1年生向け確率論ノート

桂田 祐史

1998年7月

(2008/6/28) 久しぶりに確率論を勉強し直すことにしたけれど、このノートはこのままの形で残すことにする。改訂版は桂田研資料室におく。

(2021/8/26) 付録に余談を書いた。確率の話を書くとしたら、ここになるのか。

目 次

1　確率事象

試行 trial

事象 event

確率 probability

様々な応用

統計学、
Brown 運動 (Wiener 過程, Wiener process)
統計物理、
量子力学
シミュレーション、モンテカルロ法

歴史覚え書き

- 1654 年頃 B. Pascal[1] と P. de Fermat[2]との往復書簡でトランプ賭博[3]についての確率の議論がなされる。
- P. S. Laplace[4] によって古典的確率論が集大成される。
  1812 “Théorie analytique des probabilités”
- 1930 頃 A. N. Kolmogorov（コルモゴロフ） 測度論的確率論。

[1]Blaise Pascal (1623–1662, フランスに生まれる). 円錐曲線の Pascal の定理, 計算器の発明 (1642), 流体静力学の基礎 (「自然は真空を嫌う」をしりぞける、Pascal の原理), Fermat との手紙で確率について議論 (Pascal の三角形, 数学的帰納法)、僧院に入って余生を過ごす。遺著 Pensées は有名 (「人間は考える葦である」)。

[2]Pierre de Fermat (1601–1665, フランスに生まれる). 役所の職員。余暇に数学を研究、成果は書簡中に発表する。数論の研究 (Fermat 予想), 解析幾何学をはじめて微積分学の先駆, 光学における Fermat の原理など。

[3]サイコロ賭博であるという説もある。

[4]Pierre Simon Laplace (1749–1827, フランスに生まれる). 解析学を天体力学 (太陽系の起源に関する Kant-Laplace の星雲説), ポテンシャル論, 確率論に応用して華々しい結果を得た。

2　事象と集合

この講義では、確率を数学的に扱うために集合の言葉で記述する。

サイコロを一回ふって出る目を調べるという試行では、(1 の目が出ることを単に 1 と表わすようにすると[5]) 結果は 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 通りある。このとき、1, 2, 3, $\cdots$, 6 を**標本点** (sample point) と呼び、標本点全体の集合 $\{1, 2, \cdots, 6\}$ を**標本空間** (sample space) と呼ぶ。

ある試行の標本空間が有限集合であるか、無限集合であるかに従って、その試行を**有限試行**または**無限試行**と呼ぶ。

注意 2.1 (現代的な確率論は無限試行を扱うためにある) Kolmogorov に始まる「現代的な」確率論の意義は、無限試行をうまく扱えるようにしたことにある。逆に言えば、有限試行だけ扱うためには、Laplace レベルの確率論で十分ということになる。 ■

この講義では、第 9 節までは有限試行だけを考える。

U をある試行 T の標本空間とするとき、U の部分集合 A に対して、T の結果として A に属する標本点が出現することを簡単に「A がおこる」という。そこで、U の部分集合 A を**事象**(じしょう) (event) A と呼ぶ。

ただ一つの標本点だけからなる事象を**根元事象** (elementary event) と呼ぶ。

例えば、上のサイコロをふる例で、根元事象は

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

の 6 個である。

標本空間全体そのものの表わす事象を、**全事象** (total event) と呼ぶ。

空集合の表わす事象を**空事象** (empty event) と呼び、$\emptyset$ または ϕ で表わす。

集合算の復習

集合について集合算がある。復習しておこう。ある集合 U の部分集合 A, B について、

合併集合 (和集合, union) $A \cup B = \{x; x \in A \text{ または } x \in B\}$.

共通部分 (積集合, product, intersection) $A \cap B = \{x; x \in A \text{ かつ } x \in B\}$.

差集合 $A \setminus B = \{x; x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$.

補集合 (complement) $\overline{A} = U \setminus A = \{x; x \in U \text{ かつ } x \notin A\}$.
(この補集合の記号はあまり一般的でない。本によっては A^c で表わす。)

一つの有限集合の部分集合全体の集合は、集合算 $\cup, \cap,$ に関して、Boole 代数をなす。特に以下の二つの法則が成り立つことに注意しよう。

1. 分配法則

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

2. De Morgan(ド モルガン) の法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

ここに現われた集合は、標本空間の部分集合なので、やはり事象である。それに名前をつけておく。

A, B を事象とする。

[5] テキストでは、1 の目が出ることは $\boxed{1}$ と表わしているが、面倒なので箱抜きで表わす

(1) 和集合 $A \cup B$ を A, B の**和事象** (sum event) と呼ぶ。

(2) 積集合 $A \cap B$ を A, B の**積事象** (product event) と呼ぶ。

(3) 差集合 $A \setminus B$ を A, B の**差事象**と呼ぶ。

(4) A の補集合 $\overline{A}$ を A の**余事象**と呼ぶ。

事象 A と B が互いに**排反する** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $A \cap B = \phi$. (A と B が同時には起こらない、ということ。事象 A は事象 B の**排反事象** (exclusive events) であるという。)

授業覚え書き　問題 2 と問題 15 を解け、と言っておいた。問題 15 の 2) などは、

$$A \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \phi \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B}$$

のような式変形が役立つ。

3　加法定理

確率の定義？

— ある意味では、個々の問題の確率の定義は確率論の外にある —

確率とは、事象の確からしさを表わす尺度で、0 以上 1 以下の値を取り、必ず起こる事象の確率は 1, 起こらない事象の確率は 0, などの性質を持っている。

Laplace による素朴な確率の定義

Laplace は、標本空間が $U = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ で、根元事象

$$\{a_1\}, \{a_2\}, \cdots, \{a_n\}$$

が同様に確からしい[a]とき、U の事象 A の**確率** $P(A)$ を、

$$P(A) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\sharp A}{n} \quad (\text{ただし } \sharp A \text{ で事象 } A \text{ に含まれる要素の個数を表わす})$$

と定義した。

[a]「同様に確からしい」というのは、最初は厳密な定義のない呪文みたいなものだが、いったん確率が定義されると、「同様に確からしい」根元事象の確率はみな等しくなる。つまり「同様に確からしい」=「確率が等しい」と考えて良い。

例 3.1 (正しいサイコロ) 高等学校までの数学で学んだように、「正しいサイコロ」をふるとき、事象 A のおこる確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{\sharp A}{6}$$

である。「正しいサイコロ」とは、言い換えると、根元事象

$$\{i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

が同様に確からしい、すなわち

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$$

であるということである。■

- 現実世界の「試行」について、標本空間の設定は色々考えられるが、上のようにして確率を定めるためには、根元事象がいずれも同様に確からしいようにする必要がある。例えば、二枚のコインを投げて、表裏を調べる場合に、標本空間として

$$U = \{2\,枚とも表, 表と裏が\,1\,枚ずつ, 2\,枚とも裏\,\}$$

というのを考えると、根元事象は同様に確からしくはならない。二つのコインに区別をつけて — 例えばコイン A とコイン B —、試行の結果を

$$(コイン\,A\,の裏表, コイン\,B\,の裏表)$$

というように結果を表わす、すなわち

$$U = \{(表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏)\}$$

を標本空間とすると、根元事象は同様に確からしくなる。

- 上にあげた「素朴な確率の定義」では、例えば

$$P(\{1\}) = 2/7, \quad P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/7$$

となっているような「正しくない」いびつなサイコロを扱うことが難しくなってしまう。そこで、現代の確率論では、個々の問題における確率法則 P の決め方については言及せず、ただ P の満たすべき法則だけを指定し、そこから導かれることを論じる。

確率の性質

上の例に出てきた P は、U の任意の部分集合 A に対して定義される集合関数であり、次の性質を満たす。

(1) 任意の事象 A に対して $P(A) \geq 0$.

(2) 任意の排反事象 A, B に対して $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (このことを**確率の加法性**あるいは**加法定理**[6]と呼ぶ。)

(3) 全事象の確率は 1 である: $P(U) = 1$.

一般に標本空間 U のすべての事象 A に対して、実数 $P(A)$ が定まっていて、P が上の 3 つの性質を持つとき、P を U の上の**確率測度**と呼び、U と P を組にしたものを確率空間 (U, P) という。また、事象 A に対して $P(A)$ を事象 A の**確率**と呼ぶ。

注意 3.2 (無限試行の場合) 集合 U 上の σ 加法族 $\mathcal{B}$ の上で定義された集合関数 $P\colon \mathcal{B} \to \mathbf{R}$ が

(1) 任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して $P(A) \geq 0$.

(2) A_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が互いに交わらないならば $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

(3) $P(U) = 1$.

を満すとき、P を $(U, \mathcal{B})$ 上の**確率測度** (probability measure) と呼ぶ。また $(U, \mathcal{B}, P)$ を**確率空間** (probability space) という。

[6] この講義の話の筋としては、定理というよりは、公理である。

命題 3.3 A, B, C どの二つの事象も互いに排反であるとき、

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

(もっと一般に、A_1, A_2, $\cdots$, A_n のどの二つの事象も互いに排反であるとき、$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.)

証明　$B' = B \cup C$ とおくと、$A \cap B' = \phi$ である。実際

$$A \cap B' = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \phi \cap \phi = \phi.$$

ゆえに

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B') = P(A) + P(B').$$

一方、$B \cap C = \phi$ より

$$P(B') = P(B \cup C) = P(B) + P(C).$$

ゆえに

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C). \quad \blacksquare$$

系 3.4 (根元事象が同様に確からしい場合の確率) 標本空間 $U = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ において、根元事象の確率が等しければ、つまり

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \cdots = P(\{a_n\})$$

が成り立つならば、$A \subset U$ に対して

$$P(A) = \frac{\sharp A}{n}.$$

以下、便利な公式をいくつかあげる。

定理 3.5

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

証明

$$A' = A \cap \overline{B}, \quad B' = B \cap \overline{A}, \quad C = A \cap B$$

とおくと、以下のことが分かる (ベン図を描いてみるか、あるいは計算でも証明できる)。

- A', B', C のどの二つの事象も互いに排反である: $A' \cap B' = B' \cap C = C \cap A' = \phi$.
- $A = A' \cup C$. ゆえに $P(A) = P(A') + P(C)$.
- $B = B' \cup C$. ゆえに $P(B) = P(B') + P(C)$.
- $A \cup B = A' \cup B' \cup C$. ゆえに $P(A \cup B) = P(A') + P(B') + P(C)$.

これらの等式から

$$\begin{aligned}P(A\cup B) &= (P(A)-P(C))+(P(B)-P(C))+P(C)=P(A)+P(B)-P(C)\\ &= P(A)+P(B)-P(A\cap B).\quad\blacksquare\end{aligned}$$

系 3.6

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(C\cap A)-P(A\cap B)+P(A\cap B\cap C).$$

証明　(テキストの問題では、ベン図を描いて示せ、となっているが、計算で証明できる[7]。)

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C) &= P(A\cup(B\cup C))\\ &= P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C))\\ &= P(A)+[P(B)+P(C)-P(B\cap C)]-P((A\cap B)\cup(A\cap C))\\ &= P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-[P(A\cap B)+P(A\cap C))\\ &\qquad -P((A\cap B)\cap(A\cap C))]\\ &= P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(C\cap A)-P(A\cap B)+P(A\cap B\cap C).\quad\blacksquare\end{aligned}$$

定理 3.7 (余事象の定理)

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

証明　全事象を U とすると、

$$A\cup\overline{A}=U,\quad A\cap\overline{A}=\phi$$

であるから、

$$1=P(U)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

ゆえに

$$P(\overline{A})=1-P(A).\quad\blacksquare$$

4　条件付き確率と乗法定理

A, B を事象とする。A が起こったことが分かったが、B が起こったかどうか分からないという状況で、B の起こりやすさを示す度合 — 事象 A のもとでの事象 B の条件つき確率 $P_A(B)$ — を導入する。

例題 4.1 正しいサイコロを振ったところ、出た目が奇数であることが分かった。このとき出た目が 3 以下である条件つき確率は？

$A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3\}$ とするとき、$P_A(B)$ を求めよ、ということである。

全事象が $\{1,3,5\}$ であると素朴に考えると、3 以下の目が出るという事象は $\{1,3\}$ となるので、確率は

$$\frac{\sharp\{1,3\}}{\sharp\{1,3,5\}}=\frac{2}{3}.\blacksquare$$

[7]ベン図は便利だが、それで証明になるかというと、微妙である。「一般の」場合の図を描かなければいけないが、図が一般であるかどうか、どうやれば保証できるのだろう？特に複雑な場合ではベン図を描くのも難しい。ただし発見的な考察には便利である。

上の例題では、

$$P_A(B) = \frac{\sharp A \cap B}{\sharp A}$$

と計算していることになるわけだが、このように事象に含まれる標本点の個数を数えれば良かったのは、「正しいサイコロ」を振る試行だったからである。一般の場合に通用するためには少し修正する必要がある。実際には

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

を条件つき確率 $P_A(B)$ の定義とすればよいであろう (これは証明できることでなく、定義することである)。ただし、これが意味を持つには $P(A) \neq 0$ でなければならない。

注意 4.1 テキストで、しばしば $A \neq \phi$ と書いてあるが、これは $P(A) \neq 0$ の間違いであろう。$A \neq \phi$ であっても $P(A) = 0$ とは限らないから。

注意 4.2 $P(A) = 0$ の場合に $P_A(B)$ を定義するには、例えば次のようにする。標本空間 U の任意の点 x を一つ固定し、

$$P_B(A) = \begin{cases} 1 & (x \in B) \\ 0 & (x \notin B) \end{cases}$$

と定義する。

命題 4.3 P を標本空間 U 上の確率法則とする。条件つき確率 $P_A(B)$ は、A を固定して B の関数と見たとき、U 上の確率法則となる。すなわち

(1) 任意の事象 B に対して $P_A(B) \geq 0$.

(2) $B \cap C = \phi$ を満たす任意の事象 B, C に対して $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.

(3) $P_A(U) = 1$.

この命題から例えば

$$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B),$$

$$P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$$

などの公式が自動的に得られる。

条件つき確率 $P_A(B)$ は $P(B)$ と等しくなることも、等しくならないこともある (例題 2, 例 3)。

定義 4.4 確率空間 (U, P) における A, B について、

$$P_A(B) = P(B)$$

が成り立つとき、A と B は互いに**独立**であるという。また

$$P_A(B) \neq P(B)$$

が成り立つとき、A と B は互いに**従属**であるという。

定理 4.5 A と B が独立 $\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

証明　一般に

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

であるから、

$$\begin{aligned} A \text{ と } B \text{ が独立} &\iff P_A(B) = P(B) \\ &\iff P(A \cap B) = P(A)P(B). \ \blacksquare \end{aligned}$$

系 4.6　(1) A と B が独立 $\iff$ B と A が独立

(2)　A と B が独立 $\iff$ $\overline{A}$ と B が独立
$\iff$ A と $\overline{B}$ が独立
$\iff$ $\overline{A}$ と $\overline{B}$ が独立.

Bayes の定理について一言。色々なバージョンがあるが、ここで述べるとすると、次の形になるだろう。

$$P(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad P_A(B) = \frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}.$$

$(P_A(B)P(A), P_B(A)P(B)$ はともに $P(A \cap B)$ に等しいので、$P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$. $P(A)$ $(\neq 0)$ で両辺を割ればよい。) この定理を使うことに対する批判が根強い、という話と、この考え方を利用して色々なことができる、という話、両方を聴いたことがある。

5　独立試行

すでにある試行から新しい試行を作る。

5.1　混合

ある確率変数の値のみに着目すると新しい試行が出来る。

例 5.1 T をサイコロを 1 回振る試行とする。標本空間 U と確率法則 P は

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, P(\{i\}) = \frac{1}{6} \quad (i \in U)$$

となる。いま

$$X \colon U \to \{\text{偶}, \text{奇}\}$$

なる写像を

$$X(1) = X(3) = X(5) = \text{奇}, \quad X(2) = X(4) = X(6) = \text{偶}$$

で定める。このとき

$$U^X = \{\text{偶}, \text{奇}\},$$

$$\begin{aligned} P^X(\{\text{偶}\}) &= P(\{x; X(x) = \text{偶}\} = 1/2, \\ P^X(\{\text{奇}\}) &= P(\{x; X(x) = \text{奇}\} = 1/2, \end{aligned}$$

として新しい確率空間 (U^X, P^X) ができる。

5.2　直結合

例 5.2 同じコインを続けて 2 回投げる。標本空間 U と確率法則 P は

$$U = \{(\text{表}, \text{表}), (\text{表}, \text{裏}), (\text{裏}, \text{表}), (\text{裏}, \text{裏}), \} \quad P(\{(x, y)\}) = 1/4 \quad (x, y = \text{表}, \text{裏})$$

6　確率変数と確率分布

「量 X がなんらかの試行の結果はじめて定まるものであるとき、X を**確率変数** (random variable) という」

確率変数とは、確率空間から、ある空間への写像である。この講義の例では、値の空間は実数全体の集合 $\mathbf{R}$ であることが多い。このような確率変数を実数値確率変数と呼ぶ:

$$X \colon U \to \mathbf{R}.$$

7　期待値・分散・標準偏差

離散的確率変数 X が取り得る値が $x_1, \cdots, x_s$ で、X の確率分布が

$$P(X = x_k) = p_k \quad (k = 1, 2, \cdots, s)$$

で与えられているとき

$$E(X) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^{s} x_k p_k$$

で定まる $E(X)$ を確率変数 X の**期待値**(きたいち) (expectation) あるいは**平均** (mean) と呼ぶ。また、

$$V(X) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^{s} (x_k - m)^2 p_k, \quad m = E(X)$$

で定まる $V(X)$ を確率変数 X の**分散**(ぶんさん) (variance) と呼ぶ。

分散はつねに 0 以上の値を取る。

定理 7.1

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

ただし

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{s} x_k^2 p_k.$$

注意 7.2 これはとても有名であるが、コンピューターや電卓等で計算する (丸め誤差が発生する) 場合には使ってはいけない公式である。この式の通りに計算すると、ひどい場合は分散が負になってしまったりする。

定義 7.3 (確率変数の標準偏差) 確率変数 X の分散の非負平方根を X の**標準偏差** (standard deviation) と呼び、$\sigma(X)$ で表わす。

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{s} (x_k - m)^2 p_k}.$$

注意 7.4 いわゆる偏差値というのは標準偏差を用いて以下のように定義される。値 x の偏差値とは、

$$50 + \frac{10}{\sigma}(x - m)$$

で定められる。平均の偏差値が 50 で、標準偏差だけ大きくなると偏差値 60 になる。 — というのだが、平均を 50 にするなんて、筋の悪い決め方だな、と思う。偏差値は負になることも, 100 以上になることもある。 ■

定理 7.5 (チェビシェフ (Cebysev) の不等式) 確率変数 X の期待値を m, 標準偏差を σ とすれば、任意の正の定数 λ に対して

$$P(|X - m| \geq \lambda\sigma) \leq 1/\lambda^2.$$

平均から離れる確率はあまり大きくなれない、ということを表わしている式である。しかし、この式は理論上活躍することは多いが、実際の問題に直接役立つことはない。

8　確率変数の演算

実数値確率変数の和、差、積などが定義できる。

X, Y を同じ標本空間 U で定義された実数値確率変数とするとき、その**和** $X + Y \colon U \to \mathbf{R}$ を

$$(X + Y)(x) = X(x) + Y(x) \quad (x \in U)$$

で定義する。同様にその**積** $XY \colon U \to \mathbf{R}$ を

$$(XY)(x) = X(x)Y(x) \quad (x \in U)$$

で定義する。

定理 8.1 a, b を定数とするとき

(1) $E(aX + b) = aE(X) + b.$

(2) $E(X + Y) = E(X) + E(Y).$

(3) $V(aX + b) = a^2V(X).$

定理 8.2 X と Y が独立ならば

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

9　二項分布

p が $0 \leq p \leq 1$ である定数で、n は自然数とする。確率変数 X の取り得る値が $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$ で、その確率分布が

$$P(X = r) = {}_nC_r p^r (1 - p)^{n-r} \quad (r = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

であるとき、その確率分布を**二項分布**と呼び、記号 $B(n, p)$ で表わす。

定理 9.1 確率変数 X が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき、

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p).$$

定理 9.2 () X が $B(n,p)$ に従うならば $\forall\alpha > 0$ に対して

$$P\left(p - \alpha \leqq \frac{X}{n} \leqq p + \alpha\right) \geqq 1 - \frac{p(1-p)}{n\alpha^2}.$$

注意 9.3 p, α を固定して $n \to \infty$ とすると、右辺は 1 に収束する。つまり n が大きいとき、相対起生度数 $\dfrac{X}{n}$ は確率である p に近いという**経験的大数の法則**を表している。

証明　チェビシェフの不等式

$$P(|X - m| \geqq \lambda\sigma) \leqq \frac{1}{\lambda^2} \quad (\lambda > 0)$$

において余事象を考えると

$$P(|X - m| < \lambda\sigma) \geqq 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

ゆえに

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{m}{n}\right| < \frac{\lambda\sigma}{n}\right) \geqq 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

ここで $m = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ より

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \lambda\frac{p(1-p)}{n}\right) \geqq 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

$\lambda = \alpha\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}$ とすると

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \alpha\right) \geqq 1 - \frac{p(1-p)}{n\alpha^2}. \quad \blacksquare$$

10　連続的確率分布

10.1　イントロ

10.2　定義

連続的確率変数 X に対して

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad (a,\, b \text{ は任意の実数})$$

となる関数 f を X の**確率密度関数**と呼ぶ。

一般に

$$f(x) \geqq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

が成り立つ。

X の**平均** $E(X)$, **分散** $V(X)$ は次式で定義される:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \tag{1}$$

$$V(X) = E((X-m)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx, \quad m = E(x). \tag{2}$$

離散的確率変数で学んだ定理のほとんどは連続的確率変数についても成立する。例えば

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

10.3 例題

例 10.1 $[\alpha, \beta]$ 上の一様分布の確率密度関数を求め、その分布に従う確率変数 X の平均、分散を計算せよ。

解答 確率密度関数を $f(x)$ とすると、$\alpha \leqq x \leqq \beta$ で定数、それ以外では 0 で、積分は 1 になることから、

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & (\alpha \leqq x \leqq \beta) \\ 0 & (\text{それ以外、つまり } x < \alpha \text{ または } x > \beta) \end{cases}$$

となることが分かる。

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} x\frac{1}{\beta-\alpha}dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} xdx = \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} = \frac{\beta+\alpha}{2}.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} x^2dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{\beta^3-\alpha^3}{3} = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}.$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3} - \left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2 \\ &= \frac{4(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) - 3(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)}{12} = \frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{12} \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 10.2 確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (\text{それ以外、つまり } x < 0 \text{ または } x > 1) \end{cases}$$

であるとする。このとき

(1) a の値を求めよ。

(2) $E(X), V(X)$ の値を求めよ。

解答

(1)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 ax(1-x)\,dx = \frac{a}{6}.$$

ゆえに $a = 6$.

(2)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 6x^2(1-x)\,dx = 6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 6\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)\,dx = \int_0^1 6x^3(1-x)\,dx = 6\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) = 6\cdot\frac{1}{20} = \frac{3}{10}.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}. \quad \blacksquare$$

11 正規分布

11.1 定義

確率密度関数が

(3)
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (m \text{ は実定数}, \sigma \text{ は正定数})$$

で与えられる分布を**正規分布** (normal[8]distribution, Gauss[9]分布) と呼び、$N(m, \sigma^2)$ で表す。後で述べるように、m は平均、σ^2 は分散になっているので、「平均 m, 分散 σ^2 の正規分布」と呼ぶ。

確率密度関数と言うくらいだから、もちろん

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad (\text{全確率は } 1)$$

であるが、その証明には公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad (\text{確率積分とも呼ばれる公式})$$

が必要になり簡単ではない (e^{-x^2} の原始関数は初等関数ではないことに注意)。

(4)
$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = m,$$

(5)
$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx = \sigma^2$$

[8]数学の分野で normal (数学分野では「正規」と訳される) という語を与えられるものは、かなり重要で根本的なものに限られる。似たような言葉に regular (数学分野では「正則」と訳される) というのがあるが、それよりも一段上の存在である。

[9]K. F. Gauss は、近世までの三大数学者に数えられる大数学者である。10 代のうちに小惑星セレスの軌道計算などで名を上げたように数学以外の業績も大きいが (例えば電磁気学の Gauss の法則、地磁気の研究など)、正 17 角形の定木とコンパスによる作図法の発見を果たした後は、数学を専門とした。「任意の n 次代数方程式は複素数の範囲で n 個の根を持つ」と言う代数学の基本定理の証明、平方剰余の相互法則の発見、複素関数論の先駆的研究 (発表せず)、非ユークリッド幾何の発見 (発表せず)、微分幾何学の先駆的研究 (曲率の導入、「球面の正確な地図を平面上に作ることは不可能である」ことの証明など)、数値計算法の先駆的研究 (Gauss の消去法、Gauss-Jordan 法、Gauss-Seidel 法などの反復法、Gauss の数値積分則) など、山のような一級の業績がある。

であるから、m は平均 (期待値), σ は標準偏差 (言い替えると σ^2 は分散) になっている。

特に平均 0, 分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ を**標準正規分布**と呼ぶ。

確率変数 X が $N(m,\sigma^2)$ に従うとき、

$$Z = \frac{X-m}{\sigma}$$

で定義される確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。ゆえに、特に

$$P(a \leqq X \leqq b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leqq Z \leqq \frac{b-m}{\sigma}\right)$$

であるから、一般の正規分布の確率の計算は標準正規分布の確率の計算に帰着できる。

Z が正規分布に従うこと

X が $N(m,\sigma^2)$ に従うことから、任意の a, b ($a<b$) に対して

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

である。右辺の積分を簡単にするため、

$$z = \frac{x-m}{\sigma}$$

と変数変換 (置換積分) すると、

$$dz = \frac{1}{\sigma}dx \quad \text{より } dx = \sigma dz.$$

また

$$a \leqq x \leqq b \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a-m}{\sigma} \leqq z \leqq \frac{b-m}{\sigma}$$

であるから

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sigma dz = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

右辺の被積分関数は標準正規分布の確率密度関数である。これは

$$Z = \frac{X-m}{\sigma}$$

で定義される確率変数 Z が標準正規分布に従うことを意味している。■

問 正規分布の確率密度関数のグラフの変曲点はどこか。

答 $x = m \pm \sigma$ で $f''(x) = 0$ となる。— このことと $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を覚えておくと、$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ は $N\left(0, 1/\sqrt{2}\right)$ の確率密度関数であることが分かる。これで正規分布の確率密度関数が思い出せる。■

確率密度関数のグラフを眺める 標準正規分布の確率密度関数のグラフを見てみよう。例えば、gnuplot で

```
f(x)=exp(-x*x/2)/sqrt(2*pi)
plot [-3:3] f(x)
```

とすれば良い。余談になるかもしれないが、$\sqrt{2\pi} = 2.506628\cdots$ なので、$f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.3989\cdots \fallingdotseq$

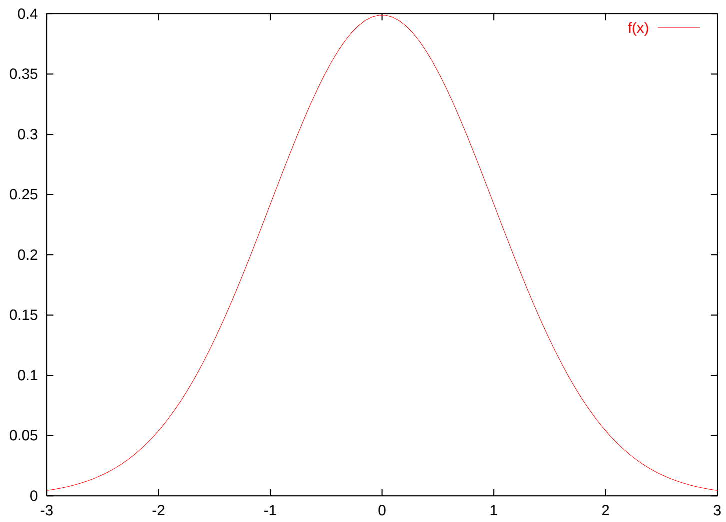

図 1: 標準正規分布の確率密度関数のグラフ — $x = \pm 1$ が変曲点

0.4 である。なお、$f(1) = 0.241970724519143$, $f(2) = 0.0539909665131881$, $f(3) = 0.00443184841193801$. 分布関数の値の方が大事 (覚える「実際的」意味がある) かもしれないが…

11.2 標準正規分布の確率の計算法

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z を考える。その確率密度関数は $m = 0$, $\sigma^2 = 1$ として

$$f_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

である。

残念ながら f_s の原始関数は求められないので、

$$\int_a^b f_s(x)dx$$

の計算に公式 $\displaystyle\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ は使えない。

そこで、従来は数表を用意するのが普通であった。例えば教科書の p. 55 にある数表は

$$\phi(u) = P(0 \leqq Z \leqq u) = \int_0^u f_s(x)\,dx$$

で定義される関数の数値を表にしたものである。これから

(6) $$P(a \leqq Z \leqq b) = \int_a^b f_s(x)\,dx = \int_0^b f_s(x)\,dx - \int_0^a f_s(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a),$$

また被積分関数が偶関数であるから ϕ は奇関数である。

(7) $$\phi(-x) = -\phi(x).$$

数表があるとき、公式 (6), (7) を用いれば、確率は簡単に計算できる。例えば

$$P(0.1 \leqq Z \leqq 0.3) = \phi(0.3) - \phi(0.1) \fallingdotseq 0.1179 - 0.0398 = 0.0781,$$

$$P(-0.2 \leqq Z \leqq 0.4) = \phi(0.4) - \phi(-0.2) = \phi(0.4) + \phi(0.2) \fallingdotseq 0.1554 + 0.0793 = 0.2347.$$

最近は電卓でも計算できるようになっているし、プログラミング言語のライブラリィ関数にも用意されている。

余談: `erf()`

プログラミング言語 C の数学関数ライブラリィには、`erf()`, `erfc()` という関数が用意されていることが多い (Mathematica にもあるみたい)。

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \mathrm{erfc}(x) := 1 - \mathrm{erf}(x).$$

容易に

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \mathrm{erf}\left(x/\sqrt{2}\right), \quad \mathrm{erf}(x) = 2\phi\left(\sqrt{2}x\right)$$

であることが分かる。それゆえ、$\phi(u)$ を計算する関数が欲しければ次のようなプログラムを書けばよい。

```
#include <math.h>

double phi(double u)
{
  return 0.5 * erf(u / sqrt(2.0));
}
```

(老婆心: `erfc()` を用意するのは桁落ち対策でしょうね。)

例 11.1

$$\phi(u) = P(0 \leqq Z \leqq u) = P(m \leqq X \leqq m + u\sigma)$$

$N(170, 25)$ に従う確率変数 X について

$$N(170 \leqq X \leqq 175) = \phi(1) \fallingdotseq 0.34. \quad \blacksquare$$

確率密度関数表の自前での印刷

確率密度関数表を印刷するプログラム

```
#include <stdio.h>

#include <math.h>

/*
 * 標準正規分布 N(0,1) (平均 0, 分散 1 の正規分布) の
 * 確率密度関数を 0 から u まで積分した値 φ(u) の表が確率・統計の
 * 本に載っているが、これを計算する関数 phi() とする。
 *
 *              2        x        2
 *  erf(x)=  -------- ∫   exp(-t )dt
 *          sqrt(π)    0
 *
 * は C のライブラリィに入っていることが多い。
 * これは N(0,1/2) に従う確率変数 X の P(0≦ X ≦x) の値
 *
 *            1        x       2
 *  φ(x)=--------- ∫ exp(-t /2)dt
 *        sqrt(2π)  0
 *
 * とは φ(x)=erf(x/√2)/2, erf(x)=2φ(sqrt(2) x)
 */

double phi(double u)
{
    return erf(u / sqrt(2.0)) * 0.5;
}

main()
{
    int i, j;
    double x, dx, dy, u, limitx;
    dx = 0.1;
    dy = 0.01;
    printf("u");
    for (j = 0; j < 10; j++)
        printf("& .0%d", j);
    printf("\n");
    for (i = 0; i <= 30; i++) {
        x = i * dx;
        printf("%4.2f ", x);
        for (j = 0; j < 10; j++) {
            u = x + j * dy;
            if (x > 2.5)
                printf("& %7.5f ", phi(u));
            else
                printf("& %6.4f ", phi(u));
        }
        printf("\n");
    }
}
```

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.00	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.10	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.20	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.30	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.40	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.50	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.60	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.70	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.80	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.90	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.00	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.10	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.20	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.30	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.40	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.50	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.60	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.70	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.80	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.90	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.00	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.10	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.20	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.30	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.40	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.50	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.60	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.70	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.80	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.90	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.00	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

問　$N(m,\sigma^2)$ に従う確率変数 X に対して、$P(|X-m|\le\sigma)$, $P(|X-m|\le 2\sigma)$, $P(|X-m|\le 3\sigma)$ はいくらか。

答　それぞれ $2\phi(1)$, $2\phi(2)$, $2\phi(3)$ であるから、数表から 0.6826, 0.9544, 0.9973. (最後の値を 99.74% と言う人がいるけれど、より精密には $\phi(3)=0.49865010196837\cdots$ だから 0.9973 が正しいと思うぞ。Mathematica にも `Erf[ ]` はあるので、`N[Erf[3/Sqrt[2]],100]` とすれば 100 桁表示できる。

0.9973002039367398109466963704648100452443412636832387012715560292883885584708557994639228374279915659

となる。)

ϕ のグラフを眺める　gnuplot にも `erf()` があるので、グラフを描くのは簡単である。

```
g(x)=erf(x/sqrt(2))/2
plot [0:3] [0:0.55] g(x)
```

個人的には分布関数

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du$$

の方が性に合っているので、こちらのグラフもあげておく。

12　二項分布の正規分布近似

正規分布の一つの応用として「二項分布の正規分布近似」がある。

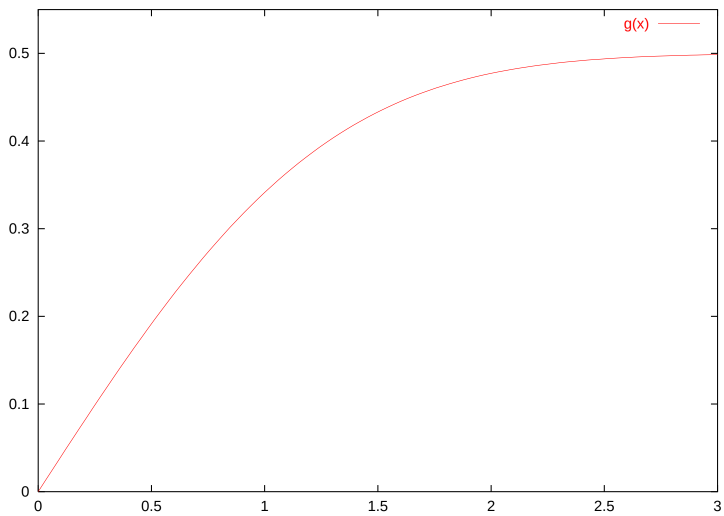

図 2: $\phi(u) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^u e^{-x^2/2} dx$ のグラフ

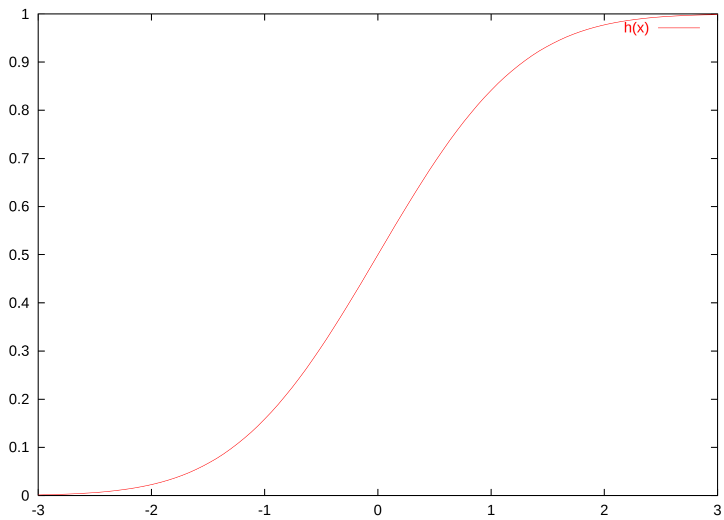

図 3: 標準正規分布の分布関数

確率変数 X が二項分布 $B(n,p)$ に従うならば、$\{0,1,2,\cdots,n\}$ に含まれる任意の k について

$$P(X=k) = {}_nC_k p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}.$$

この右辺は意味は明解だが、n が大きいとき、計算は結構大変である。

Y を正規分布 $N(m,\sigma^2)$ (ただし $m=np$, $\sigma^2=np(1-p)$) に従う確率変数とするとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) k を $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とするとき、

$$P(X=k) \fallingdotseq P(k-1/2 \leqq Y \leqq k+1/2).$$

(2) a, b を $0 \leqq a \leqq n$, $0 \leqq b \leqq n$ なる整数とするとき、

$$\begin{aligned}
P(a \leqq X \leqq b) &= \sum_{k=a}^{b} P(X=k) \\
&\fallingdotseq \sum_{k=a}^{b} P(k-1/2 \leqq Y \leqq k+1/2) = P(a-1/2 \leqq Y \leqq b+1/2).
\end{aligned}$$

これらの式の右辺は、前節で述べたように標準正規分布表から近似値が計算できる。実際 $Z = \dfrac{Y-m}{\sigma}$ とおくと、

$$\alpha \leqq Y \leqq \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\alpha-m}{\sigma} \leqq Z \leqq \frac{\beta-m}{\sigma}.$$

であり、Z は $N(0,1)$ に従うので (証明は後述)、

$$\begin{aligned}
P(X=k) &\fallingdotseq P(k-1/2 \leqq Y \leqq k+1/2) = P\left(\frac{(k-1/2)-m}{\sigma} \leqq Z \leqq \frac{(k+1/2)-m}{\sigma}\right) \\
&= \phi\left(\frac{(k+1/2)-m}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{(k-1/2)-m}{\sigma}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(a \leqq X \leqq b) &\fallingdotseq P(a-1/2 \leqq Y \leqq b+1/2) = P\left(\frac{(a-1/2)-m}{\sigma} \leqq Z \leqq \frac{(b+1/2)-m}{\sigma}\right) \\
&= \phi\left(\frac{(b+1/2)-m}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{(a-1/2)-m}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

問　コインを 100 回投げて 49 〜 51 回、表が出る確率を求めよ。

解答　表の出る回数を X とすると、X は $B(100,1/2)$ に従う。

$$\begin{cases} m = np = 50, \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5. \end{cases}$$

Y は $N(m,\sigma^2)$ に従う確率変数とすると

$$P(49 \leqq X \leqq 51) \fallingdotseq P(49-0.5 \leqq Y \leqq 51+0.5) = P\left(\frac{49-0.5-50}{5} \leqq \frac{Y-50}{5} \leqq \frac{51+0.5-50}{5}\right).$$

$Z := \frac{Y-50}{5}$ は $N(0,1)$ に従うので、

$$P(49 \leqq X \leqq 51) \fallingdotseq \phi\left(\frac{1.5}{5}\right) - \phi\left(\frac{-1.5}{5}\right) = \phi(0.3) - \phi(-0.3) = 2\phi(0.3) \fallingdotseq 0.24. \quad \blacksquare$$

13 余談: 熱方程式、拡散方程式の基本解

x 軸に温度 0 度の針金をおき、時刻 $t=0$ で原点に単位熱量を与えて、以下針金を熱が伝わっていった場合の、時刻 t における温度分布を表わす関数は (適当な仮定のもとに)

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

となり、熱方程式の基本解と呼ばれる。これは平均 0, 分散 $2t$ の正規分布の確率密度関数に他ならない。

A Boole 代数

G. Boole が論理計算の場として導入したものであるが、論理以外にも可測集合族などの集合束としてあちこちに現れる。

集合 L が与えられ、その任意の 2 要素 x, y に対して $x \cap y$, $x \cup y$ と書かれる L の元が対応づけられていて、次の法則が成り立つものとする。

1) 交換法則 $x \cup y = y \cup x$, $x \cap y = y \cap x$.

2) 結合法則 $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$, $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$.

3) 吸収法則 $x \cup (y \cap x) = (x \cup y) \cap x = x$.

4) 分配法則 $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z), \quad x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

この 1), 2), 3) から巾等法則

$$x \cup x = x, \quad x \cap x = x$$

が導かれる。また

$$x \leq y \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} x \cup y = y$$

として関係 $\leq$ を定めると、これは L 上の順序関係になる。ここでさらに

5) 相補法則 最小限 0 と最大限 I が存在し、任意の元 x に対してある元 x' を取れば

$$x \cup x' = I, \quad x \cap x' = 0.$$

が成り立つとき、 L を **Boole 代数**または **Boole 束**と呼ぶ。

なお、x に対して x' は一意に定まり、x の**補元** (**complement**) と呼ばれる。

$\cup$, $\cap$, $'$ を Boole 演算と総称する。

これに関して **De Morgan の法則** (**De Morgan's law**)

$$(x \cup y)' = x' \cap y', \quad (x \cap y)' = x' \cup y'$$

が成り立つ。

B　束

順序集合 L の元 x, y に対して、$\{x, y\}$ の上限、下限が存在するとき、これらを x, y の結び (join), 交わり (meet) と呼び、$x \cup y$, $x \cap y$ で表わす。L の任意の 2 元が結びと交わりを持つとき、L を束 (lattice) または束順序集合 (lattice ordered set) と呼ぶ。

束 L においては、可換法則、結合法則、吸収法則が成り立つ。

逆にある集合 L において、 2 種類の算法 $\cup, \cap$ が定義され、これらについて上の 3 法則が成り立っていれば、

$$x \cup y = y \Leftrightarrow x \cap y = x$$

であり、この条件の片方 (よって両方) が成り立つとき $x \leq y$ と定めれば、この関係 $\leq$ に関して L は束となる。しかもこのとき、$\{x, y\}$ の上限、下限は $x \cup y$, $x \cap y$ に等しい。よって、束とは、上の 3 つの法則が成り立つ算法が与えられた代数系であると定義することも出来る。なお、束においては、巾等法則

$$x \cup x = x, \quad x \cap x = x$$

が成り立つ。

分配法則の成り立つ束を分配束、相補法則の成り立つ束を相補束と呼ぶ。分配束かつ相補束であるものを Boole 束という。Boole 束においては、任意の元の補元が一意的である。

C　1998 年度期末試験

C.1　試験問題

教科書・ノート等持込み禁止。

以下の 1 〜 5 の問のすべてに答えよ。結果だけでなく、途中経過も記すこと。解答の順番は自由である。記号は教科書・講義で使われているものに準じる。

1.　1 の目が出る確率が 2/7, 2 から 6 の目が出る確率がいずれも 1/7 というサイコロが二つあり、これらを同時に振るという試行を考える。
(1) 確率空間を求めよ。 (2) 出た目の和を X とするとき、X の確率分布を求めよ。

2.　ある確率空間の事象 A, B について、$P(A) = \dfrac{3}{8}$, $P(B) = \dfrac{5}{8}$, $P(A \cup B) = \dfrac{3}{4}$ であるとき、以下の問に答よ。
(1) 次のものを求めよ。 (a) $P(\overline{A})$. (b) $P(A \cap B)$. (c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$. (d) $P(A \cap \overline{B})$. (e) $P_A(B)$.
(2) 事象 A と B は独立か？理由をつけて答えよ。

3.　ある確率変数 X があったとき、$Y = X - 170$ で新しい確率変数 Y を定義したところ、$E(Y) = 1.5$, $V(Y) = 10$ であったという。このとき、$E(X)$, $V(X)$ はいくらか？

4.　ある連続的確率分布の確率密度関数が $f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$ であったという (a は定数)。このとき、以下の問に答えよ。
(1) a の値を求めよ。 (2) この確率分布の平均と分散を求めよ。

5. 的当てのゲームで、一回の試行で命中する確率が $\frac{1}{5}$ であるという。独立に続けて 400 回の試行をしたときに、命中した回数を X とする。以下の問に答えよ。

(1) k を $0 \leqq k \leqq 400$ なる整数とするとき、$P(X=k)$ を求めよ。

(2) $P(X=k)$ が最大になるのは k がいくつのときか、理由をつけて答えよ。

(3) 下の数表は教科書 p.55 に載せてあるものであるが、これは何か説明せよ。

(4) $P(70 \leq X \leq 90)$ の値は大体いくらか、下の数表を利用して答えよ。

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.00	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.10	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.20	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.30	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.40	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.50	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.60	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.70	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.80	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.90	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.00	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.10	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.20	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.30	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.40	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.50	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.60	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.70	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.80	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.90	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.00	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.10	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.20	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.30	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.40	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.50	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.60	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.70	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.80	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.90	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.00	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

C.2　解答

1

(1) $\{(i,j); i=1,2,3,4,5,6, \quad j=1,2,3,4,5,6\}$.

(2)

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{4}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{5}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{49}$	$\frac{5}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{3}{49}$	$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{49}$

2　(1)

(a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

(b) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{3+5-6}{8} = \frac{1}{4}$.

(c) $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}.$

(d) $A = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$, $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B}) = \emptyset$ であるから $P(A\cap\overline{B}) = P(A\cap B) + P(A\cap\overline{B})$.
ゆえに

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap\overline{B}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

(e) $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{1/4}{3/8} = \dfrac{2}{3}.$

(2) $P_A(B) \neq P(B)$ であるから独立でない。

3　$Y = X - 170$ であるから

$$\begin{cases} 1.5 &= E(Y) = E(X) - 170, \\ 10 &= V(Y) = V(X) \end{cases}$$

ゆえに

$$E(X) = 170 + 1.5 = 171.5, \quad V(X) = 10.$$

4　(1)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 ax(1-x)dx = a\int_0^1 x(1-x)dx = a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{a}{6}.$$

ゆえに $a = 6$.

(2)

$$平均 = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot 6x(1-x)dx = 6\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = 6\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\cdot 6x(1-x)dx = 6\int_0^1 (x^3 - x^4)dx = 6\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

であるから

$$分散 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}.$$

5　(1)

$$P(X = k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} = {}_{400}C_k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{400-k} = \frac{400!}{k!(400-k)!}\cdot\frac{4^{400-k}}{5^{400}}.$$

(2)

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{{}_nC_k}{{}_nC_{k-1}}\frac{p}{1-p} = \frac{k!(n-k)!}{(k-1)!(n-k+1)!}\cdot\frac{p}{1-p} = \frac{kp}{(n-k+1)(1-p)}.$$

(3) 標準正規分布表

(4) 平均は $E(X) = 400\cdot\dfrac{1}{5} = 80$. 分散は $V(X) = 400\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{20^2\cdot 2^2}{5^2}$. 標準偏差 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \dfrac{20\cdot 2}{5} = 8$. 標準正規分布に従う確率変数を Z とすると、

$$\begin{aligned} P(70 \leq X \leq 90) &\fallingdotseq P\left(\frac{70 - 0.5 - 80}{8} \leq Z \leq \frac{90 + 0.5 - 80}{8}\right) \\ &= P(-1.3125 \leq Z \leq 1.3125) \\ &= \phi(1.3125) - \phi(-1.3125) \\ &= 2\phi(1.3125) \fallingdotseq 2\times 0.405325 \fallingdotseq 0.81. \end{aligned}$$

- ϕ はやめて $\emptyset$ だけにしよう。
- グラフを描け。密度関数のグラフの面積が確率であることを。
- ${}_nC_r$ は ${}_n\mathrm{C}_r$ か $\binom{n}{r}$ にしよう。
- 束の話をもっとちゃんと。
- R とか LispStat とか。

D 余談: 疾病に対する検査の感度・特異度・陽性的中率

この文書は、もともとは 20 年以上前に書いた授業で使うためのノートであり、長い間放置していた。私の専門は確率・統計とは縁遠いので、確率のことを考えるのは入試関係の仕事をしているときくらい。ところで現在 (2021/8/26) は、COVID19 流行の真っ只中、久しぶりに確率の計算をしたので、メモを「余談」として残しておく。

元ネタは次の二つ。

(a) 「統計ナビ 「10-6. ベイズの定理の使い方」」
https://bellcurve.jp/statistics/course/6448.html

(b) 「東京大学保健センター＜コラム＞感度・特異度と陽性的中率」
https://www.hc.u-tokyo.ac.jp/covid-19/tests/

まず (a) の内容を、この文書の記号を使って説明しよう。

日本人の 0.01% が罹患している病気があり、ある検査方法で検査すると、実際に病気に罹患している人が陽性と判定される確率が 95% (5% の人は罹患しているにもかかわらず (誤って？) 陰性と判定される), 罹患していない人が陰性と判定される確率が 80% (20% の人は罹患していないにもかかわらず (誤って) 陽性と判定される) とされている。ある人がこの病気の検査を受けて陽性という判定を受けたとき、本当にこの病気に罹患している確率はいくらか。

(脱線) 私事になるが、ずっと昔、私の家族がある癌の検査を受けて陽性と判定された時、検査結果の紙に似たような数値とその説明が書いてあった (確率の値は覚えていない)。ちなみに実際には癌でなかったようだ (その後に受けた別の検査では癌でないという判定結果が出て、それから現在にいたるまで 20 年以上何も対処せず、健康上の問題は特にない。癌ではなかったと考えている。)

検査で陽性になる事象を A, 実際に病気に罹患している事象を B とする。求めよと要求されているのは、いわゆる "陽性的中率" (定義は後述)、式で書くと $P_A(B)$ であり、与えられている情報は

$$P(B) = 0.01\% = 0.0001, \quad P_B(A) = 95\% = 0.95, \quad P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 80\% = 0.80.$$

後者から

$$P_{\overline{B}}(A) = 1 - P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1 - 0.80 = 0.20, \quad P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.0001 = 0.9999.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap (B \cup \overline{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \\ &= P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B}) \\ &= 0.95 \cdot 0.0001 + 0.20 \cdot 0.9999 = 0.200075. \end{aligned}$$

Bayes の定理によって

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}=\frac{0.95\cdot 0.0001}{0.20075}=0.000474822\fallingdotseq 0.047\%.$$

(病気である確率が、検査をする前 (0.0001) と比べて、5 倍弱大きくなった (0.00047) けれど、もともと確率が低いので、それほど心配する必要はない。)

(a) によると

> 「したがってこの検査法の場合、陽性という判定を受けてもあまり気を病む必要はないかもしれません。」

だそうだ。

(また脱線モード) 癌の判定結果の話に戻ると、当時はいきなり判定結果を突きつけられてとてもあわてた。少し考えてから、あれ、実はそれほど心配する必要はないのではと気づいて、こういう検査にどれくらいの意味があるのかしら (欠陥のある検査法じゃないのか？)。とにかくもう一度検査をしろということなのかな、それにしても不親切な説明だな、と思った (私の家族はおびえて帰って来た)。

定性的にまとめると、もともと罹患している確率が非常に低くて、罹患していない場合に正しく陰性と判定される確率がそれほど高くない場合 (まちがって陽性と判定される可能性が数% とか、数十% とかそれなりにある場合)、陽性的中率 (陽性と判定された人が本当に病気である確率) は低い、それほどあわてなくてもよい、ということである。

用語の解説をしておく。

- 「感度（sensitivity, 真陽性率)」: その病気に罹患している人の中で、検査で陽性になった人の割合
  式で書くと $P_B(A)$
- 「特異度（secificity, 真陰性率)」: その病気に罹患していない人の中で、検査で陰性になった人の割合
  式で書くと $P_{\overline{B}}(\overline{A})$
- 「偽陽性率」: その病気に罹患していない人の中で、検査で陽性になった人の割合
  式で書くと $P_{\overline{B}}(A)=1-P_{\overline{B}}(\overline{A})=1-$ 特異度
- 「偽陰性率」: その病気に罹患している人の中で、検査で陰性になった人の割合
  式で書くと $P_B(\overline{A})=1-P_B(A)=1-$ 感度
- 「陽性的中率」: 検査で陽性になった人の中で、実際にその病気に罹患している人の割合
  式で書くと $P_A(B)$

感度も特異度も高い (1 に近い) 方が検査として優れているということになる。

率直に言って、普段使っていない用語なので、式を使って考える方が簡単に感じる。

感度 $P_B(A)$ を k, 特異度 $P_{\overline{B}}(\overline{A})$ を t, 陽性的中率 $P_A(B)$ を p と書くことにする。検査を受けた人全体の中に占める割合 $P(B)$ (後で説明する東大保健センターの文書の罹患率に相当？) を r とすると、上に書いた議論は次のようにまとめられる。

$$p=P_A(B)=\frac{P_B(A)P(B)}{P_B(A)P(B)+P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})}=\frac{kr}{kr+(1-t)(1-r)}. \tag{8}$$

(本当は、英単語の綴りで文字を選択しようと考えたが、感度も特異度も s で始まるのであきらめた。)

一般に $0 \le p \le 1$ である。p は 1 に近いのが検査としてのぞましい。$t=1$ ならば $p=1$ である (まあ当たり前)。罹患率 r が小さい、つまり $1-r \fallingdotseq 1$ が良い近似である場合は $(1-t)(1-r) \fallingdotseq 1-t$. さらに $kr \ll 1-t$ とみなせるので

$$p \fallingdotseq \frac{kr}{kr+(1-t)} \fallingdotseq \frac{kr}{1-t} \quad \text{(等式でないので無条件で信用しないこと)}.$$

上の (a) の例では、$r=0.0001$, $k=0.95$, $t=0.8$ であるから

$$\frac{kr}{1-t} = \frac{0.95 \cdot 0.0001}{1-0.8} = 0.000475.$$

これは近似なしで得た値 $0.0004748\cdots$ とよく合っている。この (a) の内容には納得できた (明快な解説である)。

(b) の内容の紹介。一見 (a) と似たような内容だけれど、微妙に異なるところもあって、それは最初気づかなかったので、一応フォローしてみる。

> 「新型コロナウイルス感染症も含め、疾患の検査にはその精度を検証する必要があります。その指標として感度、特異度、陽性的中率などがあります。」
> (中略) 「陽性的中率は検査で陽性の人の中で実際にその病気に罹患している人の割合です。」「以下の仮想例（罹患率 10%、感度 70%、特異度 99%）を想定して、具体的な計算法を記載します。検査を受けた 1000 人あたりの罹患者を 100 人 (罹患率 10%) とした場合」

ここでは (8) で陽性的中率を求めることにする。$r=0.10$, $k=0.70$, $t=0.99$ であるから、陽性的中率は

$$p = \frac{kr}{kr+(1-r)(1-t)} = 0.886076 \fallingdotseq 0.89.$$

> つまり、検査を受けた人のうち、真の罹患者は、89%ということになります。

なるほど。

> この陽性的中率は、罹患率によって変化します。罹患率が低下すると、陽性的中率も低下することになります。PCR 検査をより多くの人に施行すると、その集団内での罹患率は低下することが予想されるので、陽性的中率は低下、つまり実際には罹患していないにもかかわらず陽性と判定される人が増加することになります。

「罹患率が低下すると、陽性的中率も低下することになります。」とあるのは、少し考えると一理あるように思える。例えば k, t を定数とするとき

$$\lim_{r\to+0} p(r) = \lim_{r\to+0} \frac{kr}{kr+(1-t)(1-r)} = \frac{0}{0+(1-t)(1-0)} = \frac{0}{1-t} = 0.$$

あるいは $A := (1-t)/k$ とおくと

$$p(r) = \frac{1}{1+A(1/r-1)} = \frac{1}{\frac{A}{r}(1-r(1-1/A))} = \frac{r}{A} + O(r^2) \quad (r \to 0).$$

しかし、落ち着いて考えてみると、我々は数学の極限の話をしているのだろうか？それは問題の取り違いではないか、と気づく。

後で議論するが、実際には、r は $0.1\% = 10^{-3}$ 程度の大きさである一方で、t は $1-t$ が 10^{-6} 程度の大きさとなるくらい 1 に近かったりする。その場合は、A は非常に小さく、p は 1 に近い、ということになる。

「PCR 検査をより多くの人に施行すると、その集団内での罹患率は低下することが予想される」を読んで、r の解釈が (a) とは異なることに気づく。(a) においては、

$$r = \frac{\text{日本全体での罹患者数}}{\text{日本の総人口}}$$

として議論を始めて、それが検査をした集団内での比率、つまり

$$\frac{\text{検査した集団内での罹患者数}}{\text{検査した人数}}$$

に等しいと暗黙の仮定をおいていたのだろう (定期検診など自覚症状のない人の検査)。

(b) の議論は、あくまでも検査をした集団内の人達の利益を考えているということになるだろうか。実際には罹患していないのに、陽性 (罹患の可能性がある) と判定するのは避けるべきことだ、という考え方をしている？そういう考え方は分からないでもない (例えば検査で不安になった我が身を振り返ってそう思う)。

一方で、次の批判は可能であろう。検査をしていない集団内の罹患者のことは考えていない (発見して治療を受けてもらうべきではないのか。特に検査を希望していて受けられない人のことはどうか)。感染症の場合は、それも良くないし、罹患していない人のことも考えていない (罹患者が発見できなければ感染してしまう危険がある)。

率直に言って、数学以前に問題の設定から考える必要がありそうだ。

以下は、受け売りである。リアルワールドがどうなっているかは (r, k, t の値は何か)、数学だけで分かることでないので、「…と言う報告がある。もしそれが正しければ…ということになる。」を主張するだけである (と言いつつ括弧内で色々つぶやく)。

COVID19 の PCR 検査の話で言うと、検体がまともならば、感度も特異度も 1 に非常に近いそうである (原理的に 1 である、という人がいたりする)。

検体の汚染 (というのか感染している他人の検体が混じった) とか、取り違え (しっかりして欲しい…出来る限り自動化するとか工夫して下さい) とかがなければ、偽陽性は発生せず、特異度は “実際上は” 1 とみなして良いと。実際、特異度は $99.999x\%$ とか非常に高いらしい (最初中国からの報告でそういう値を見た。その時は本当かなあと思ったが (半信半疑)、それを裏付ける話はその後も色々あって、最近の日本でも、オリンピック選手達を高頻度で検査した結果から同じような値が出ている)。その結果導かれるのは、陽性的中率は非常に高いということである (実際上偽陽性は心配ない)。

一方、感度の方はそれほど高くないそうだ。実際には感染していても、ウイルスが局在しているせいで、ウイルスを含む細胞が採取されるとは限らない。そのために偽陰性が発生する。実際上の感度は 0.95 とかそういうものらしい。この問題は、怪しければ複数回検査するとか、医師が他の要素も見て判断するとかして克服すべきものなのだろうか。検疫を設計するのはなかなか難しそうだ。

索 引