基礎数学III小テスト問題集

桂田 祐史

2004年7月15日

内容に間違いがあった場合は `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/kiso3/` で報告します (大急ぎで作ったのでミスがある可能性大)。問合わせは `mk@math.meiji.ac.jp` まで。

1　4月22日

4. (4) $(\cos x)' = -\sin x$ (5) $(e^x)' = e^x$ (2) $(x^n)' = nx^{n-1}$ を示せ。

2　5月6日 (逆三角関数)

$f(x) = \tan^{-1} x$ について以下の問に答えよ。
(1) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ を示せ。(2) $y = f(x)$ のグラフを描け (凹凸、漸近線を調べよ)。

解答　(1) $y = f(x) = \tan^{-1} x$ とおくと、

$$x = \tan y \quad (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

であるから、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2.$$

逆関数の微分法から

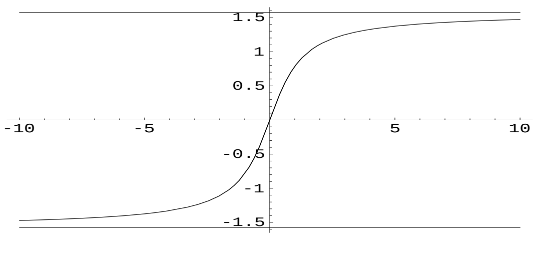
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(2) 商の微分法から

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

ゆえに f は $\mathbf{R}$ 全体で単調増加であり、$x < 0$ で下に凸、$x > 0$ で上に凸である。これから増減表とグラフは

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



なお、逆関数 tan について、

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \tan x = \infty,$$

であり、$x = -\pi/2$, $x = \pi/2$ が $y = \tan x$ のグラフの漸近線であることから、

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

であり、$y = \dfrac{\pi}{2}$, $y = -\dfrac{\pi}{2}$ は $y = f(x)$ のグラフの漸近線となる。■

備考　基礎数学 III で学んだ $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, 双曲線関数 ($\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$) について同様のことが出来る (グラフが描けるくらいに性質が分かる) ようにしておくこと。

3　5月20日

次の (1), (2) を示せ。
(1) $\tanh^{-1} y = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$. (2) $\left(\tanh^{-1} y\right)' = \dfrac{1}{1-y^2}$.

解答　(1) $x = \tanh^{-1} y$ とおくと、

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$X = e^x$ とおくと、

$$y = \frac{X - 1/X}{X + 1/X} = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}.$$

これを X^2 について解く:

$$y(X^2+1) = X^2 - 1 \quad \therefore 1 + y = X^2(1-y) \quad \therefore X^2 = \frac{1-y}{1+y}.$$

$X = e^x > 0$ に注意して、$e^x = X = \sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}}$. ゆえに

$$x = \log X = \log\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = \frac{1}{2}\log\frac{1-y}{1+y}.$$

(2) やり方は二つ考えられる。まず (1) の結果を直接微分する方法。

$$\left(\tanh^{-1} y\right)' = \left(\frac{1}{2}\left[\log|y+1| - \log|y-1|\right]\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1}\right) = \frac{1}{2}\frac{-2}{(y+1)(y-1)} = \frac{1}{1-y^2}.$$

つぎに逆関数の微分法を用いる方法。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = 1 - y^2 \quad \text{より} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{1-y^2}.$$

4　5 月 27 日 (高階の導関数)

p.23 の問題 1 を解け。

(1) $f(x)=x^\alpha$ とおく。

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1},\quad f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\quad f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\cdots$$

より

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n},.$$

(2) $f(x)=a^{px}$ とおく。$a=e^{\log a}$ ゆえ $a^{px}=(e^{\log a})^{px}=e^{xp\log a}$.

$$f'(x)=e^{xp\log a}(p\log a)=a^x(p\log a),\quad f''(x)=e^{xp\log a}(p\log a)^2=a^x(p\log a)^2,\cdots$$

より

$$f^{(n)}(x)=a^x(p\log a)^n.$$

(3) $f(x)=e^{ax}$ とおく。

$$f'(x)=e^{ax}\cdot(ax)'=ae^{ax},\quad f''(x)=a\cdot e^{ax}\cdot(ax)'=a^2e^{ax},\cdots$$

より

$$f^{(n)}(x)=a^ne^{ax}.$$

(4) $f(x)=xe^{ax}$ とおく。Leibniz の法則から

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(x)^{(k)}\left(e^{ax}\right)^{(n-k)}={}_n\mathrm{C}_0xe^{ax}a^n+{}_n\mathrm{C}_1 1\cdot e^{ax}a^{n-1}+0\\&=1\cdot xe^{ax}a^n+n\cdot e^{ax}a^{n-1}=e^{ax}a^{n-1}(ax+n).\end{aligned}$$

(5) $f(x)=x^2e^{ax}$ とおく。Leibniz の法則から

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(x^2)^{(k)}\left(e^{ax}\right)^{(n-k)}={}_n\mathrm{C}_0x^2e^{ax}a^n+{}_n\mathrm{C}_1 2x\cdot e^{ax}a^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2 2\cdot e^{ax}a^{n-2}+0\\&=1\cdot x^2e^{ax}a^n+n\cdot 2xe^{ax}a^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2e^{ax}a^{n-2}=e^{ax}a^{n-2}(a^2x^2+2nax+n(n-1)).\end{aligned}$$

(6) $f(x)=\sinh x$ とおく。

$$f'(x)=\cosh x,\quad f''(x)=\sinh x=f(x)$$

であるから、

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\sinh x & (n\text{ が偶数})\\ \cosh x & (n\text{ が奇数}).\end{cases}$$

(7) $f(x)=\cosh x$ とおくと、前問と同様に

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\cosh x & (n\text{ が偶数})\\ \sinh x & (n\text{ が奇数}).\end{cases}$$

(8) $f(x) = \log x$ とおくと、

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f''(x) = (-1)x^{-2}, \quad f'''(x) = (-1)(-2)x^{-3}, \cdots$$

であるから、$n \geq 1$ のとき、

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}.$$

(9) $f(x) = \dfrac{1}{x+a} = (x+a)^{-1}$ とおくと、

$$f'(x) = (-1)(x+a)^{-2}, \quad f''(x) = (-1)(-2)(x+a)^{-3}, \quad f'''(x) = (-1)(-2)(-3)(x+a)^{-4}, \cdots$$

であるから

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x+a)^{-(n+1)}.$$

(10) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ とおくと、部分分数分解して

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} = -\frac{x+1}{x-1} = -\frac{x-1+2}{x-1} = -1 - \frac{2}{x-1} = -1 - 2(x-1)^{-1}$$

であるから、

$$f'(x) = -2(-1)(x-1)^{-2}, \quad f''(x) = -2(-1)(-2)(x-1)^{-3}, \quad f'''(x) = -2(-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4}, \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = -2(-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)} = (-1)^{n+1}2n!(x-1)^{-(n+1)}.$$

(11) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ とおくと、部分分数分解して

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} = -\frac{x+1}{x-1} = -\frac{x-1+2}{x-1} = -1 - \frac{2}{x-1} = -1 - 2(x-1)^{-1}$$

であるから、

$$f'(x) = -2(-1)(x-1)^{-2}, \quad f''(x) = -2(-1)(-2)(x-1)^{-3}, \quad f'''(x) = -2(-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4}, \cdots$$

$n \geq 1$ に対して、

$$f^{(n)}(x) = -2(-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)} = (-1)^{n+1}2n!(x-1)^{-(n+1)}.$$

(12) $f(x) = \dfrac{x}{a+bx}$ とおく。これも部分分数分解で解けるが、Leibniz の法則を使って解いてみよう。まず準備として、

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[(bx+a)^{-1}\right] = (-1)(-2)\cdots(-\ell)(bx+a)^{-(\ell+1)}b^\ell = (-1)^\ell \ell! b^\ell (bx+a)^{-(\ell+1)}.$$

これを用いて

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \frac{d^k}{dx^k}(x) \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[(bx+a)^{-1}\right] \\
&= {}_n\mathrm{C}_0 x \cdot (-1)^n n! b^n (bx+a)^{-(n+1)} + {}_n\mathrm{C}_1 1 \cdot (-1)^{n-1}(n-1)! b^{n-1}(bx+a)^{-n} + 0 \\
&= (-1)^n n! b^{n-1}(bx+a)^{-(n+1)}\left[bx + (-1)(bx+a)\right] \\
&= (-1)^n (n-1)! a b^{n-1}(bx+a)^{-(n+1)}.
\end{aligned}$$

5　6月10日 (テイラー展開)

cos のマクローリン展開を求めよ。

解答　$f(x) = \cos x$ とおくと、

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x$$

であるから、

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & (n \text{ を } 4 \text{ で割ると余り } 0) \\ -\sin x & (n \text{ を } 4 \text{ で割ると余り } 1) \\ -\cos x & (n \text{ を } 4 \text{ で割ると余り } 2) \\ \sin x & (n \text{ を } 4 \text{ で割ると余り } 3) \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & (n \text{ を } 4 \text{ で割ると余り } 0) \\ 0 & (n \text{ を } 4 \text{ で割ると余り } 1) \\ -1 & (n \text{ を } 4 \text{ で割ると余り } 2) \\ 0 & (n \text{ を } 4 \text{ で割ると余り } 3) \end{cases}$$

これから

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7 + \cdots \\ &= 1 + 0 \cdot x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{-1}{6!}x^6 + \frac{0}{7!}x^7 + \frac{1}{8!}x^8 + \frac{0}{9!}x^9 + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}. \end{aligned}$$

6　6月17？日 (不定形の極限)

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{1-\cos x}{x - \sin x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ $(a, b > 0)$

解答　(1) $\cos x, \sin x$ をマクローリン展開すると、

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$$

となるので、$x \to +0$ のとき

$$\frac{1-\cos x}{x-\sin x} = \frac{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{\frac{x^3}{6} + O(x^5)} = \frac{\frac{3}{x} + O(x)}{1 + O(x^2)} \to \frac{\infty + 0}{1+0} = \infty. \quad \therefore \lim_{x\to+0} \frac{1-\cos x}{x-\sin x} = \infty.$$

(2) 上と同様にして、$x \to 0$ のとき

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{6} + O(x^5)}{x^3} = \frac{1}{6} + O(x^2) \to \frac{1}{6} \quad \therefore \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

(3) $f(x) = a^x$ とするとき、$f^{(n)}(x) = a^x(\log a)^n$ であるから、

$$a^x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = 1 + x\log a + \frac{(\log a)^2}{2}x^2 + \cdots = 1 + x\log a + O(x^2).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{a^x-b^x}{x} &= \frac{\bigl(1+x\log a+O(x^2)\bigr)-\bigl(1+x\log b+O(x^2)\bigr)}{x}=\frac{x(\log a-\log b)+O(x^2)}{x}\\ &= \log a-\log b+O(x)\to\log a-\log b\quad(x\to 0).\end{aligned}$$

すなわち

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\log a-\log b.$$

7　7月2日 ($\sqrt{2\text{次式}}$ など)

テキスト p.38 の問題 2 の (1), (3), (5) を解け。

(1) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-6x+13}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+4}$. $x-3=u$ とおくと、

$$I=\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{2}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C.$$

(3) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$. $x-2=u$ とおくと、

$$I=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\sin^{-1}u+C=\sin^{-1}(x-2)+C.$$

(5) $I=\displaystyle\int\sqrt{x^2+4x}\,dx=\int\sqrt{(x+2)^2-4}\,dx$. $x+2=2u$ とおくと、

$$\begin{aligned}I &= 4\int\sqrt{u^2-1}\,du+C=4\cdot\frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2-1}-1\cdot\log\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|\right)+C\\ &= 2\left(u\sqrt{u^2-1}-\log\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|\right)+C\\ &= 2\left[\frac{x+2}{2}\sqrt{\frac{x^2+4x}{4}}-\log\left|\frac{x+2}{2}+\sqrt{\frac{x^2+4x}{4}}\right|\right]+C\\ &= \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x}-2\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|+C'.\end{aligned}$$

よくある間違い: $\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|$ を $\log\left|x+2\sqrt{x^2+4x}\right|$ とする人が (昔から) なぜか非常に多いです。7 月 9 日に問題 2 の (1)–(8) の略解を配ったので、参考にして下さい。

8　7月9日 (有理関数の積分)

テキスト p.44 の問題 1 の (3), (5), (7), (9) を解け。

(3) $I=\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2-1}{x(x-1)}\,dx.$

$x^3-2x^2-1=(x+3)(x^2-x)+3x-1$ であるから、$\dfrac{x^3+2x^2-1}{x(x-1)}=x+3+\dfrac{3x-1}{x(x-1)}$.

$$\frac{3x-1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$$

を満たす定数 A, B が存在するはずである。分母を払って

$$3x-1=A(x-1)+Bx.$$

$x=1$ を代入して $2=B$. $x=0$ を代入して $-1=-A$ より $A=1$. ゆえに

$$I=\int\left(x+3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+3x+\log|x|+2\log|x-1|+C' \quad (C' \text{ は積分定数}).$$

(5) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2-1)}$.

$$\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

を満たす定数 A, B, C が存在するはずである。分母を払って

$$1=A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1).$$

順に $x=0,\ 1,\ -1$ を代入して、$1=-A,\ 1=2C,\ 1=2B$ となるから、$A=-1,\ B=1/2,\ C=1/2$ で、

$$I=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}\right)dx=-\log|x|+\frac{\log|x+1|}{2}+\frac{\log|x-1|}{2}+C' \quad (C' \text{ は積分定数}).$$

(7) $I=\displaystyle\int\frac{x+2}{x^2(x^2+1)}\,dx$.

$$\frac{x+2}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

を満たす定数 A, B, C, D が存在するはずである。分母を払って、展開すると

$$\begin{aligned} x+2 &= Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2=Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+Dx^2 \\ &= (A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B. \end{aligned}$$

係数を比較して、$A+C=0,\ B+D=0,\ A=1,\ B=2$. これから $C=-A=-1,\ D=-B=-2$. ゆえに

$$I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{x+2}{x^2+1}\right)dx.$$

$$\begin{aligned} \int\frac{1}{x}\,dx &= \log|x|+C_1, \quad \int\frac{2}{x^2}\,dx=2\int x^{-2}\,dx=2\cdot(-1)x^{-1}+C_2=-\frac{2}{x}+C_2, \\ \int\frac{x}{x^2+1}\,dx &= \int\frac{\frac{1}{2}(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C_3, \int\frac{2}{x^2+1}\,dx=2\tan^{-1}x+C_4 \end{aligned}$$

となるので、

$$I=\log|x|-\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-2\tan^{-1}x+C'.$$

(9) $I=\displaystyle\int\frac{x+1}{x(x^2+x+1)}\,dx$.

$$\frac{x+1}{x(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

を満たす定数 A, B, C が存在するはずである。分母を払って

$$x+1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)x=(A+B)x^2+(A+C)x+A.$$

係数を比較して $A+B=0,\ A+C=1,\ A=1$. これから $B=-A=-1,\ C=1-A=1-1=0$. ゆえに

$$I=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+x+1}\right)dx=\log|x|-\int\frac{x}{x^2+x+1}\,dx.$$

$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ である。$x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}u$ とおくと、$x^2+x+1=\dfrac{3}{4}(u^2+1)$, $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}du$, $x=(\sqrt{3}u-1)/2$ であるから、

$$\begin{aligned}
\int\frac{x}{x^2+x+1}\,dx &= \int\frac{(\sqrt{3}u-1)/2}{\frac{3}{4}(u^2+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}du=\int\frac{u-\frac{1}{\sqrt{3}}}{u^2+1}du=\int\frac{\frac{1}{2}(u^2+1)'}{u^2+1}du-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{u^2+1}du\\
&= \frac{1}{2}\log(u^2+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}u+C'\\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}(x^2+x+1)\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C'\\
&= \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C''.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$I=\log|x|-\frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C'''.$$

あるいは、$(x^2+x+1)'=2x+1$ に注目して、

$$\begin{aligned}
\int\frac{x}{x^2+x+1}\,dx &= \int\left(\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\right)dx=\int\frac{\frac{1}{2}(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}\\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1},
\end{aligned}$$

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{1}{\frac{3(u^2+1)}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}u+C'=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C'$$

という手順もあるが、大同小異？。

採点の基準は、部分分数分解について理解しているか、それから (もちろん) その後の積分の計算が正しく出来るかの二つを見る。後で見直しがしやすいように、計算ミスをしても中間点を稼げるように、途中経過の要所要所をちゃんと書くこと。例えばいきなり部分分数分解の間違えた結果だけ書いたりして、そこから積分計算を始めたりするのは拙い。