基礎数学III

2003年7月17日

研究室の場所、E-mailアドレスをメモしてください。分からなかったら早めにSOSを。来週初めからテストまで、WWWページを用意しようと思っています。

`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/kiso3/` (まだ存在しません)

誰かからされた質問の答はこのページにも書くことにします。

1 テストについて

1.1 形式的なこと

- 7月26日
- ノート、教科書等持ち込み禁止

1.2 追試？

追試をしようか？と考えています。出来を見て決めるつもりです。

- 追試をするかどうかは7月30日正午までに決めて、研究室のドアに掲示します (本試験の成績が合格点に達した人もそこで発表)。
- 追試実施日時の候補は8月1日 10:00 あるいはその次の週の前半。(候補日時は本試験の時に相談しましょう。)
- 追試は非公式なものなので、事務には問い合わせしないこと (事務から聞かれてもシラを切る予定です)。

1.3 内容

先日話した通り。

- 1番は、5/15, 5/29の小テストのような問題。
- 2番はテイラーの定理の周辺。「(1) ... のマクローリン展開を求めよ。(2) n 次剰余項 R_n を求めよ。(3) 次の極限を求めよ (あるいはそれに類する問題)。」このうち、極限の問題はいわゆる不定形の極限で、ロピタルの定理か、マクローリン展開を利用して解くような問題である (要するに (1), (2) の結果を利用してもらおうというココロ)。あまり複雑にならない関数にします。せいぜい小テスト (6/19) 程度です。
- 3番は積分の計算。$\int \sqrt{x^2+k}\,dx$ や、有理関数の積分など、高校数学の範囲外から出題する (かなり範囲が狭くなることを理解しよう)。
- 4番は広義積分の問題。基本的に今日配布するプリントの内容を理解すれば良いような問題です (こちらで有理関数の積分を問うこともできるので、そうするかもしれません)。

1.4　注意して欲しいこと

一般論として高校数学は大学では必需品ですが、それを直接問うことはこの科目のテストの直接の目的でありません。

- こちらの不手際で積分にかける時間が少なくなりましたが、「高校で習っているはずだから」という理由で、授業に出て来なかった細かい事項を問うことはしません。むやみに心配しないで下さい。
- 率直に言って、筆者は基礎数学 III をする意味は

  1. 本来は高校数学で教えるべき逆三角関数の紹介 (これで初等関数が完成する)
  2. テイラーの定理の紹介
  3. 広義積分の紹介

  の 3 点にあると考えています。当然問題もそれを反映したものになります。

2　小テスト問題集

2.1　4/24

プリント p.1 **1.1** の 1 を解け。

解答

プリントの p.15 にあるので省略します。なお、三角関数がからむと結果は色々な書き方が出来るようになります。解答と違っているからと言って、あわてないように (合っている可能性があります)。

一言　余談ですが (そしてくどいようですが)、この手の微積分の計算問題の参考書として一番良いのは、高校の数学の教科書だと思います。

2.2　5/15

Arcsin の逆関数を f とすると、f の定義域は $\boxed{①}$, 値域は $\boxed{②}$ で、$x \in \boxed{①}$ に対して

$$f(x) = \sin x.$$

f は単調 $\boxed{③}$ であるから、1 対 1 (単射) であることがわかる。
$y = \operatorname{Arcsin} x$ とすると $x = \boxed{④}$ であるから、

$$\frac{dx}{dy} = \cos y.$$

$y \in \boxed{②}$ であるから、$\cos y \geqq 0$ となるので、

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\boxed{⑤}}.$$

ゆえに

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \boxed{⑥}.$$

$\mathrm{Arcsin}\, x$ のことを $\sin^{\boxed{⑦}} x$ とも書く。

$$\mathrm{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{⑧}.$$

$y = \mathrm{Arcsin}\, x$ のグラフは $\boxed{}$

解答　((5) とか答は一つには決まらないですね... 大目に見て下さい) (1) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (2) $[-1, 1]$ (3) 増加 (4) $\sin y$ (5) $1 - \sin^2 y$ (6) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (7) -1 (8) $\dfrac{\pi}{3}$
(9) (省略)
練習したければ Arccos, Arctan でやってみてください。

2.3　5/29

cosh, sinh は指数関数を使って、

$$\cosh x = \boxed{①}, \quad \sinh x = \boxed{②}$$

と定義される。また tanh は

$$\tanh x = \frac{\boxed{①}}{\boxed{②}}$$

と定義される。この 3 つのうち、$\boxed{③}$ は偶関数、$\boxed{④}$ は奇関数である。

$$(\cosh x)' = \boxed{⑤}, \quad (\sinh x)' = \boxed{⑥}, \quad (\tanh x)' = \boxed{⑦}.$$

$f(x) = \tanh x$ について

$$f''(x) = \boxed{⑧},$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{⑨}, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \boxed{⑩}.$$

増減表は $\boxed{⑪}$, グラフは $\boxed{⑫}$, 値域は $\boxed{⑬}$.
逆関数の導関数は $\boxed{⑭}$.
逆関数を高校で習った関数だけを使って表わすと $\boxed{⑮}$.

解答　(1) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (2) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (3) cosh (4) sinh と tanh (5) $\sinh x$ (6) $\cosh x$ (7) $\dfrac{1}{\cosh^2 x}$ (8) $\dfrac{-2\sinh x}{\cosh^3 x}$ (9) -1 (10) 1 (11) (省略) (12) (省略) (13) $(-1, 1)$ (14) ($y = \tanh^{-1} x$ とするとき) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}$ (15) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$

2.4　6/5

プリント p.3 の **2.2** の 1. (p.16 に解答があるので略)
次の関数の n 階の導関数を求めなさい。
(1) x^α (2) a^{px}, $a > 0$, $p \neq 0$ (3) e^{ax} (4) xe^{ax} (5) $x^2 e^{ax}$ (6) $\sinh x$ (7) $\cosh x$ (8) $\log x$
(9) $\dfrac{1}{x+a}$ (10) $\dfrac{1+x}{1-x}$ (11) $\dfrac{1}{x^2-1}$ (12) $\dfrac{x}{a+bx}$

2.5　6/19

(1) $\sinh x$ のマクローリン展開を求めよ。$n-1$ 次の項までで打ち切ったときの剰余項 R_n を表わせ。

(2) $\sqrt{1+x}$ について (1) と同じことをせよ。

解答　(1) (結果のみ)

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

n が奇数の場合、$(0,1)$ に属する θ が存在して、

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{\cosh(\theta x)}{n!}x^n.$$

n が奇数の場合、$(0,1)$ に属する θ が存在して、

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\sinh(\theta x)}{n!}x^n.$$

つまり

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{\cosh(\theta x)}{n!}x^n & (n \text{ が奇数の場合}) \\ \dfrac{\sinh(\theta x)}{n!}x^n & (n \text{ が偶数の場合}) \end{cases}$$

ただし θ は (x と n による) $(0,1)$ に属する数である。