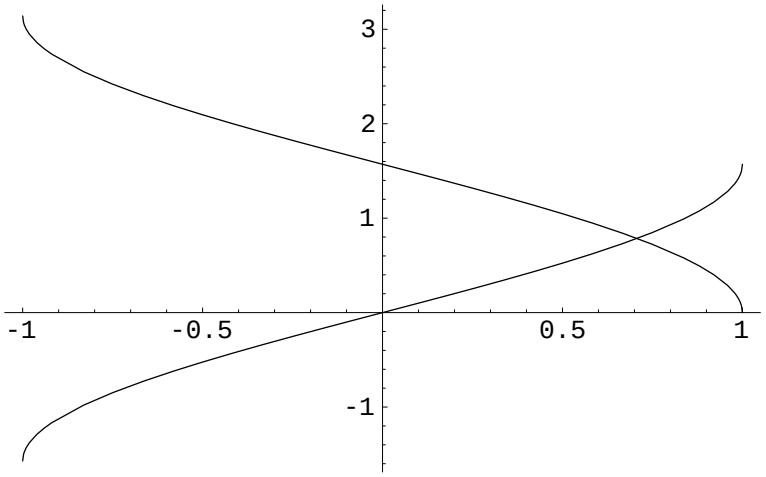
2004年度基礎数学III 期末テスト解説

桂田 祐史

2004年8月1日

1A

(1) $\sin^{-1}$ は $[-\pi/2, \pi/2] \ni x \mapsto \sin x \in [-1,1]$ の逆関数、$\cos^{-1}$ は $[0,\pi] \ni x \mapsto \cos x \in [-1,1]$ の逆関数であるから、「逆関数のグラフはもとの関数のグラフを $y=x$ について折り返したものである」という事実を用いれば簡単に描ける (特に $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ の定義域はともに $[-1,1]$ で、値域はそれぞれ $[-\pi/2,\pi/2]$, $[0,\pi]$ である)。



(この問題で厳しい採点をすると危ないと感じたので、この問題の配点は低く押さえた。) 授業で導入した逆三角関数はいわゆる主値というやつで、ふつうの一価関数だが、この答案には (一つの x に複数の y が対応する) 多価関数のグラフを描いてしまった人が多かった。多価関数として扱う場合もないわけではないが、その場合は、何の制限もつけない無限多価関数とするのが普通である。ところが答案では自分で勝手な範囲に制限して、(率直に言って)「変な」解答が多かった。

(2) (繰り返しになるが) $\sin^{-1}$ の逆は $f\colon [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x$. そこで $y = \sin^{-1} x$ とおくと、$x = \sin y$, $y \in [-\pi/2,\pi/2]$ となるので、$\cos y \geq 0$ に注意して[1]、

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

[1]例えば $\cos y < 0$ のときは $\cos y = -\sqrt{1-\sin^2 y}$ となるわけで、符号をチェックするのは大事なことである。それゆえ、y の範囲をきちんと把握することが大事になる。

ゆえに

$$\left(\sin^{-1} x\right)' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3) (これは授業中に二通りの解法を示した。)

解法 1

(2) と同様にして $(\cos^{-1} x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ が示せる。

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

となるので、$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ は定数であり、

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \sin^{-1} 0 + \cos^{-1} 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

なお、$\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ ともに定義域は $[-1, 1]$ で、実は任意の $x \in [-1, 1]$ について成り立つ。

解法 2

$\sin^{-1} x = y$, $\cos^{-1} x = z$ とおくと、

$$\sin y = x, \quad y \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \cos z = x, \quad z \in [0, \pi].$$

これから

$$\sin y = x = \cos z = \sin(\pi/2 - z).$$

$z \in [0, \pi/2]$ より $\pi/2 - z \in [-\pi/2, \pi/2]$ で、$[-\pi/2, \pi/2]$ で $\sin$ は単調増加だから特に一対一なので、$y = \pi/2 - z$ が導かれる。ゆえに

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = y + z = \pi/2.$$

第 3 の解法

ところである人の答案は、「(1) の結果から $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ が成り立つ」。3 角関数のグラフの対称性を知っていれば、まさしくその通り。■

1B

(1) まず双曲線関数の定義は

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

導関数は (途中経過は省略して)

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$(\cosh x)'' = \cosh x, \quad (\sinh x)'' = \sinh x, \quad (\tanh x)'' = -\frac{2\sinh x}{\cosh^3 x}.$$

(2) まず結果は

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

(★) $$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

対応する三角関数の公式とは符号が異なることがあるのに注意しないといけない。これは確かめる過程で気が付くはずのことである。つまり (★) については、「$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$」という公式を念頭に、

$$\begin{aligned}
\cosh(x+y) &= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2}, \\
\cosh x \cosh y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y}e^{-x+y} + e^{-(x+y)}\right), \\
\sinh x \sinh y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-(x+y)}\right)
\end{aligned}$$

という式を作ってにらむと、$-$ ではなく $+$ とした (★) が浮かぶ、というわけである。

(3) これは (2) の結果を使うだけ (やっていることは tan の加法定理の通常の導出法と同じ)。

$$\begin{aligned}
\tanh(x+y) &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \frac{\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y} = \frac{\dfrac{\sinh x}{\cosh x} + \dfrac{\sinh y}{\cosh y}}{1 + \dfrac{\sinh x}{\cosh x} \cdot \dfrac{\sinh y}{\cosh y}} \\
&= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.
\end{aligned}$$

2A

(1) これは宿題にしたことがあり、$n \geq 1$ のとき

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

この結果を ${}_\alpha\mathrm{P}_n$ と書いた人が何人かいた。${}_\alpha\mathrm{P}_n$ は順列のつもりなのかもしれないが、ここでは α は一般の実数であって、自然数とは限らないので、この記号を使うのは不適当である (採点上は大目に見た)。同じ理由で $\dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!}$ と書くのも間違いである。

(2) マクローリン展開の公式に (1) から分かる $f^{(n)}(0)$ を代入するだけである。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

(3) 上の展開式で $\alpha = 1/3$ の場合を使って、

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \cdots = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + O(x^3)$$

となるので、$x \to 0$ のとき

$$\frac{\sqrt[3]{1+x} - (1+x/3)}{x^2} = -\frac{1}{9} + O(x) \to -\frac{1}{9}.$$

2B

(1) これはもっとも簡単な例のうちの一つだから、楽勝だと思ったのだけれど...

$$\sinh x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

(2) 微積分の入門書に $\tan x$ のマクローリン展開が載っていることは稀である。自分でやってみると分かるが簡単にはならない。実は一般項を Bernoulli 数という数列を用いて表すことが出来るが、ここでは省略する。

この問題では一般項を求めることが要求されているわけではなく、素朴な計算を行えばよい。$f(x) = \tan x$ とおき、$f^{(n)}(0)$ $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ を求めよう。地道に計算すると、

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = (\cos x)^{-2}, \quad f''(x) = (-2)(\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) = 2(\cos x)^{-3} \sin x,$$

$$f'''(x) = -2\left[(-3)(\cos x)^{-4} \cdot (-\sin x) \cdot \sin x + (\cos x)^{-3} \cdot \cos x\right] = 6(\cos x)^{-4} \sin^2 x - 2(\cos x)^{-2},$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= 6\left[(-4)(\cos x)^{-5}(-\sin x)\sin^2 x + 6(\cos x)^{-4} \cdot 2\sin x \cos x\right] - 2 \cdot (-2)(\cos x)^{-3}(-\sin x) \\ &= 24(\cos x)^{-5}\sin^3 x + 12(\cos x)^{-3}\sin x - 4(\cos x)^{-3}\sin x \end{aligned}$$

から

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

となることが分かるから、

$$\tan x = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + O(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5).$$

これから $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = \dfrac{1}{3}$, $E = 0$.

なお、次のような工夫もある。$y = \tan x$ とおいて、

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$

に注意して、

$$\begin{aligned} y'' &= 2yy' = 2y(1+y^2) = 2y + 2y^3, \\ y^{(3)} &= (2+6y^2)y' = (2+6y^2)(1+y^2) = 2 + 8y^2 + 6y^4, \\ y^{(4)} &= (16y + 24y^3)y' = (16y + 24y^3)(1+y^2) = 16y + 40y^3 + 24y^5 \end{aligned}$$

と計算して、$x=0$ のとき $y=0$ であるから... とすると、少し簡単になる。

(3) $x \to 0$ のとき

$$\frac{\sinh x - \tan x}{x^3} = \frac{x + \dfrac{x^3}{6} + O(x^5) - \left(x + \dfrac{x^3}{3} + O(x^5)\right)}{x^3} = \frac{-\dfrac{x^3}{6} + O(x^5)}{x^3} = -\frac{1}{6} + O(x^2)$$

であるから、極限値は $-\dfrac{1}{6}$.

3

(1) $-x^2+4x-3 = -(x^2-4x)-3 = -(x-2)^2+4-3 = 1-(x-2)^2$ であるから、$x-2=u$ とおくと、$dx=du$ で、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C = \sin^{-1}(x-2) + C.$$

(2) $x^2+4x = (x+2)^2 - 4$ であるから、

$$\int \sqrt{x^2+k}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k \log\left|x + \sqrt{x^2+k}\right|\right)$$

という公式の出番である。$x+2=u$ とおくと、$x^2+4x = u^2-4$, $dx=du$ であるから、

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+4x}\, dx &= \int \sqrt{u^2-4}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2-4} + (-4)\log\left|u+\sqrt{u^2-4}\right|\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left[(x+2)\sqrt{x^2+4x} - 4\log\left|(x+2)+\sqrt{x^2+4x}\right|\right] + C.\end{aligned}$$

4

(1) まず部分分数分解しなくてはならない。分母の実数の範囲での因数分解は $x^4-1 = (x^2+1)(x+1)(x-1)$ であり、

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}$$

を満たす定数 A, B, C, D が存在するはずである。分母を払って

$$1 = (Ax+B)(x+1)(x-1) + C(x^2+1)(x-1) + D(x^2+1)(x+1).$$

$x=1$, $x=-1$ を代入したり、最高次の係数や定数項を比較したりして、

$$A=0, \quad B=-\frac{1}{2}, \quad C=-\frac{1}{4}, \quad D=\frac{1}{4}$$

が導かれる[2]。すなわち

$$\frac{1}{x^4-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

[2]ここでは $A=0$ となったが、これは計算して始めて分かることであって、最初から $\dfrac{1}{x^4-1} = \dfrac{B}{x^2+1} + \dfrac{C}{x+1} + \dfrac{D}{x-1}$ とおけるかどうかは分からないことに注意しよう。答案でこうやった人は少なくなかった。

となる。これから

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = -\frac{1}{2}\tan^{-1}x + \frac{1}{4}\left(\log|x-1| - \log|x+1|\right) + C.$$

(2) 広義積分であるから、定義に従って

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x^4-1} &= \lim_{R\to\infty}\int_{\sqrt{3}}^{R}\frac{dx}{x^4-1} \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\tan^{-1}x + \frac{1}{4}\left(\log|x-1| - \log|x+1|\right)\right]_{\sqrt{3}}^{R}.\end{aligned}$$

ここで $R\to\infty$ のとき

$$\tan^{-1}R \to \frac{\pi}{2}, \quad \log(R-1)-\log(R+1) = \log\frac{R-1}{R+1} = \log\frac{1-1/R}{1+1/R} \to \log 1 = 0$$

であること、$\tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x^4-1} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\left(\log(\sqrt{3}-1) - \log(\sqrt{3}+1)\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \\ &= -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\log\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} \\ &= -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

ちなみに値は $0.06744\cdots$ (かなり小さい)。