2004年度基礎数学III期末試験 略解

桂田 祐史

2004年7月30日

1A

(2) $\sin^{-1}$ の逆は $f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x$. $y = \sin^{-1} x$ とおくと、$x = \sin y$, $y \in [-pi/2, \pi/2]$ となるので、$\cos y \geq 0$ に注意して、

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

ゆえに

$$\left(\sin^{-1} x\right)' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3) (これは授業中に説明した。二通りの解法を示した。) (2) と同様にして $(\cos^{-1} x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ が示せる。

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

となるので、

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \sin^{-1} 0 + \cos^{-1} 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

なお、$\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ ともに定義域は $[-1,1]$ で、実は任意の $x \in [-1,1]$ について成り立つ。

1B

(1)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$(\cosh x)'' = \cosh x, \quad (\sinh x)'' = \sinh x, \quad (\tanh x)'' = -\frac{2\sinh x}{\cosh^3 x}.$$

(2) 結果のみ書いておく。

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \quad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

(3) これは (2) の結果を使うだけ。やはり結果のみ書くと

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

2A

(1) $n \geq 1$ のとき

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

(2)

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

(3) $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{9} + O(x^3)$ となるので、$x \to 0$ のとき

$$\frac{\sqrt[3]{1+x} - (1+x/3)}{x^2} = -\frac{1}{9} + O(x) \to -\frac{1}{9}.$$

2B

(1) $\sinh x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$. (2) $f(x) = \tan x$ とおくと、地道に計算して

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

となることが分かるから、

$$\tan x = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + O(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5).$$

これから $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = \dfrac{1}{3}$, $E = 0$. (3) 途中省略して $-\dfrac{1}{6}$

3

これは宿題です。途中を省略して

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \sin^{-1}(x-2) + C.$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x}\,dx = \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x} - 2\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right| + C.$ ただし、いずれも C は積分定数を表す。

4

(1) 部分分数分解は

$$\frac{1}{x^4-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

となる。これから

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = -\frac{1}{2}\tan^{-1}x + \frac{1}{4}\left(\log|x-1| - \log|x+1|\right) + C.$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x^4-1} &= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{4}\left(\log|x-1|-\log|x+1|\right)\right]_{\sqrt{3}}^{R} \\ &= -\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\left(\log(\sqrt{3}+1)-\log(\sqrt{3}-1)\right).\end{aligned}$$

ちなみに値は $0.06744\cdots$ (かなり小さい)。