2004年度基礎数学III期末試験問題

2004年7月30日実施, 担当 桂田 祐史
教科書ノート等持込み不可, 解答用紙のみ提出

1, **2**, **3**, **4** の 4 問に解答せよ。

1

次の **1A**, **1B** のうちいずれか一つを選んで解答せよ。

1A

(1) $\sin^{-1}$ と $\cos^{-1}$ のグラフの概形を描け。(2) $\sin^{-1}$ の逆関数は何か (定義域も答えよ)。逆関数の微分法を用いて $\left(\sin^{-1} x\right)'$ を求めよ。(3) 区間 $(0,1)$ 内の任意の x に対して、$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

1B

(1) $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ の定義を書き、1 階, 2 階の導関数を求めよ。 (2) $\sinh(x+y)$ と $\cosh(x+y)$ を $\sinh x$, $\sinh y$, $\cosh x$, $\cosh y$ で表せ。(ヒント: 3 角関数の公式から見当をつけて、計算で確認せよ。) (3) $\tanh(x+y)$ を $\tanh x$, $\tanh y$ で表せ

1　2

次の **2A**, **2B** のうちいずれか一つを選んで解答せよ。

2A

α を実数として、$f(x) = (1+x)^\alpha$ $(|x|<1)$ とおくとき、以下の問に答えよ。
(1) 任意の自然数 n に対して、n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。(2) f のマクローリン展開を求めよ。(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \left(1+\dfrac{x}{3}\right)}{x^2}$ を求めよ。

2B

(1) $\sinh x$ のマクローリン展開を求めよ。(2) $\tan x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + O(x^5)$ $(x \to 0)$ を満たす定数 A, B, C, D, E を求めよ。(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \tan x}{x^3}$ を求めよ。

2　3

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$ を求めよ。(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x}\,dx$ を求めよ。

3　4

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$ を求めよ。(2) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x^4-1}$ を求めよ。