$y' = \frac{c'(x)}{\sin x} + c(x)\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{y}{\sin x} + \frac{c'(x)}{\sin x}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$\frac{c'(x)}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}.$$

これから $c'(x) = 1$. ゆえに $c(x) = x + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = \frac{c(x)}{\sin x} = \frac{x + C''}{\sin x}.$$

(4) $y' = -2xy + x$ であるが、まず $y' = -2xy$ の一般解を求める。

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-2x)\,dx = -x^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

より $y = \pm e^C e^{-x^2} = C'e^{-x^2}$ (C' は任意定数). そこで $y = c(x)e^{-x^2}$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} + c(x) \cdot e^{-x^2}(-2x) = -2xy + c'(x)e^{-x^2}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)e^{-x^2} = x.$$

これから $c'(x) = xe^{x^2}$. ゆえに

$$c(x) = \frac{e^{x^2}}{2} + C \quad (C'' \text{ は任意定数}).$$

ゆえに求める一般解は

$$y = c(x)e^{-x^2} = \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C''\right)e^{-x^2} = C''e^{-x^2} + \frac{1}{2}.$$

(5) $y' = 2xy + e^{x^2}$ であるが、まず $y' = 2xy$ の一般解を求める。

$$\frac{dy}{y} = \int 2x\,dx = x^2 + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

これから

$$y = \pm e^C e^{x^2} = C' e^{x^2} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = c(x)e^{x^2}$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x) \cdot e^{x^2}(2x) = 2xy + c'(x)e^{x^2}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)e^{x^2} = e^{x^2}.$$

これから $c'(x) = 1$. ゆえに $c(x) = x + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = c(x)e^{x^2} = (x + C'')e^{x^2}.$$

(6) $y' = 2xy + e^{x^2}$ であるが、まず $y' = 2xy$ の一般解を求める。

$$\frac{dy}{y} = \int 2x\,dx = x^2 + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

これから

$$y = \pm e^C e^{x^2} = C' e^{x^2} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = c(x)e^{x^2}$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x) \cdot e^{x^2}(2x) = 2xy + c'(x)e^{x^2}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)e^{x^2} = e^{x^2}.$$

これから $c'(x) = 1$. ゆえに $c(x) = x + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = c(x)e^{x^2} = (x + C'')e^{x^2}.$$

(7) $y' = -\dfrac{y}{x} + \log x$ であるが、まず $y' = -\dfrac{y}{x}$ の一般解を求める。

$$\frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} = -\log|x| + \log C = \log\frac{C}{|x|} \quad (C \text{ は正の任意定数}).$$

これから

$$y = \pm\frac{C}{x} = \frac{C'}{x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = c(x)/x$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot \frac{1}{x} + c(x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x} + \frac{c'(x)}{x}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$\frac{c'(x)}{x} = \log x.$$

これから $c'(x) = x \log x$. ゆえに

$$c(x) = \int x \log x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \log x \, dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C'' \quad (C'' \text{ は任意定数}$$

ゆえに求める一般解は

$$y = \frac{c(x)}{x} = \frac{x \log x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{C''}{x}.$$

(8) $y' = -ay + e^{bx}$ であるが、まず $y' = -ay$ の一般解は $y = Ce^{-ax}$ (C は任意定数) である。そこで $y = c(x)e^{-ax}$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot e^{-ax} + c(x) \cdot e^{-ax}(-a) = -ay + c'(x)e^{-ax}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)e^{-ax} = e^{bx}.$$

これから $c'(x) = e^{(a+b)x}$. ゆえに $c(x) = \dfrac{e^{(a+b)x}}{a+b} + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = c(x)e^{-ax} = \frac{e^{bx}}{a+b} + C''e^{-ax}.$$

(9)

(10)

(11) $y' = -\dfrac{y}{x} + (1 - x^2)$ であるが、まず $y' = -y/x$ の一般解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(-\frac{1}{x}\right) Dx = -\log|x| + \log C = \log \frac{C}{|x|} \quad (C \text{ は正の任意定数})$$

より

$$y = \pm \frac{C}{x} = \frac{C'}{x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = c(x)/x$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot \frac{1}{x} + c(x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x} + \frac{c'(x)}{x}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$\frac{c'(x)}{x} = 1 - x^2.$$

これから $c'(x) = x - x^3$. ゆえに $c(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = \frac{c(x)}{x} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{C''}{x}.$$

(12)

(13)

(14) $y' = -y\cos x - \sin x e^{-\sin x}$ であるが、まず $y' = -y\cos x$ の一般解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-\cos x)\ Dx = -\sin x + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

より

$$y = \pm e^{C} e^{-\sin x} = C' e^{-\sin x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = c(x)e^{-\sin x}$ とおくと、

$$y' = c'(x)\cdot e^{-\sin x} + c(x)\cdot e^{-\sin x}(-\cos x) = -(\cos x)y + c'(x)e^{-\sin x}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x)e^{-\sin x} = -\sin x e^{-\sin x}.$$

これから $c'(x) = -\sin x$. ゆえに $c(x) = \cos x + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = c(x)e^{-\sin x} = C'' e^{-\sin x} + e^{-\sin x}\cos x.$$

(15)

(16)

(17) これは変数分離形だ。$y'/y = x/\sqrt{1+x^2}$ であるから、

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2} + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

$$y = \pm e^{C} \exp\sqrt{1+x^2} = C' \exp\sqrt{1+x^2} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

(18)

(19)

(20) $y' = -\dfrac{1+x}{x}y + \dfrac{e^x}{x}$ であるが、まず $y' = -(1+x)y/x$ の一般解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ Dx$$

より

$$\log|y| = -(x + \log|x|) + \log C = \log\frac{C}{|x|e^x} \quad (C \text{ は正の任意定数}).$$

$$y = \pm\frac{C}{xe^x} = \frac{C'}{xe^x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

そこで $y = \dfrac{c(x)}{xe^x}$ とおくと、

$$y' = c'(x) \cdot \frac{1}{xe^x} + c(x) \ = -\frac{1+x}{x} y + c'(x) \frac{1}{xe^x}.$$

ゆえに求める微分方程式の解であるための必要十分条件は

$$c'(x) \frac{1}{xe^x} = \frac{e^x}{x}.$$

これから $c'(x) = e^{2x}$. ゆえに $c(x) = \dfrac{1}{2} e^{2x} + C''$ (C'' は任意定数). ゆえに求める一般解は

$$y = \frac{c(x)}{xe^x} = \frac{C}{xe^x} + \frac{e^x}{2x}.$$

F.3 定数係数 2 階線型非同次方程式

(1) $y'' - 6y' + 8y = e^x$. $L[y] = y'' - 6y' + 8y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ で、特性根は $\lambda = 2, 4$ なので、一般解は $z = Ae^{2x} + Be^{4x}$ (A, B は任意定数). $L[y] = e^x$ の特解 u を求めるために $u = Ce^x$ (C は定数) とおく。$L[u] = L[Ce^x] = (C - 6C + 8C)e^x = 3Ce^x$ なので u が特解であるためには、$3C = 1$ ゆえに $C = \dfrac{1}{3}$. ゆえに $L[y] = e^x$ の一般解は $y = u + z = \dfrac{1}{3} e^x + Ae^{2x} + Be^{4x}$.

(2) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$. $L[y] = y'' - 3y' + 2y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ で、特性根は $\lambda = 1, 2$ なので、一般解は $z = Ae^x + Be^{2x}$ (A, B は任意定数). $L[y] = \sin x$ の特解 u を求めるために $u = k \cos x + \ell \sin x$ (k, ℓ は定数) とおく。$L[u] = L[k \cos x + \ell \sin x] = (-k \cos x - \ell \sin x) - 3(-k \sin x + \ell \cos x) + 2(k \cos x + \ell \sin x) = (k - 3\ell) \cos x + (3k + \ell) \sin x$ なので、u が特解であるためには、

$$k - 3\ell = 0,$$
$$3k + \ell = 1.$$

これを解いて $k = \dfrac{3}{10}$, $\ell = \dfrac{1}{10}$. ゆえに $u = \dfrac{3}{10} \cos x + \dfrac{1}{10} \sin x$. ゆえに $L[y] = \sin x$ の一般解は $y = u + z = \dfrac{3}{10} \cos x + \dfrac{1}{10} \sin x + Ae^x + Be^{2x}$.

(3) $y'' - a^2 y = xe^{ax}$. $L[y] = y'' - a^2 y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - a^2 = 0$ で、特性根は $\lambda = \pm a$. これは $a \neq 0$ の場合は $a = 0$ の場合は重根 0.

  (i) $a \neq 0$ の場合、相異なる 2 根なので、一般解は $z = Ae^{ax} + Be^{-ax}$ (A, B は任意定数). $L[y] = xe^{ax}$ の特解を求めるために、$u = (px^2 + qx)e^{ax}$ とおくと[13]、$L[u] = L[(px^2 + qx)e^{ax}] =$ (途中計算略) $= [4apx + 2(aq + p)]\, e^{ax}$. これが xe^{ax} に等しくなるには

$$4ap = 1,$$
$$aq + p = 0.$$

[13] a が重根でないとすると、右辺が e^{ax} ならば $u = pe^{ax}$ とおくところだが、右辺に x がかかっているので、$u = (px + q)e^{ax}$ とする。そして実は a が重根なので x をかけて $u = (px^2 + qx)e^{ax}$ とする。

これから $p = \dfrac{1}{4a}$, $q = -\dfrac{1}{4a^2}$. ゆえに $u = \left(\dfrac{1}{4a}x^2 - \dfrac{1}{4a^2}x\right)e^{ax}$. ゆえに $L[y] = xe^{ax}$ の一般解は $y = u + z = \left(\dfrac{1}{4a}x^2 - \dfrac{1}{4a^2}x\right)e^{ax} + Ae^{ax} + Be^{-ax}$.

(ii) $a = 0$ の場合、$\pm a = 0$ (重根) なので、一般解は $z = Ae^{0x} + Bxe^{0x} = A + Bx$ (A, B は任意定数). $a = 0$ の場合 $L[y] = xe^{ax}$ は $y'' = x$ ということだから、容易に $u = \dfrac{x^3}{6}$ が特解であることが分かる。ゆえに $L[y] = xe^{ax}$ の一般解は $y = u + z = \dfrac{x^3}{6} + A + Bx$.

(4) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$. $L[y] = y'' + 2y' + y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ で、特性根は $\lambda = -1$ (重根) なので、一般解は $z = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ (A, B は任意定数). $L[y] = e^{-x}$ の特解 u を求めるために、$u = kx^2e^{-x}$ (k は定数) とおく[14]。$L[u] = L[kx^2e^{-x}] =$ (途中計算略) $= 2ke^{-x}$ なので、u が特解であるためには、$2k = 1$ すなわち $k = \dfrac{1}{2}$. ゆえに $u = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$. ゆえに $L[y] = e^{-x}$ の一般解は $y = u + z = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.

(5) $y''+2y'+y = x^2$. $L[y] = y''+2y'+y$ とおく。(これは前問と同じなので) 対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の一般解は $z = Ae^{-x}+Bxe^{-x}$ (A, B は任意定数). $L[y] = x^2$ の特解 u を求めるために、$u = px^2+qx+r$ (p, q, r は定数) とおく[15]。$L[u] = L[px^2+qx+r] =$ (途中計算略) $=$ $px^2 + (4p+q)x + (2p+2q+r)$ なので、u が特解であるためには、$2k = 1$ すなわち $k = \dfrac{1}{2}$. ゆえに $u = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$. ゆえに $L[y] = e^{-x}$ の一般解は $y = u + z = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.

(6) $y'' - 6y' + 9y = x + e^x$. $L[y] = y'' - 6y' + 9y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ で、特性根は $\lambda = 3$ (重根) なので、一般解は $z = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$ (A, B は任意定数). $L[y] = x$ の特解 u を求めるために、$u = px + q$ (p, q は定数) とおく。$L[u] = L[px + q] =$ (途中計算略) $= 9px + (9q - 6p)$ なので、u が特解であるためには、

$$
\begin{aligned}
9p &= 1,\\
9q - 6p &= 0.
\end{aligned}
$$

これから $p = 1/9$, $q = 2/27$. ゆえに $u = \dfrac{1}{9}x + \dfrac{2}{27}$.

$L[y] = e^x$ の特解 v を求めるために、$u = ke^x$ (k は定数) とおく。$L[u] = L[ke^x] =$ (途中計算略) $= 4ke^x$ なので、u が特解であるためには、$4k = 1$ すなわち $k = \dfrac{1}{4}$. ゆえに $u = \dfrac{1}{4}e^x$.

ゆえに $L[y] = x + e^x$ の一般解は $y = u + v + z = \dfrac{1}{9}x + \dfrac{2}{27} + \dfrac{1}{4}e^x + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.

(7) $y'' - 6y' + 9y = \cos x$. $L[y] = y'' - 6y' + 9y$ とおく。対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ で、特性根は $\lambda = 3$ (重根) なので、一般解は $z = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$

[14] -1 が特性根でなければ $u = ke^{-x}$ とおけば良いが、重根なので x^2 をかける。

[15] 0 が特性根でないので、単に右辺の多項式の次数と同じ 2 次多項式とおけばよい。

(A, B は任意定数). $L[y]=x$ の特解 u を求めるために、$u=k\cos x+\ell\sin x$ (k, ℓ は定数) とおく。$L[u]=L[k\cos x+\ell\sin x]=$ (途中計算略) $=(8k-6\ell)\cos x+(8\ell-6k)\sin x$ なので、u が特解であるためには、

$$\begin{aligned} 8k-6\ell&=1,\\ -6k+8\ell&=0. \end{aligned}$$

これから $k=\dfrac{2}{25}$, $\ell=-\dfrac{3}{25}$. ゆえに $u=\dfrac{2}{25}x-\dfrac{3}{25}$.

ゆえに $L[y]=\cos x$ の一般解は $y=u+z=\dfrac{2}{25}x-\dfrac{3}{25}+Ae^{3x}+Bxe^{3x}$.

(8) $y''-2y'=1+x$. $L[y]=y''-2y'$ とおく。対応する同次方程式 $L[z]=0$ の特性方程式は $\lambda^2-2\lambda=0$ で、特性根は $\lambda=0, 2$ なので、一般解は $z=Ae^{2x}+B$ (A, B は任意定数). $L[y]=x$ の特解 u を求めるために、$u=(kx+\ell)x$ (k, ℓ は定数) とおく[16]。$L[u]=L[kx^2+\ell x]=$ (途中計算略) $=-2kx+(2k-\ell)$ なので、u が特解であるためには、

$$\begin{aligned} -2k&=1,\\ 2k-\ell&=1. \end{aligned}$$

これから $k=-\dfrac{1}{2}$, $\ell=-2$. ゆえに $u=-\dfrac{1}{2}x^2-2x$.

ゆえに $L[y]=\cos x$ の一般解は $y=u+z=-\dfrac{1}{2}x^2-2x+Ae^{2x}+B$. ■

G 微分方程式歴史覚え書き

(これは 2003 年度応用解析 II の講義ノートから抜き出した。ときどきチェックしてマージすること。)

数学の歴史についての読み物と言うと、ベル「数学をつくった人々」[23] や遠山・矢野編集「100 人の数学者」[18] が手に取って読みやすい本であろう (その他にブルバキ「数学史」というのもあるが、微分方程式についてはあまり書かれていない)。

G.1 微分方程式のはじまり — Newton

Newton (Isaac Newton, 1642–1727) は微分積分学の創始者、力学の創始者 (あるいは理論物理学の創始者) として有名だが、力学の問題を解くために多くの微分方程式を解いている (最短降下線の問題、懸垂線[17])。著書『プリンキピア・マセマティカ』(自然哲学の数学的原理, 1687 年出版) の中で万有引力の法則を仮定すると惑星の運動に関する Kepler の法則[18]が導か

[16] 0 が特性根でなければ $u=kx+\ell$ とおけばよいが、0 は特性方程式の単根なので、x をかけて $u=(kx+\ell)x$ とする。

[17] なお、最近の学生はこの手の物理にうといので、参考書を紹介しておく。高桑 [13] は、大学初年級の物理学に現われる常微分方程式を数学的に簡潔に説明してあり、多分現在の数学科の学生にも読みやすいと思われる。

[18] Yohannes Kepler (1571–1630) は偉大な天文観測家である Ticho Brahe (1546–1601) の助手であったが、Brahe の死後に彼の観測結果を整理分析することで有名な Kepler の法則を発見した。第一、第二法則は 1609 年に、第三法則は 1619 年に発表された。

れることを証明した[19]。プリンキピアは微積分を使わない古典的な書き方で書かれているが、本質的には運動方程式 (それは 2 階の常微分方程式である) を解くことによって解決された。

ニュートンのプリンキピア・マセマティカに関する解説としては、筆者の目に止まった本の中から、Gamov(ガモフ) [5], チャンドラセカール [11], Arnold [1] をあげておく。[5] には現代の普通の物理学の言葉で、ニュートンがいかに万有引力の法則を発見し、Kepler の法則を証明したかが書いてある。[11] はプリンキピアを真っ正面から読解するという本である。[1] は著名な力学系の研究者である著者による歴史読み物である。

Newton からライバル Leibniz への手紙

以下は遠山 [17] に載っている話。Newton は 1676 年 10 月に次のような暗号文 (鍵はないので作った本人にしか解けやしない) を Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) に送ったそうである。

> aaaaaa cc d æ eeeeeeeeeeeee ff iiiiiii lll nnnnnnnnn oooo qqqq rr ssss ttttttttt vvvvvvvvvvvv x

これは並べ替えによって

> Data æqvatione qvotcvnqve flventes qvantitates involvente flvxiones invenire, et vice versa.

というラテン語の文になり、その意味は

> 「いくつかの流量をふくむ方程式が与えられているとき、流率をもとめること、また逆に流率から流量をもとめること」

となる。遠山先生の解釈によると「流量から流率をもとめるのは微分であり、逆に流率から流量をもとめることは微分方程式を解くことなのである」。つまり Newton は自分が微分方程式を発見 (発明?) したことをライバルには教えずに、自分が発見したという証拠を残しておこうとした、ということなのでしょう (なかなか世知辛いですね)。

H　数式処理系で常微分方程式の一般解を求める

Mathematica, Maple のような数式処理系で常微分方程式の求積法を実行できる。ここでは Mathematica の `DSolve` を使ってみよう。

H.1　変数分離形

演習問題の (1)

$$x^3y' + y^2 = 0$$

[19] 見方によっては、プリンキピアは、ただ一つのこと (Kepler の法則) を証明するために書かれた書物であり、それを書くために微分積分学、力学を打ち立てる必要があった、つまり Kepler の法則を証明するために微分積分学と力学が作られた、となるであろう。

を解くには

```
DSolve[x^3 y'[x]+y[x]^2==0,y,x]
```

とする。

```
                           2
                       2 #1
Out[13]= {{y -> (------------ & )}}
                          2
                 -1 + #1  C[1]
```

これは

$$y = \frac{2x^2}{cx^2 - 1}$$

ということを意味している。正しく解けている。

続いて (2),

$$y' = 3y^{2/3}$$

```
DSolve[y'[x]==3 (y[x])^(2/3),y,x]
```

```
                      3       2                  2       3
Out[14]= {{y -> (#1  - 3 #1  C[1] + 3 #1 C[1]  - C[1]  & )}}
```

これは

$$y = x^3 - 3Cx^2 + 3C^2x - C^3 = (x - C)^3$$

ということを意味している。これも正しく解けている。

続いて (3),

$$y' = \sqrt{y - 1}$$

```
DSolve[y'[x]==Sqrt[y[x]-1],y]
```

```
                         2                    2
                  4 + #1  - 2 #1 C[1] + C[1]
Out[15]= {{y -> (--------------------------- & )}}
                                4
```

これは

$$y = \frac{4 + x^2 - 2Cx + C^2}{4} = \frac{(x - C)^2 + 4}{4} = 1 + \frac{(x - C)^2}{4}$$

ということを意味している。これも正しく解けている。

続いて (4)

$$x^2y' + y^2 = 0$$

```
DSolve[x^2 y'[x]+y[x]^2==0,y,x]
```

```
                         #1
Out[16]= {{y -> (------------ & )}}
                 -1 + #1 C[1]
```

これは

$$y = \frac{x}{Cx - 1}$$

ということを意味している。これも正しく解けている。

続いて (6)

$$y - xy' = x^2 y'$$

```
DSolve[y[x]-x y'[x]==x^2 y'[x],y,x]
```

```
                   Log[#1] - Log[1 + #1]
Out[17]= {{y -> (E                      C[1] & )}}
```

これは

$$y = Ce^{\log x - \log(1+x)} = \frac{Cx}{x+1}$$

ということを意味している。これも正しく解けている。

続いて (9)

$$(1 + x)y + (1 - y)xy' = 0$$

```
DSolve[(1+x)y[x]+(1-y[x])x y'[x]==0,y,x]
```

しかし、これは警告が出る。

```
InverseFunction::ifun:
   Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued
    inverses.

Solve::ifun: Inverse functions are being used by Solve, so some
solutions may
     not be found.

                                  -#1 - C[1]
                                 E
Out[18]= {{y -> (-ProductLog[-(-----------)] & )}}
                                     #1
```

ちなみにこの解は

$$y - \log|y| = x + \log|x| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であり、y について解くのは確かに難しい。
　続いて (10)

$$y' \tan x = \cot y$$

```
DSolve[y'[x]Tan[x]==Cot[y[x]],y,x]
```

これは何故か解けない。ちなみに解は

$$y = \operatorname{Arccos} \frac{C}{\sin x} \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。何か困難があるのだろうか？

I　Kepler 運動

　(工事中)
　藤田 [21] にやさしく (ただし少し簡略化されている) 解説されている。
　周期の話が高野 [14] にあった。
　小野寺 [3] に「惑星の公転運動のフーリエ解析」という章がある。もっともこれはベッセル関数入門の方がよいかも。

J　水素原子のエネルギー準位

　高野恭一, 常微分方程式, 朝倉書店 ().

K　適切性

　連続かつ Lipschitz ならば解が存在するというのは、普通 Picard の定理という。Picard の逐次近似法を使うからか。解の存在範囲が違うのに Lindölef の定理というのがある。
　連続だけで局所解の存在を保証するのは Cauchy の定理。

K.1　一意性

　一意性定理の証明は比較的簡単なので紹介しよう。

命題 K.1

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (x \in I),$$

$$y(x_0) = y_0$$

の解 $y = \varphi_1(x)$ $(x_0 \le x \le x_1)$, $y = \varphi_2(x)$ $(x_0 \le x \le x_2)$ に対して

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad (x_0 \le x \le x_* := \min\{x_1, x_2\}).$$

証明　φ_1, φ_2 が解であることから、

$$\varphi_j(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_j(t))\, dt \quad (j = 1, 2)$$

が成り立つ。$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ とおくと、

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \left[f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t)) \right].$$

ゆえに

$$|\varphi(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|\, dt \le \int_{x_0}^{x} L\, |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\; dt = L \int_{x_0}^{x} |\varphi(t)|\; dt.$$

$M = \max_{x \in [x_0, x_*]} |\varphi(x)|$ とおくと、

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)| &\le LM(x - x_0), \\
|\varphi(x)| &\le L \int_{x_0}^{x} LM(t - x_0)\, dt = L^2 M \frac{(x - x_0)^2}{2}, \\
|\varphi(x)| &\le L \int_{x_0}^{x} L^2 M \frac{(t - x_0)^2}{2}\, dt = L^3 M \frac{(x - x_0)^3}{3!},
\end{aligned}$$

以下帰納的に

$$|\varphi(x)| \le M \frac{[L(x - x_0)]^n}{n!}.$$

ゆえに

$$|\varphi(x)| \le M \frac{[L(x_* - x_0)]^n}{n!}.$$

これから $\varphi \equiv 0$. ゆえに $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. ■

命題 K.2 (局所 Lipschitz ならば一意)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (x \in I),$$

$$y(x_0) = y_0$$

の解 $y = \varphi_1(x)$ $(x_0 \le x \le x_1)$, $y = \varphi_2(x)$ $(x_0 \le x \le x_2)$ に対して

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad (x_0 \le x \le x_+ := \min\{x_1, x_2\}).$$

証明　まず

$$\overline{x} := \sup E, \quad E := \{\beta \in [x_0, x_+]; \forall x \in [x_0, \beta] \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\}$$

とおく。$x_0 \in E$ であるから $E \ne \emptyset$ であることに注意。x_+ が E の上界になるので E は上に有界で、有限な $\sup E$ が定まる。

1 主張: $\varphi_1 = \varphi_2$ on $[x_0, \overline{x}]$ である。

まず $\varphi_1 = \varphi_2$ on $[x_0, \overline{x})$ を示す。$\forall x \in [x_0, \overline{x})$ に対して sup の定義より $\exists x_* \in (x, \overline{x}) \cap E$. $\varphi_1 = \varphi_2$ on $[x_0, x_*]$ であるから、特に $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. $\varphi_1(\overline{x}) = \varphi_2(\overline{x})$ を示すには、$x_n \uparrow \overline{x}$ となる $\{x_n\}$ を取って $\varphi_1(x_n) = \varphi_2(x_n)$ で $n \to \infty$ とすれば、φ_1, φ_2 の連続性より $\varphi_1(\overline{x}) = \varphi_2(\overline{x})$.

2 $\overline{x} = x_*$ が成り立つ。1 と合せて $\varphi_1 = \varphi_2$ on $[x_0, x_*]$.

x_* は E の上界であるから、$\overline{x} \equiv \sup E \le x_*$. $\overline{x} < x_*$ と仮定して矛盾を導く。$\overline{y}_0 := \varphi_1(\overline{x}) = \varphi_2(\overline{x})$ ととくと、φ_1, φ_2 ともに

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (x \in (\overline{x}_0, x_*)), \quad y(\overline{x}) = \overline{y}_0$$

の解である。これから $\overline{<}\exists\overline{\overline{x}} \le x_+$ s.t. $\varphi_1 = \varphi_2$ on $[x_0, \overline{\overline{x}}]$. $\overline{x} < \overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{x}} \in E$ であるから、$\overline{x} = \sup E$ に反する。 ■

L 問題

L.1 練習問題

当然のことであるが、最終的な結果だけでなく、途中の経過や考え方も答案に書く必要がある。

1 次の各級数の収束・発散を調べよ (判断の理由も簡単に述べよ)。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\pi^n}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

(すると手順としては、まず一般項が 0 に収束するかどうかチェックし、次に項の符号を調べ、正だったら)

2 ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ の収束半径を R とし、$|x| < R$ なる x に対して、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) R の値を求めよ。 (2) $f'(x)$ をなるべく簡単な式で表わせ。(3) $f(x)$ をなるべく簡単な式で表わせ。(4) $\displaystyle\lim_{x \to R-0} f(x)$ を求めよ。

(以下 y', y'' はそれぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表わすとする。)

3 (1) 微分方程式 $y' = xy$ の一般解を求めよ。(2) 微分方程式 $y' = xy + x$ の一般解と、$x = 0$ のとき $y = 1$ となる解を求めよ。

4　微分方程式

(a)
$$y'' + 2y' - 3y = 0,$$

(b)
$$y'' + 2y' - 3y = e^x$$

について以下の問に答えよ。

(1) (a) の一般解を求めよ。(2) (a) の解で $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ を満たすものを求め、$\lim_{x\to\infty} y$ がどうなるか答えよ。(3) (b) の一般解を求めよ。

M　解答と解説

1　ここでは一通りの要点が復習できるように 5 問の小問を用意しました。期末試験ではもう少し問題の数を少なくします。

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$$

となり、一般項が 0 に収束しないので、この級数は発散する。

> **命題 M.1 (級数が収束するには一般項の極限が 0 でなければならない)** $\sum_n a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 対偶を取って、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でなければ $\sum_n a_n$ は発散する。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$ であるから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$. 発散。

> **命題 M.2 (二つの正項級数については、大きい方が収束すれば小さい方も収束)** すべての n について $0 \leq a_n \leq b_n$ であるとする。もし $\sum_n b_n$ が収束するならば $\sum_n a_n$ も収束する。対偶を取ると、もし $\sum_n a_n$ が発散するならば $\sum_n b_n$ も発散する。
>
> 覚え方: $0 \leq a_n \leq b_n$ であるから直感的に明らかなように $\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$ で、“収束は $< \infty$ となること”, “発散は $= \infty$ となること” だから[a]。
>
> [a]あるいは $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha > 1)\\ \infty & (\alpha \leq 1)\end{cases}$ と対照する。

(3)

$$\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad 収束$$

であるから、$\sum \dfrac{\cos n}{n^2}$ は絶対収束であり、収束する。

> **命題 M.3** $\sum_n a_n$ が絶対収束するならば (意味は $\sum_n |a_n|$ が収束すること)、$\sum_n a_n$ も収束する。

命題 M.4 (超重要 — 優収束定理) すべての n について $|a_n| \leq b_n$ であり、$\sum_n b_n$ が収束するならば $\sum_n a_n$ 絶対収束する。(一つ上の命題とあわせると、$\sum_n a_n$ も収束することが分かる。)

命題 M.5 (超重要) α を正の数とするとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{収束} & (\alpha > 1) \\ \text{発散} & (\alpha \leq 1). \end{cases}$$

覚え方: 境目の $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散し、それより指数の大きなもの、例えば $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する。

(4) $a_n = \dfrac{n^2}{\pi^n}$ とおくと、$n \to \infty$ のとき

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{\pi^{n+1}} \frac{n^2}{\pi^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{\pi} \to \frac{1}{\pi} < 1$$

であるから、$\sum a_n$ は絶対収束するので、収束する。

命題 M.6 (d'Alembert の判定法 (ratio test)) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r$ が存在するとき、$\sum_n a_n$ は

$$\begin{aligned} r < 1 \quad &\Longrightarrow \quad \text{絶対収束 (ゆえに収束)} \\ r > 1 \quad &\Longrightarrow \quad \text{発散}. \end{aligned}$$

$r = 1$ のときは収束も発散もありうる (別のやり方で調べないと分からない)。

(これは実は等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ と比較することで証明する。等比級数が収束するための必要十分条件は $|r| < 1$ で、和は $\dfrac{1}{1-r}$ だった。)

(5) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ とおくと、$n \to \infty$ のとき

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

は単調減少して 0 に収束する。また a_n は交互に符号を変えるので、$\sum a_n$ は収束する。

命題 M.7 (絶対値が単調減少して 0 に収束する交代級数は収束する (Leibniz)) a_n が交互に符号を変え、

$$|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \cdots \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つとき、$\displaystyle\sum_n a_n$ は収束する。

2 (これは授業中に例題として出したもので、「またか」と思われるかもしれないが、要点が凝縮された「教師にはありがたい」問題である。)

(1) (ちょっと難しい) 問題の級数の収束発散は、x で割ってできる級数

(♯)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(x^2\right)^n$$

の収束発散と一致するから、この級数の収束半径を求めればよい。

であることを背景に、まず

(♯♯)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^2$$

の収束半径 R' を求めてみよう。これには

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

とおいて、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)+1} \frac{2n+1}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{3}{n}} = \frac{2}{2} = 1 = \frac{1}{R'}$$

であることから、$R' = 1$. つまり

$$|y| < 1 \quad \Longrightarrow \quad (♯♯)\ \text{は収束}, \quad |y| > 1 \quad \Longrightarrow \quad (♯♯)\ \text{は発散}.$$

もちろん $|x| < 1 \Leftrightarrow |y| < 1$, $|x| > 1 \Leftrightarrow |y| > 1$ であるから、

$$|x| < 1 \quad \Longrightarrow \quad (♯)\ \text{は収束}, \quad |x| > 1 \quad \Longrightarrow \quad (♯)\ \text{は発散}.$$

ゆえに $R = 1$.

(2) ベキ級数は収束円の内部 ($|x| < R = 1$) で項別微分できるから、

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (2n+1) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n.$$

これは公比 $-x^2$ の等比級数であるが、$|x| < 1$ より $|-x^2| < 1$ であるから、収束し、その和は

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(3) 級数による定義式に代入して容易に $f(0)=0$ が分かるので、

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=0+\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt=[\mathrm{Arctan}\,x]_0^x=\mathrm{Arctan}\,x.$$

(4) $f(x)=\mathrm{Arctan}\,x$ は $x=1$ で連続だから、

$$\lim_{x\to R-o} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\mathrm{Arctan}\,x=\mathrm{Arctan}\,1=\frac{\pi}{4}.\blacksquare$$

3 (準備中 — 時間切れとも言う)

(1) $\dfrac{dy}{dx}=xy$ から

$$\int\frac{dy}{y}=\int x\,dx.$$

これから

$$\log|y|=\frac{x^2}{2}+C\quad (C\ \text{は積分定数}).$$

ゆえに

$$|y|=\exp\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=e^C\exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

これから

$$y=\pm e^C\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)=C'\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\quad (C'\ \text{は任意定数})$$

(2) 定数変化法を用いる。$y=C(x)e^{x^2/2}$ とおくと、

$$\frac{dy}{dx}=C'(x)e^{x^2/2}+C(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)'e^{x^2/2}=xC(x)e^{x^2/2}+C'(x)e^{x^2/2}=xy+C'(x)e^{x^2/2}.$$

ゆえに

$$C'(x)e^{x^2/2}=x.$$

これから

$$C'(x)=xe^{-x^2/2}.$$

積分して

$$C(x)=\int xe^{-x^2/2}dx=-e^{-x^2/2}+C_1\quad (C_1\ \text{は積分定数}).$$

ゆえに

$$y=C(x)e^{x^2/2}=\left(-e^{-x^2/2}+C_1\right)e^{x^2/2}=-1+C_1e^{x^2/2}.$$

4

(1) 特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ なので特性根は $\lambda = 1, -3$. ゆえに (a) の一般解は $y = Ae^x + Be^{-3x}$ (A, B は任意定数).

(2) $y(0) = 1$ より $A + B = 1$, $y'(0) = 2$ より $A - 3B = 2$ であるから、$A = 5/4$, $B = -1/4$. ゆえに $y = \dfrac{1}{4}e^x - \dfrac{5}{4}e^{-3x}$. これから $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = \infty$.

(3) 右辺の e^x の指数部の係数 1 は特性根 (でも重根ではない) であるので (講義中の記号で $n = 0$, $\alpha = 1$, $m = 1$ で)、$u = px^m e^{\alpha x} = pxe^x$ とおくと、

$$u'' + 2u' - 3u = 4pe^x.$$

これが e^x に等しくなるには $4p = 1$. つまり $p = 1/4$. ゆえに $u = \dfrac{1}{4}xe^x$ が特解となる。ゆえに (b) の一般解は

$$y = Ae^x + Be^{-3x} + \frac{1}{4}xe^x \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).\blacksquare$$

$f(x)$ が簡単な場合の $y'' + py' + qy = f(x)$ の特解の発見法は、授業中に紹介したが、教科書には書いていないので、念のため再録すると

1. $f(x) = n$ 次多項式 $\times\, e^{\alpha x}$ で、α が特性方程式の m 重根 ($m \geq 0$) の場合は

$$u(x) = (n \text{ 次多項式}) \times x^m e^{\alpha x}$$

とおいて、$L[u] = 0$ が成り立つように多項式の係数を定めればよい。

2. $f(x) = (n \text{ 次多項式}) \times e^{ax} \times \left\{\begin{array}{c}\cos bx \\ \sin bx\end{array}\right\}$ で、$a + ib$ が特性方程式の m 重根 ($m \geq 0$) の場合は

$$u(x) = n \text{ 次多項式} \times x^m e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$$

とおけばよい。

M.1　期末試験問題

ノート等持込み禁止。最終的な結果だけでなく、途中の経過や考え方も書くこと。解答用紙のみ提出。

1　次の各級数の収束・発散を調べよ (判断の理由も簡単に述べよ)。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{n^2}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$

2 ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ の収束半径を R とし、$|x|<R$ なる x に対して、

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$$

とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) R の値を求めよ。 (2) $f'(x)$ をなるべく簡単な式で表わせ。(3) $f(x)$ をなるべく簡単な式で表わせ。(4) $\displaystyle\lim_{x\to -R+0} f(x)$ を求めよ。

(以下 y', y'' はそれぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表わすとする。)

3 (1) 微分方程式 $y'=-\dfrac{1}{x}y$ の一般解を求めよ。(2) 微分方程式 $y'=-\dfrac{1}{x}y+e^x$ の一般解と、$x=1$ のとき $y=0$ となる解を求めよ。

4 微分方程式

(a)
$$y''+y'+y=0,$$

(b)
$$y''+y'+y=1+x$$

について以下の問に答えよ。

(1) (a) の一般解を求めよ。$x\to\infty$ のとき y はどうなるか答えよ。(2) (a) の解で $y(0)=1$, $y'(0)=1$ を満たすものを求めよ。(3) (b) の一般解を求めよ。

2003 年度 基礎数学 IV 期末試験問題解答

解答 1　(1) $\lim_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{n}=1$ であり、一般項が 0 に収束しないので、この級数は発散する。

(2) $a_n=\dfrac{n^4}{3^n}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\dfrac{n^4}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\frac{1}{3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

この極限は 1 より小さいので、級数 $\sum a_n$ は収束する。

(3) $\left|\dfrac{1+\sin n}{n^2}\right|\le\dfrac{1+1}{n^2}=\dfrac{2}{n^2}$ で、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ は収束するから、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{n^2}$ も収束する。

(4) $0<\dfrac{1}{n}\le 1$ で、$\dfrac{1}{n}$ は n について単調減少である。また $y=\sin x$ は $0\le x\le 1$ の範囲で単調増加だから、$\sin\dfrac{1}{n}$ は単調減少である。さらに $\lim_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n}=0$ である。また $0<\sin\dfrac{1}{n}$ であるから、与えられた級数は交代級数である。ゆえに級数は収束する。

(要点は (i) 交代級数, (ii) 絶対値である $\sin\dfrac{1}{n}$ は単調減少, (iii) $\lim_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n}=0$ という 3 つの条件が成り立つということである。なお、この級数は絶対収束しない。)

解説　「収束」とか「発散」だけでは点はあげられません (それじゃ丁半博打でしょう)。ある意味で一番難しい問題だと思いますが、結構点をかせいでいる人がいました (0 点は少数派でした — 0 点は反省すべきらしい)。なお (2), (3) は絶対収束しますが、(4) は (収束はしますが) 絶対収束しません。

解答 2　(1) x^n の係数を a_n とおく: $a_n=\dfrac{1}{n}$. すると

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=1.$$

これが $1/R$ に等しいので、$R=1$.

(2) ベキ級数は収束円の内部 ($|x|<R=1$) で項別微分できるので、

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

これは初項 1, 公比 x の等比級数で、$|$ 公比 $|=|x|<1$ なので収束し、

$$f'(x)=\frac{1}{1-x}.$$

(3) $f(0)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}0^n=0$ であるから、

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=0+\int_0^x\frac{1}{1-t}\,dt=-\int_0^x\frac{1}{t-1}\,dt=-\log|x-1|=-\log(1-x).$$

(4)

$$\lim_{x\to -R+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} (-\log(1-x)) = -\log[1-(-1)] = -\log 2.$$

解説　(1) で a_n に x を含めた人がちらほら。混同しないように。ベキ級数の場合は係数を a_n とおきます。
(2) はまあまあの出来でした (出来なかった人は要反省)。
(3) もまあまあでしたが、

$$\int \frac{1}{1-t}\,dt = \log|1-t| \quad (\textbf{これは間違いです !!})$$

と符号を間違えた人が多かった。これは不注意と言うよりも、心得が悪い可能性が高く、同じことを何度もやってしまいそうです。さぼらずに

$$\int \frac{1}{1-t}\,dt = -\int \frac{1}{t-1}\,dt = -\log|t-1|$$

としましょう。

解答 3　(1) $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{-1}{x}dx$ より $\log|y| = -\log|x| + \log C = \log\dfrac{C}{|x|}$ (ただし C は積分定数).
ゆえに $|y| = \dfrac{C}{|x|}$. 絶対値を外して、

$$y = \frac{\pm C}{x} = \frac{C'}{x} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

(2) $y = \dfrac{c(x)}{x}$ とおくと、

$$y' = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2} = -\frac{y}{x} + \frac{c'(x)}{x}.$$

ゆえに y は微分方程式 $y = -\dfrac{y}{x} + e^x$ の解になるための条件は

$$\frac{c'(x)}{x} = e^x.$$

これから $c'(x) = xe^x$ なので、

$$c(x) = \int xe^x\,dx = xe^x - \int (x)'\cdot e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

ゆえに

$$y = \frac{c(x)}{x} = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}.$$

$x=1$ のとき $y=0$ となる解を求めるために、代入すると

$$0 = 1 - \frac{1}{1} + \frac{C}{1} = 1 - 1 + C = C \quad \therefore \quad C = 0.$$

ゆえに $y = e^x - \dfrac{e^x}{x}$.

解説　(1) $\log|y| = -\log|x| + C$ から、

$$|y| = e^{-\log|x|+C} = e^C e^{-\log|x|} = C' e^{-\log|x|}$$

として、最後まで $e^{-\log|x|}$ の形のままという人がいました。指数関数と対数関数の関係が身についていないのは困ります。例え話をすると、$(a\sqrt{x})^2$ を a^2x と簡単化しないで最後まで $(a\sqrt{x})^2$ と書くようなもので、かなり間が抜けています。
(2) 定数変化法は重要なのでギブアップしないこと。

解答 4　(1) 特性方程式は $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ なので、特性根は

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

これから微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + Be^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

cos, sin は絶対値が 1 以下で、$e^{-x/2} \to 0$ $(x \to \infty)$ であるから、

$$\lim_{x\to\infty} y = 0.$$

(2) $y(0) = 1$ より $1 = A \cdot 1 \cdot 1 + B \cdot 1 \cdot 0 = A$. また

$$y' = e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} \left(-\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2} \right) + e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}A}{2} - \frac{B}{2} \right)$$

であるから、$y'(0) = 1$ より

$$1 = 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2} \right) + 1 \cdot 0 = -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2}.$$

既に分かっている $A = 1$ を代入して $B = \sqrt{3}$. ゆえに

$$y = e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + \sqrt{3} e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

(3) 0 は特性根でないので、$u = px + q$ (p, q は定数) の形の特解があるはずである。

$$u' = p, \quad u'' = 0$$

であるから、

$$u'' + u' + u = 0 + p + (px + q) = px + (p + q).$$

これが $x + 1$ に等しいためには $p = 1$, $p + q = 1$. ゆえに $p = 1$, $q = 0$. ゆえに $u = x$. よって求める一般解は

$$y = Ae^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + Be^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} + x \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

解説　(1) 2 次方程式が解けない人がいました (困ったね)。一般解を

$$y = Ae^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x} + Be^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}x}$$

と書いた人が多かった。間違いではないし、特に減点はしなかったけれど、cos, sin を使って書けるようにしておいて欲しい (オイラーの公式に慣れていないのか…来年は練習問題を用意しなくちゃな)。多分 cos, sin で書かないと lim は分からないでしょう (lim を求める部分の配点は低くしました)。
(2) 虚数の指数関数のままで計算した人が多く、その場合計算は大変だけれど出来はまあまあでした (こういうのは出来るのか…)。
(3) 特解が求められて、それと (1) の一般解が和になることが分かっている人には、たとえ (1) の解が間違っていても (3) の部分に点をつけました (このあたりのところは出来ている人が多くて良かった)。

N　参考文献案内

言葉の正しい意味での数学の教養書として、(少し古いけれども) 遠山 [17] は広く勧めたい読み物である (レベル的には高校上級〜大学生というところ？)。微分方程式についてもかなりの紙幅を費やしている。微分方程式を用いる意味の「古典的」説明を余すところ無くしていて、微分方程式入門としても勧められる本であると思う (この本はもっときちんと紹介したいな…この文章推敲しないと)。

神保 [10] は入門書であるにも係わらず、類書に見られない記述が多い。常微分方程式のみならず偏微分方程式も扱っている。数学者としての所感は楽しくもあり、初学者をはっと悟らせてくれるくれるところがあると信じる。大学初年級の物理に現われる重要な方程式をきちんと解説している。入門的な話もかなり技術的に面白い取り扱いが多く、正直かなり勉強させられた。さらに数学者の書いた本には珍しくラプラス変換をきちんと紹介してある。

高桑 [13] は、初学者が出会う可能性のある重要な微分方程式について、一通りの解説がしてある。最近、色々な意味で物理離れが進んでいるため、こういう本は貴重な存在になりつつあると感じる。

高橋 [15] は、色々なことが書いてあって有用で面白いし、読める人には良い本だと思うが、率直に言って、曖昧な記述も多く、また行間が空いていて (しかも、著者自身が行間をちゃんと埋めていないのでは？と思われるところもあって) 初学者に勧めて良いかどうか迷ってしまう[20]。ある程度の腕力を身につけてから読むべき本だと思う。

N.1　1 年生にむけて

N.1.1　参考書

常微分方程式の本はたくさん出版されているが、内容は多岐に渡っていて、どれを選ぶべきかなかなか難しい。

[20]実は、筆者が大学で微分方程式を最初に学んだのは他ならぬ高橋先生の講義であった。何となく靄がかかった印象があって、何年か後にその授業の内容が (この本で) 出版されてから、雪辱戦と意気込んで読み始めたのだが、なかなか消化できなかった経験がある。

まず読みやすく、内容も (力学系の説明をしたりしていて) 現代的で良いと思われる本として、石村 [2] (2001) をあげておく。授業の副読本として勧められる。

神保 [10] (1999) は内容はあくまで入門的でありながら、骨太の問題を複数取り上げ、格調の高ささえ感じられる、良い本である。正直に白状すると、常微分方程式のところに限っても、かなり勉強になった (読めば正統的な内容だと理解できるのだが、なぜか他の本にはあまり説明されていないことが書いてあった)。

もっと工学よりの参考書としては、マイベルク・ファヘンアウア [25] がある。豊富な例が載っているので、間違っても「微分方程式を学んで何の得があるのだろう」とは思わないと信じる。多くの図を含み、微分方程式の解の数値計算の話題にも言及した、内容豊かなテキストである。

この講義の内容はおおむね古くからある標準的なものである。内容を作るために参考にした文献の主なものをあげておくと、(古いものもあるが、数学の本の場合、古い = 遅れている、とはならないこといん注意)、笠原 [4] (1982), 高橋 [15] (1988), 藤田 [20] (1991), ポントリャーギン [24] (1963), 俣野 [26] (1993) などがある。

つい最近、最近の大学生の実情に合せた講義科目 (半年) 用のテキストとして、長崎・中村 [19] というのを見つけた。新しく作る教科書は質量内容ともにこれに近くなるのだろうか、と考えている (講義時間はこの 2/3 程度なので、もっと内容は小さくなる？)。

参考文献

[1] V・I・アーノルド, 数理解析のパイオニアたち, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1999).

[2] 石村 直之, パワーアップ微分方程式, 共立出版 (2001).

[3] 小野寺(おのでら) 嘉孝(よしたか), コンピュータで学ぶ 物理のための 応用数学, 裳華房 (1991).

[4] 笠原 晧司(こうじ), 微分方程式の基礎, (数理科学ライブラリー) 朝倉書店, 1982.

[5] ジョージ・ガモフ (George Gamow) 著 (伏見 康治 訳), 重力の話, 河出書房新社 (1977).

[6] 木村 英紀(ひでのり), Fourier-Laplace 解析, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1993).

[7] L. シュワルツ (L.Schwartz) 著, 岩村 聯(つらね), 石垣 春夫, 鈴木 文夫 訳, 超函数の理論, 岩波書店 (1971).

[8] L. シュワルツ (L.Schwartz) 著, 吉田耕作, 渡辺二郎 訳, 物理数学の方法, 岩波書店 (1966).

[9] Laurent Schwartz, Transformation de Laplace des distributions, Comm.Sém.Math. de l'Univ. de Lund, tome suppl. dédié à M.Riesz, 196–206 (1952).

[10] 神保 秀一, 微分方程式概論, サイエンス社 (1999).

[11] チャンドラ・セカール (監訳 中村 誠太郎), チャンドラ・セカールのプリンキピア講義, 講談社 (1998).

[12] 大学数学教育研究会編, 大学課程 微分積分学概説 [増補版], 共立出版株式会社 (1984).

[13] 高桑 昇一郎, 微分方程式と変分法 — 微分積分で見えるいろいろな現象 —, 共立出版 (2003).

[14] 高野 恭一, 常微分方程式, 朝倉書店 (1994).

[15] 高橋 陽一郎, 微分方程式入門, 東京大学出版会 (1988).

[16] 堤 正義, 応用数学演習, サイエンス社 (1989).

[17] 遠山 啓, 数学入門 (下), 岩波新書 G5, 岩波書店 (1960).

[18] 遠山 啓, 矢野 健太郎 編, 100 人の数学者, 数学セミナー増刊, 日本評論社 (1971).

[19] 長崎 憲一, 中村 正彰, 明解 微分方程式, 培風館 (1997).

[20] 藤田 宏・吉田 耕作, 現代解析入門, 岩波書店 (1991).
(藤田著の前篇中に常微分方程式が解説されている。もとは岩波講座基礎数学の『解析入門 V』であった。)

[21] 藤田 宏、三訂版 応用数学、放送大学出版協会 (2000).

[22] 一松 信, 微分積分学入門第二課, 近代科学社 (1990).

[23] E.T. ベル著, 田中 勇, 銀林 浩 訳, 数学をつくった人々 上, 下, 東京図書 (1976).

[24] ポントリャーギン (L.S.Pontryagin) (木村 俊房 校閲, 千葉 克裕 訳), 常微分方程式, 共立出版 (1963).

[25] マイベクル／ファヘンアウア, 工科系の数学 5　常微分方程式, サイエンス社 (1997).

[26] 俣野 博, 微分方程式 I, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1993).
これは『常微分方程式入門 — 基礎から応用へ —』, 岩波書店 (2003) として単行本化された。

[27] ミクシンスキー (Jan Mikusiński) 著, 松村 英之・松浦 重武 訳, 演算子法 上, 裳華房 (1965).
ミクシンスキー (Jan Mikusiński) 著, 松浦 重武・笠原 晧司 訳, 演算子法 下, 裳華房 (1967).

[28] 森 毅・齋藤 正彦・野崎 昭弘, 数学ブックガイド 100, 培風館 (1984).

[29] 森口 繁一・宇田川銈久・一松 信, 岩波 数学公式 II　級数・フーリエ解析, 岩波書店 (1957).

[30] 矢野 健太郎, 大学演習 微分方程式, 裳華房 (1957).

[31] Kôsaku Yosida, Functional analysis, sixth edition, Springer (1980).

[32] 吉田 耕作, 演算子法 一つの超函数論, 東京大学出版会 (1982).

[33] 吉田 耕作, 伊藤 清三編, 吉田 耕作, 村松 寿延, 折原 明夫, 伊藤 清三 著, 関数解析と微分方程式, 現代数学演習叢書 4, 岩波書店 (1976).

[34] E.C.Titchmarsh, The zeros of certain integral functions, Proceedings London Mathematical Society **25 (1926), 283–302.**