2003年度基礎数学III期末試験問題解答　誤植訂正版

2003年7月26日実施, 担当 桂田 祐史
教科書ノート等持込み不可, 解答用紙のみ提出
第1問以外は途中経過も書くこと

1　(1) 以下の空欄 ① ～ ⑧ を埋めよ。

Arctan の逆関数を f とすると、f の定義域は $\boxed{\quad ① \quad}$, 値域は $\boxed{\quad ② \quad}$ で、$x \in \boxed{\quad ① \quad}$ に対して $f(x) = \tan x$. f は単調 $\boxed{\quad ③ \quad}$ であるから、1対1 (単射) であることがわかる。

$y = \operatorname{Arctan} x$ とすると $x = \boxed{\quad ④ \quad}$ であるから、$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \boxed{\quad ⑤ \quad}$. ゆえに $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1} = \boxed{\quad ⑥ \quad}$.

$\operatorname{Arctan} x$ のことを $\tan^{\boxed{\quad ⑦ \quad}} x$ とも書く。$\operatorname{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right) = \boxed{\quad ⑧ \quad}$ である。

(2) $y = \operatorname{Arctan} x$ のグラフを描け。

解答　(1) 厳密には答は一通りには決まらないところがある (だから入試のようなカタイ試験には向かない問題である。採点は「本質的に出来ていれば OK とする」)。

① $(-\pi/2, \pi/2)$　② $(-\infty, \infty)$ (または $\mathbf{R}$, 「実数全体の集合」)　③ 増加　④ $\tan y$　⑤ $\tan^2 y$　⑥ $\dfrac{1}{1+x^2}$　⑦ -1　⑧ $-\dfrac{\pi}{3}$

(2) 省略。

2　$f(x) = \cosh x$ に対して、以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ のマクローリン展開 (0 のまわりの無限級数展開) を求めよ。 (2) $f(x)$ のマクローリン展開を $n-1$ 次の項で打ち切った時の剰余項 R_n を求めよ。 (3) $\displaystyle\lim_{x \to 0}\left(\frac{f(x)-a}{x^2} - b\right) = 0$ を満たす定数 a, b を求めよ。

解答　(1) $f'(x) = \sinh x$, $f''(x) = \cosh x$ であるから、

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cosh x & (n \text{ が偶数}) \\ \sinh x & (n \text{ が奇数}), \end{cases} \qquad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数}) \\ 0 & (n \text{ が奇数}), \end{cases}$$

である。ゆえにマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

(2) テイラーの定理から

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n$$

としたときの R_n は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n, \quad (\theta \text{ は } x \text{ と } n \text{ で決まる } 0 < \theta < 1 \text{ の範囲の数})$$

と表される。ゆえに

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{\cosh(\theta x)}{n!}x^n & (n \text{ が偶数}) \\ \dfrac{\sinh(\theta x)}{n!}x^n & (n \text{ が奇数}), \end{cases} \qquad (\theta \text{ は } x \text{ と } n \text{ で決まる } 0<\theta<1 \text{ の範囲の数}).$$

(3) 上の結果から

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4) \quad (x \to 0)$$

であるから

$$\frac{f(x)-a}{x^2} - b = \frac{1-a+\left(\frac{1}{2}-b\right)x^2 + O(x^4)}{x^2} \quad (x \to 0).$$

これから極限が存在するためには $a=1$ でなければならず、極限が 0 であるためには $b = \dfrac{1}{2}$ でなければならないことが分かる。■

3　次の 3A, 3B のうちいずれか一方を選択して解答せよ。

3A　(1) k を実定数とするとき $\displaystyle\int \sqrt{x^2+k}\,dx$ を求めよ。ただし必要ならば公式 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|$ を用いても良い。 (2) xy 平面における放物線 $y=x^2$ の $(0,0)$ から $(1,1)$ までの弧長を求めよ。

3A の解答　(1) どういう方法で求めてもよい。念のため結果だけ書いておくと[1]、

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right).$$

(2) (この話も授業で紹介した。) 曲線の長さ L は、

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\,dx$$

であるから、(1) で $k = \dfrac{1}{4}$ の場合で、

$$\begin{aligned} L &= 2\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right)\right]_0^1 \\ &= \left[x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right]_0^1 \\ &= \left(1\cdot\sqrt{1^2+\frac{1}{4}} - 0\right) + \frac{1}{4}\left(\log\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right) - \log\left(0+\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{5}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

[1]授業では部分積分を用いて導出したが、http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/kiso3/sekibun.pdf に色々な方法を書いておいた。

ちなみに小数表示すると $1.47894285754459743382790 60\cdots$. ($(0,0)$ と $(1,1)$ を結ぶ線分の長さは $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ だから、4.6% 増くらいの長さである。)

3B (1) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x+1}$ を求めよ。(2) $J=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ を求めよ。

3B の解答 (1) $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ であるから分母は実数の範囲で因数分解できない。$x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ ($-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) と置換すると

$$\tan\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\quad より\quad \theta=\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta,\quad x^2+x+1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left(\tan^2\theta+1\right)=\frac{3}{4\cos^2\theta}$$

であるから、

$$I=\int\frac{4\cos^2\theta}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\int d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

(2)

$$\begin{aligned}J &= \int(x^2+x+1)^{-1}dx=\int(x)'\cdot(x^2+x+1)^{-1}dx\\ &= x\cdot(x^2+x+1)^{-1}-\int x\cdot(-1)(x^2+x+1)^{-2}(2x+1)dx\\ &= \frac{x}{x^2+x+1}+\int\frac{2x^2+x}{(x^2+x+1)^2}dx\end{aligned}$$

となるが、

$$2x^2+x=2(x^2+x+1)-x-2=2(x^2+x+1)-\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}=2(x^2+x+1)-\frac{1}{2}(x^2+x+1)'-\frac{3}{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned}I &= \frac{x}{x^2+x+1}+2\int\frac{1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx\\ &= \frac{x}{x^2+x+1}+2I-\frac{1}{2}\frac{-1}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}J.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{3}{2}J=\frac{x+1/2}{x^2+x+1}+I$$

であるから、(1) の結果を用いて

$$J=\frac{2}{3}\left(\frac{x+1/2}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right).\blacksquare$$

4　α, β を正定数とするとき、$I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx,\ J_\beta = \int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$ を求めよ。

解答　I_α について。被積分関数は積分区間のいたるところで連続だが、積分区間は無限区間であるから I_α は広義積分であり、定義から

$$I_\alpha = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

$\alpha = 1$ のときは、

$$I_1 = \lim_{R\to\infty}\left[\log|x|\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\log R = \infty.$$

$\alpha \neq 1$ のときは、

$$I_\alpha = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\frac{R^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} = \begin{cases} \dfrac{0-1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha > 1) \\ \dfrac{\infty-1}{1-\alpha} = \infty & (\alpha < 1) \end{cases}$$

まとめると

$$I_\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha > 1) \\ \infty & (\alpha \leq 1) \end{cases}$$

J_β について。被積分関数 $\dfrac{1}{x^\beta}$ は積分区間の左端 $x=0$ で定義されていないので、J_β は広義積分で、定義から

$$J_\beta = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx.$$

$\beta = 1$ のときは、

$$J_1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\log|x|\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\log\varepsilon) = \infty.$$

$\beta \neq 1$ のときは、

$$J_\beta = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{x^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1-\varepsilon^{-\beta+1}}{-\beta+1} = \begin{cases} \dfrac{1-\infty}{1-\beta} = \infty & (\beta > 1) \\ \dfrac{1-0}{1-\beta} = \dfrac{1}{1-\beta} & (\beta < 1) \end{cases}$$

まとめると

$$J_\beta = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta} & (\beta < 1) \\ \infty & (\beta \geq 1) \end{cases}$$

が得られる。 ■