# 広義積分 (大改訂版)

桂田 祐史

2003 年 7 月 17 日

前回配布した「広義積分についてのメモ」は説明が拙いので捨ててください。

## 1 イントロ (少し固く)

(i) 積分区間が有界でないか

(ii) 被積分関数が積分区間上で有界でないか

のいずれか、あるいは両方であるような定積分のことを、広義積分(こうぎせきぶん)という[1]。

大雑把な言い方をすると、「広義積分とは無限大 $\infty$ の現れる積分である。」「まずい点はよけて計算してから極限を取る。」

今の時点ではピンと来ないかも知れないが、応用上の重要性は非常に高い (正規分布の分布関数や Fourier 変換などへの応用は比較的早く遭遇するであろう)。

ここでは簡単に計算できる場合だけ扱うことにする。

## 2 半無限区間の積分

半無限区間 $(a, \infty)$ (ただし $a$ は実数) 上の積分

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

例えば

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

は一体何か？この定義はまだ与えていない (意味はまだ決まっていない) が、ここで

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

であると定義する (図を描いて説明するのでメモって下さい)。すると次のように容易に計算できる:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left( -\left[\frac{1}{x}\right]_1^R \right) = \lim_{R\to\infty} \left(1 - \frac{1}{R}\right) = 1.$$

lim であるから、いつでも有限確定の値になる (これを「収束する」と言うのが普通) とは限らない。例えば

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[\log|x|\right]_1^R = \lim_{R\to\infty} \log R = \infty.$$

同様に $(-\infty, b)$ ($b$ は実数) 上の積分は

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^b f(x)\,dx$$

と定義する。

[1] 広義積分とは、拡張された (広い意味の) 積分というニュアンスがある。つまりこれまでは、(あまり意識していなかったかもしれないが) 有限閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 (あるいは有界関数) の積分のみを考えてきた。それを拡張しよう、ということである。

## 3　積分区間の一つの端点で非有界な関数の積分

今度は $f$ が $(a,b]$ で連続だが ($a$, $b$ は $a<b$ なる実数)、$x=a$ では不連続または定義されていない場合に

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

の形の積分を定義しよう。例えば

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

の被積分関数は $x=0$ で定義されておらず、$x\to+0$ のとき $\infty$ に発散するので、これまで扱ったような普通の積分ではない (やはり無限に広がっている図形の面積と考えられる)。

このような積分については

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

と定義する。

すると次のように計算できる:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} 2\left[x^{1/2}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} 2\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$$

もちろん、この手の積分はいつでも収束するとは限らない。

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\log x\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\log\varepsilon\right) = \infty.$$

## 4　有名な結果 (1)

正定数 $\alpha$ に対して

$$I_\alpha := \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

とおく。定義より

$$I_\alpha = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^\alpha}$$

である。

$\alpha=1$ の場合は既に見たケースで

$$I_\alpha = I_1 = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x} = \infty.$$

$\alpha\neq1$ の場合は

$$I_\alpha = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\frac{R^{-\alpha+1}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha>1) \\ \infty & (\alpha<1) \end{cases}$$

ただし実定数 $p$ に対して

$$\lim_{R\to\infty} R^p = \begin{cases} \infty & (p>0) \\ 1 & (p=0) \\ 0 & (p<0) \end{cases}$$

となることを用いた。

まとめると

(1)　$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha>1) \\ \infty & (\alpha\le1). \end{cases}$$

## 5　有名な結果 (2)

正定数 $\beta$ に対して

$$J_\beta := \int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$$

とおく。定義より

$$J_\beta = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\beta}$$

である。

$\beta = 1$ の場合は既に見たケースで

$$J_\beta = J_1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \infty.$$

$\beta \neq 1$ の場合は

$$J_\beta = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{x^{-\beta+1}}{1-\beta}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1-\varepsilon^{-\beta+1}}{1-\beta} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta} & (\beta<1) \\ \infty & (\beta>1) \end{cases}$$

ただし実定数 $p$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^p = \begin{cases} 0 & (p>0) \\ 1 & (p=0) \\ \infty & (p<0) \end{cases}$$

となることを用いた。

まとめると

(2)
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta} & (\beta<1) \\ \infty & (\beta\geq 1). \end{cases}$$

## 6　$\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ での積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

の形の積分、例えば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

はどう考えるべきか？

これは

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

のように考えて、

(3)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\,dx$$

と約束する。

この定義に従えば

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0}\frac{dx}{x^2+1} + \lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty}(-\operatorname{Arctan}(-R)) + \lim_{R\to\infty}\operatorname{Arctan} R \\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

細かいことだが

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

と定義したのではないことに注意しよう (ただし広義積分の収束が事前に分かっている場合は、こうして計算しても大丈夫)。もしこうすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} 0 = 0$$

となるが、正しくは「$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ は収束しない」である。

## 7　積分区間の内部にマズイ点のある場合

関数 $f$ が $[a,b]$ の内部の点 $c$ 以外では定義されていて連続であるが、$c$ では定義されていなかったり、定義されていても連続ではないような場合に

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

の形の積分、例えば

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \qquad (\text{被積分関数は } x=0 \text{ では定義されない})$$

はどう考えるべきか？

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

のように考えると、右辺の二つの積分はこれまで説明した広義積分になる。そこで

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

と定義する。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right)$$

と定義するのではないことに注意しよう (ただし広義積分の収束が事前に分かっている場合はこうして計算しても大丈夫)。

例えば

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\log|x|\right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\log|x|\right]_{\varepsilon}^{1}\\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\log\varepsilon - \lim_{\varepsilon\to+0}\log\varepsilon = -\infty-(-\infty) = \text{不定},\quad \text{ゆえに広義積分は収束しない.}\end{aligned}$$

これを

$$(\text{間違い！})\quad \int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}(\log\varepsilon-\log\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to+0} 0 = 0$$

としてはいけない。

## 8　練習

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$