基礎数学IV 参考問題

桂田 祐史

2003年1月8日

次の理由から期末試験の出題傾向の参考となる問題を示す (念のため: 同じ問題は出さない)。

- この講義には「過去問」が存在しない
- 試験で問うのは当然マスターすべき重要な事項であり、それを伝えることは意義がある

期末試験はノート等持込み禁止。当然のことであるが、最終的な結果だけでなく、途中の経過や考え方も答案に書く必要がある。

1　次の各級数の収束・発散を調べよ (判断の理由も簡単に述べよ)。
(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\pi^n}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
(すると手順としては、まず一般項が 0 に収束するかどうかチェックし、次に項の符号を調べ、正だったら)

2　ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ の収束半径を R とし、$|x|<R$ なる x に対して、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

とおくとき、以下の問に答えよ。
(1) R の値を求めよ。 (2) $f'(x)$ をなるべく簡単な式で表わせ。(3) $f(x)$ をなるべく簡単な式で表わせ。(4) $\displaystyle\lim_{x\to R-0} f(x)$ を求めよ。

(以下 y', y'' はそれぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表わすとする。)

3　(1) 微分方程式 $y'=xy$ の一般解を求めよ。(2) 微分方程式 $y'=xy+x$ の一般解と、$x=0$ のとき $y=1$ となる解を求めよ。

4　微分方程式

(a) $$y''+2y'-3y=0,$$

(b) $$y''+2y'-3y=e^x$$

について以下の問に答えよ。

(1) (a) の一般解を求めよ。(2) (a) の解で $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ を満たすものを求め、$\lim_{x\to\infty} y$ がどうなるか答えよ。(3) (b) の一般解を求めよ。

1　解答と解説

1　ここでは一通りの要点が復習できるように 5 問の小問を用意しました。期末試験ではもう少し問題の数を少なくします。

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1$$

となり、一般項が 0 に収束しないので、この級数は発散する。

命題 1.1 (級数が収束するには一般項の極限が 0 でなければならない) $\sum_n a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. 対偶を取って、$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ でなければ $\sum_n a_n$ は発散する。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geq\dfrac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=\infty$ であるから $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\infty$. 発散。

命題 1.2 (二つの正項級数については、大きい方が収束すれば小さい方も収束) すべての n について $0\leq a_n\leq b_n$ であるとする。もし $\sum_n b_n$ が収束するならば $\sum_n a_n$ も収束する。対偶を取ると、もし $\sum_n a_n$ が発散するならば $\sum_n b_n$ も発散する。

覚え方: $0\leq a_n\leq b_n$ であるから直感的に明らかなように $\sum_n a_n\leq\sum_n b_n$ で、"収束は $<\infty$ となること", "発散は $=\infty$ となること" だから[a]。

[a] あるいは $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha>1)\\ \infty & (\alpha\leq 1)\end{cases}$ と対照する。

(3)

$$\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\quad \text{収束}$$

であるから、$\sum\dfrac{\cos n}{n^2}$ は絶対収束であり、収束する。

命題 1.3 $\sum_n a_n$ が絶対収束するならば (意味は $\sum_n |a_n|$ が収束すること)、$\sum_n a_n$ も収束する。

命題 1.4 (超重要 — 優収束定理) すべての n について $|a_n| \le b_n$ であり、$\sum_n b_n$ が収束するならば $\sum_n a_n$ 絶対収束する。(一つ上の命題とあわせると、$\sum_n a_n$ も収束することが分かる。)

命題 1.5 (超重要) α を正の数とするとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{収束} & (\alpha > 1) \\ \text{発散} & (\alpha \le 1). \end{cases}$$

覚え方: 境目の $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散し、それより指数の大きなもの、例えば $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する。

(4) $a_n = \frac{n^2}{\pi^n}$ とおくと、$n \to \infty$ のとき

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{\pi^{n+1}} \frac{n^2}{\pi^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{\pi} \to \frac{1}{\pi} < 1$$

であるから、$\sum a_n$ は絶対収束するので、収束する。

命題 1.6 (d'Alembert の判定法 (ratio test)) $\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r$ が存在するとき、$\sum_n a_n$ は

$$\begin{aligned} r < 1 &\implies \text{絶対収束 (ゆえに収束)} \\ r > 1 &\implies \text{発散.} \end{aligned}$$

$r = 1$ のときは収束も発散もありうる (別のやり方で調べないと分からない)。

(これは実は等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ と比較することで証明する。等比級数が収束するための必要十分条件は $|r| < 1$ で、和は $\frac{1}{1-r}$ だった。)

(5) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ とおくと、$n \to \infty$ のとき

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

は単調減少して 0 に収束する。また a_n は交互に符号を変えるので、$\sum a_n$ は収束する。

命題 1.7 (絶対値が単調減少して 0 に収束する交代級数は収束する (Leibniz)) a_n が交互に符号を変え、

$$|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \cdots \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つとき、$\displaystyle\sum_n a_n$ は収束する。

2 (これは授業中に例題として出したもので、「またか」と思われるかもしれないが、要点が凝縮された「教師にはありがたい」問題である。)

(1) (ちょっと難しい) 問題の級数の収束発散は、x で割ってできる級数

(♯)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(x^2\right)^n$$

の収束発散と一致するから、この級数の収束半径を求めればよい。

であることを背景に、まず

(♯♯)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^2$$

の収束半径 R' を求めてみよう。これには

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

とおいて、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)+1} \frac{2n+1}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{3}{n}} = \frac{2}{2} = 1 = \frac{1}{R'}$$

であることから、$R' = 1$. つまり

$$|y| < 1 \quad \Longrightarrow \quad (♯♯)\ \text{は収束}, \quad |y| > 1 \quad \Longrightarrow \quad (♯♯)\ \text{は発散}.$$

もちろん $|x| < 1 \Leftrightarrow |y| < 1$, $|x| > 1 \Leftrightarrow |y| > 1$ であるから、

$$|x| < 1 \quad \Longrightarrow \quad (♯)\ \text{は収束}, \quad |x| > 1 \quad \Longrightarrow \quad (♯)\ \text{は発散}.$$

ゆえに $R = 1$.

(2) ベキ級数は収束円の内部 ($|x| < R = 1$) で項別微分できるから、

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n.$$

これは公比 $-x^2$ の等比級数であるが、$|x| < 1$ より $|-x^2| < 1$ であるから、収束し、その和は

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(3) 級数による定義式に代入して容易に $f(0)=0$ が分かるので、

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=0+\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt=[\operatorname{Arctan}x]_0^x=\operatorname{Arctan}x.$$

(4) $f(x)=\operatorname{Arctan}x$ は $x=1$ で連続だから、

$$\lim_{x\to R-o}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\operatorname{Arctan}x=\operatorname{Arctan}1=\frac{\pi}{4}.\blacksquare$$

3 (準備中 — 時間切れとも言う)

(1) $\dfrac{dy}{dx}=xy$ から

$$\int\frac{dy}{y}=\int x\,dx.$$

これから

$$\log|y|=\frac{x^2}{2}+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

ゆえに

$$|y|=\exp\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=e^C\exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

これから

$$y=\pm e^C\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)=C'\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\quad(C'\text{ は任意定数})$$

(2) 定数変化法を用いる。$y=C(x)e^{x^2/2}$ とおくと、

$$\frac{dy}{dx}=C'(x)e^{x^2/2}+C(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)'e^{x^2/2}=xC(x)e^{x^2/2}+C'(x)e^{x^2/2}=xy+C'(x)e^{x^2/2}.$$

ゆえに

$$C'(x)e^{x^2/2}=x.$$

これから

$$C'(x)=xe^{-x^2/2}.$$

積分して

$$C(x)=\int xe^{-x^2/2}dx=-e^{-x^2/2}+C_1\quad(C_1\text{ は積分定数}).$$

ゆえに

$$y=C(x)e^{x^2/2}=\left(-e^{-x^2/2}+C_1\right)e^{x^2/2}=-1+C_1e^{x^2/2}.$$

4

(1) 特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ なので特性根は $\lambda = 1, -3$. ゆえに (a) の一般解は $y = Ae^x + Be^{-3x}$ (A, B は任意定数).

(2) $y(0) = 1$ より $A + B = 1$, $y'(0) = 2$ より $A - 3B = 2$ であるから、$A = 5/4$, $B = -1/4$. ゆえに $y = \frac{1}{4}e^x - \frac{5}{4}e^{-3x}$. これから $\lim_{x\to\infty} y = \infty$.

(3) 右辺の e^x の指数部の係数 1 は特性根 (でも重根ではない) であるので (講義中の記号で $n = 0$, $\alpha = 1$, $m = 1$ で)、$u = px^m e^{\alpha x} = pxe^x$ とおくと、

$$u'' + 2u' - 3u = 4pe^x.$$

これが e^x に等しくなるには $4p = 1$. つまり $p = 1/4$. ゆえに $u = \frac{1}{4}xe^x$ が特解となる。ゆえに (b) の一般解は

$$y = Ae^x + Be^{-3x} + \frac{1}{4}xe^x \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).\blacksquare$$

$f(x)$ が簡単な場合の $y'' + py' + qy = f(x)$ の特解の発見法は、授業中に紹介したが、教科書には書いていないので、念のため再録すると

1. $f(x) = n$ 次多項式 $\times e^{\alpha x}$ で、α が特性方程式の m 重根 ($m \geq 0$) の場合は

$$u(x) = (n \text{ 次多項式}) \times x^m e^{\alpha x}$$

とおいて、$L[u] = 0$ が成り立つように多項式の係数を定めればよい。

2. $f(x) = (n$ 次多項式$) \times e^{ax} \times \left\{ \begin{matrix} \cos bx \\ \sin bx \end{matrix} \right\}$ で、$a + ib$ が特性方程式の m 重根 ($m \geq 0$) の場合は

$$u(x) = n \text{ 次多項式} \times x^m e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$$

とおけばよい。