2003 年度基礎数学 III 期末試験問題 解答と解説

2003 年 7 月 26 日実施, 担当 桂田 祐史
教科書ノート等持込み不可, 解答用紙のみ提出
第 1 問以外は途中経過も書くこと

1 (1) 以下の空欄 ① ～ ⑧ を埋めよ。

Arctan の逆関数を f とすると、f の定義域は $\boxed{\quad ① \quad}$, 値域は $\boxed{\quad ② \quad}$ で、$x \in \boxed{\quad ① \quad}$ に対して $f(x) = \tan x$. f は単調 $\boxed{\quad ③ \quad}$ であるから、1 対 1 (単射) であることがわかる。

$y = \operatorname{Arctan} x$ とすると $x = \boxed{\quad ④ \quad}$ であるから、$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \boxed{\quad ⑤ \quad}$. ゆえに $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1} = \boxed{\quad ⑥ \quad}$.

$\operatorname{Arctan} x$ のことを $\tan^{\boxed{\quad ⑦ \quad}} x$ とも書く。$\operatorname{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right) = \boxed{\quad ⑧ \quad}$ である。

(2) $y = \operatorname{Arctan} x$ のグラフを描け。

解答 (1) 厳密には答は一通りには決まらないところがある (だから入試のようなカタイ試験には向かない問題である。採点は「本質的に出来ていれば OK とする」)。

① $(-\pi/2, \pi/2)$ ② $(-\infty, \infty)$ (または $\mathbf{R}$, 「実数全体の集合」) ③ 増加 ④ $\tan y$ ⑤ $\tan^2 y$ ⑥ $\dfrac{1}{1+x^2}$ ⑦ -1 ⑧ $-\dfrac{\pi}{3}$

(2) 省略。

解説

- ① で $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ とした人が少なからずいたが、$\pm\dfrac{\pi}{2}$ は tan の定義域に属するはずはないので、$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ でなければいけない。念のために復習しておくと

$$[a,b] = \{x | a \leqq x \leqq b\}, \quad (a,b) = \{x | a < x < b\}, \quad (a,b] = \{x | a < x \leqq b\}, \quad [a,b) = \{x | a \leqq x < b\}.$$

- ② で $[-\infty, \infty]$ とした人もいた。無限大 $\pm\infty$ は数ではないことに注意。

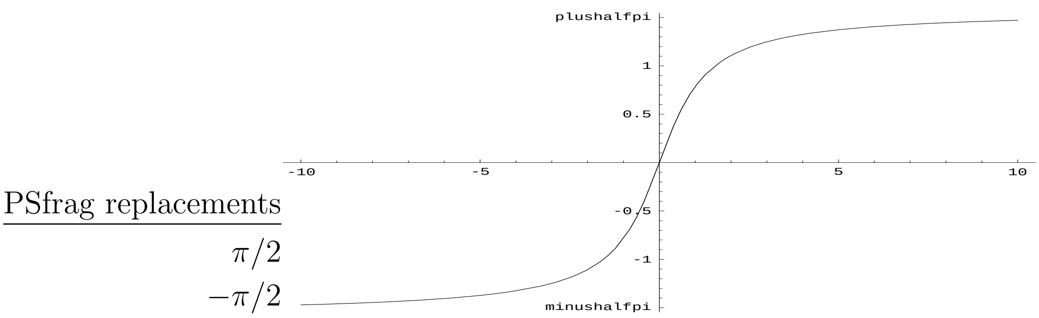
$$\mathbf{R} = \text{実数全体の集合} = (-\infty, \infty).$$

- ⑧ で $\dfrac{2\pi}{3}$ とした人が多かった。確かに $\tan\dfrac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ であるが、Arctan の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから、

$$\operatorname{Arctan}(-\sqrt{3}) = x \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = -\sqrt{3} \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

であって、$x = -\dfrac{\pi}{3}$ が正しい。

- グラフを間違えた人が多い。漸近線が $y = \pm\pi$ でなく、$y = \pm 1$ になっているなど。



2 $f(x) = \cosh x$ に対して、以下の問に答えよ。
(1) $f(x)$ のマクローリン展開 (0 のまわりの無限級数展開) を求めよ。 (2) $f(x)$ のマクローリン展開を $n-1$ 次の項で打ち切った時の剰余項 R_n を求めよ。 (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-a}{x^2} - b\right) = 0$ を満たす定数 a, b を求めよ。

解答 (1) $f'(x) = \sinh x$, $f''(x) = \cosh x$ であるから、

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cosh x & (n \text{ が偶数}) \\ \sinh x & (n \text{ が奇数}), \end{cases} \qquad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数}) \\ 0 & (n \text{ が奇数}), \end{cases}$$

である。ゆえにマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

(2) テイラーの定理から

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n$$

としたときの R_n は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n, \quad (\theta \text{ は } x \text{ と } n \text{ で決まる } 0 < \theta < 1 \text{ の範囲の数})$$

と表される。ゆえに

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{\cosh(\theta x)}{n!} x^n & (n \text{ が偶数}) \\ \dfrac{\sinh(\theta x)}{n!} x^n & (n \text{ が奇数}), \end{cases} \qquad (\theta \text{ は } x \text{ と } n \text{ で決まる } 0 < \theta < 1 \text{ の範囲の数}).$$

(3) 上の結果から

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4) \quad (x \to 0)$$

であるから

$$\frac{f(x)-a}{x^2} - b = \frac{1 - a + \left(\frac{1}{2} - b\right) x^2 + O(x^4)}{x^2} \quad (x \to 0).$$

これから極限が存在するためには $a = 1$ でなければならず、極限が 0 であるためには $b = \dfrac{1}{2}$ でなければならないことが分かる。 ■

解説

- マクローリン展開とは、$f(x)$ を x のべき x^n の無限和 (べき級数と言う) で表わすものである。それなのに

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n \quad (\text{左辺がおかしい！})$$

  や

$$f(x) = 1, \frac{x^2}{2}, \frac{x^4}{4!}, \cdots, \frac{x^n}{n!} \quad (\text{右辺がべき級数でなくておかしい！})$$

  のようなムチャクチャな式を書いた人がいた。

- (3) の別解。まず

$$0 = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x) - a}{x^2} - b \right) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - a - bx^2}{x^2}$$

  に注意する。最右辺について、$x \to 0$ のとき分母 $\to 0$ だから、極限が存在するためには、分子 $\to 0$ でなければならない。ゆえに

$$0 = \lim_{x\to 0} (f(x) - a - bx^2) = f(0) - a = 1 - a$$

  であるから $a = 1$. 一方、不定形の極限 (分母と分子がともに 0 に収束する) であるから、ロピタルの定理が適用できて、

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - a - bx^2}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(f(x) - bx^2)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - 2bx}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sinh x - 2bx)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 2b}{2} = \frac{1 - 2b}{2}. \end{aligned}$$

  これから $b = 1/2$. ■ (この方針で正解に到達した人はいなかった。)

- θ の説明をしなかった人がいたが、それはまずい。せめて $0 < \theta < 1$ くらいは書いておくこと。

3 次の 3A, 3B のうちいずれか一方を選択して解答せよ。

3A (1) k を実定数とするとき $\int \sqrt{x^2 + k}\, dx$ を求めよ。ただし必要ならば公式 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right|$ を用いても良い。 (2) xy 平面における放物線 $y = x^2$ の $(0, 0)$ から $(1, 1)$ までの弧長を求めよ。

3A の解答　(1) どういう方法で求めてもよい。念のため結果だけ書いておくと[1]、

$$I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k}+k\log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right).$$

(2) (この話も授業で紹介した。) 曲線の長さ L は、

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=2\int_0^1\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\,dx$$

であるから、(1) で $k=\dfrac{1}{4}$ の場合で、

$$\begin{aligned}L &= 2\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right)\right]_0^1\\ &= \left[x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right]_0^1\\ &= \left(1\cdot\sqrt{1^2+\frac{1}{4}}-0\right)+\frac{1}{4}\left(\log\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right)-\log\left(0+\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)\right)\\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{5}\right).\blacksquare\end{aligned}$$

ちなみに小数表示すると $1.4789428575445974338279060\cdots$. ($(0,0)$ と $(1,1)$ を結ぶ線分の長さは $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ だから、4.6% 増くらいの長さである。)

解説　準備不足の人が多かった。

- 多くの人が $x=\sqrt{k}\tan\theta$ という変数変換をしたが、これは $k>0$ のときだけしか使えない。もちろん $k<0$ のときは別扱いにすればよいのだが、そうした人はいなかった。
- $k>0$ の場合、$x=\sqrt{k}\tan\theta$ $(-\pi/2<\theta<\pi/2)$ と置換すると

$$\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

  という不定積分が現われる。これは不定積分が求まるが[2]、結構面倒である。それで授業では部分積分をすることを勧めたのだが…
- 曲線の長さの公式は高校の数学 III の教科書にある。教科書の消化の具合いの悪い高校もあるようだが、重要なことなのでこの機会に覚えておこう。(もし習ったのに忘れたという人は、きっと覚え方が悪い。) 以下授業でも説明したが、もう一度解説する。例えば

$$x=f(t),\quad y=g(t)\quad (a\leqq t\leqq b)$$

[1]授業では部分積分を用いて導出したが、http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/kiso3/sekibun.pdf に色々な方法を書いておいた。

[2]例えば http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/kiso3/sekibun.pdf を見よ。

とパラメーター表示されている曲線の場合、これを運動する点の時刻 t における位置と解釈すると、

$$(f'(t), g'(t))$$

は速度ベクトル、その長さ

$$\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}$$

は速さとなるので、それを時間 t で積分した

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt$$

は道のり、つまり曲線の長さを表わす。関数 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ のグラフの場合は、

$$x = t, \quad y = f(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

がパラメーター表示になるので、

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

3B (1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ を求めよ。(2) $J = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$ を求めよ。

3B の解答 (1) $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ であるから分母は実数の範囲で因数分解できない。$x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \tan\theta$ $(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ と置換すると

$$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \quad \text{より} \quad \theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta, \quad x^2 + x + 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\tan^2\theta + 1\right) = \frac{3}{4\cos^2\theta}$$

であるから、

$$I = \int \frac{4\cos^2\theta}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta} d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \int d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{Arctan}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right).$$

(2)

$$\begin{aligned} J &= \int (x^2 + x + 1)^{-1} dx = \int (x)' \cdot (x^2 + x + 1)^{-1} dx \\ &= x \cdot (x^2 + x + 1)^{-1} - \int x \cdot (-1)(x^2 + x + 1)^{-2}(2x + 1) dx \\ &= \frac{x}{x^2 + x + 1} + \int \frac{2x^2 + x}{(x^2 + x + 1)^2} dx \end{aligned}$$

となるが、

$$2x^2+x=2(x^2+x+1)-x-2=2(x^2+x+1)-\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}=2(x^2+x+1)-\frac{1}{2}(x^2+x+1)'-\frac{3}{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \frac{x}{x^2+x+1}+2\int\frac{1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx \\ &= \frac{x}{x^2+x+1}+2I-\frac{1}{2}\frac{-1}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}J. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{3}{2}J=\frac{x+1/2}{x^2+x+1}+I$$

であるから、(1) の結果を用いて

$$J=\frac{2}{3}\left(\frac{x+1/2}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right).\blacksquare$$

解説　3B の (2) は面倒なので、きちんと出来た人はほとんどいない。それで (1) の配点を大きくしておいた。この問題は Arctan が必要な問題で、基礎数学 III のテストに出しておきたいものである。結構間違える人がいた。

- せっかく $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\theta$ まで出来たのに、これを x の関数で表わせないのは…
- (2) の別解。(1) の解答のように置換すると、

$$\begin{aligned} J &= \int\left(\frac{4\cos^2\theta}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}\,d\theta=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{4\sqrt{3}}{9}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}(\theta+\sin\theta\cos\theta) \end{aligned}$$

  ところで

$$\theta=\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),\quad \sin\theta\cos\theta=\tan\theta\cos^2\theta=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{4(x^2+x+1)}$$

  であるから、

$$J=\frac{4\sqrt{3}}{9}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}.\blacksquare$$

4　α,β を正定数とするとき、$I_\alpha=\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^\alpha}\,dx,\ J_\beta=\int_0^1\frac{1}{x^\beta}\,dx$ を求めよ。

解答　I_α について。被積分関数は積分区間のいたるところで連続だが、積分区間は無限区間であるから I_α は広義積分であり、定義から

$$I_\alpha = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\, dx.$$

$\alpha = 1$ のときは、

$$I_1 = \lim_{R\to\infty} [\log|x|]_1^R = \lim_{R\to\infty} \log R = \infty.$$

$\alpha \neq 1$ のときは、

$$I_\alpha = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty} \frac{R^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} = \begin{cases} \dfrac{0-1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha > 1) \\ \dfrac{\infty - 1}{1-\alpha} = \infty & (\alpha < 1) \end{cases}$$

まとめると

$$I_\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha > 1) \\ \infty & (\alpha \leq 1) \end{cases}$$

J_β について。被積分関数 $\dfrac{1}{x^\beta}$ は積分区間の左端 $x = 0$ で定義されていないので、J_β は広義積分で、定義から

$$J_\beta = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\beta}\, dx.$$

$\beta = 1$ のときは、

$$J_1 = \lim_{\varepsilon\to+0} [\log|x|]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} (-\log\varepsilon) = \infty.$$

$\beta \neq 1$ のときは、

$$J_\beta = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\frac{x^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1-\varepsilon^{-\beta+1}}{-\beta+1} = \begin{cases} \dfrac{1-\infty}{1-\beta} = \infty & (\beta > 1) \\ \dfrac{1-0}{1-\beta} = \dfrac{1}{1-\beta} & (\beta < 1) \end{cases}$$

まとめると

$$J_\beta = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta} & (\beta < 1) \\ \infty & (\beta \geq 1) \end{cases}$$

が得られる。 ■

解説　丸暗記しようとした人がいるけれど、そういう馬鹿馬鹿しいことはやめよう。大体間違えるし (書けているつもりかもしれないけれど、ボロボロの解答が多い)、たとえ間違えなくても途中経過の筋が通っていない答には点は出せない。要点は何か、自分で整理・理解するのが本当である。

- I_α, J_β を
$$I_\alpha = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \quad J_\beta = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$$
のように極限で表わすことが重要である。これを書いただけで点がつく。I_α の方はそうしても J_β の方はしていない人が結構いた (おかしい)。

- $\alpha = 1$ や $\beta = 1$ の場合を無視した人が結構多い。その場合は原始関数が log になるので別扱いしないといけない。

- $\dfrac{1}{x^\alpha}$ の原始関数を間違える人がいる。こういうのを間違えてはいけない。微分して元にもどるかどうか、目で見て確認できるはずである。確認できないとしたら、答案の書き方が悪い。$\alpha \neq 1$ の場合、
$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^R x^{-\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^R = \frac{R^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$
微分して元に戻るように、指数は 1 増えて $-\alpha+1 = 1-\alpha$, 微分すると $1-\alpha$ をかけることになるから、それとキャンセルするように、分母に $1-\alpha$ をおく。微分すると、確かに元に戻ることが分かる。

- $$\lim_{R\to\infty}\frac{R^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, \quad \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1-\varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta},$$
という極限を計算する必要があるが、それには
$$\lim_{R\to\infty} R^p = \begin{cases} \infty & (p>0) \\ 1 & (p=0) \\ 0 & (p<0), \end{cases} \qquad \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^q = \begin{cases} 0 & (q>0) \\ 1 & (q=0) \\ \infty & (q<0) \end{cases}$$
を使うことになる。

- 慣れてくると lim を書くのをさぼって
$$\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^\infty = \frac{\infty^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\infty-1}{1-\alpha} = \infty & (1-\alpha>0) \\ \dfrac{0-1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1} & (1-\alpha<0) \end{cases}$$
のように計算できるがあまり勧めない。

- さて、計算問題に間違いはつきものだが、結果が正になることさえ気をつければ発見できる間違いがほとんどであった。I_α や I_β が 0 になったり、$-\infty$ になったり、$\alpha > 1$ の場合に $I_\alpha = \dfrac{1}{1-\alpha}$ になったり (それでは負になってしまう)。例え話をすると、確率が負になったり、1 より大きくなったりするのと同じで、かなり間抜けな間違いである。