解析概論II
広義積分の計算

桂田 祐史

2005年11月14日

1 広義積分の計算手順

前回答案を提出してもらったが苦労した人が多かったので補足する。

「次の広義積分 $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ を求めよ」と要求されたら、以下の手順で考える。

(1) 積分範囲 Ω がどういうものか理解する。図を描くことを強く勧める。

(2) Ω は有界であるか、そうでないか (無限に広がっているか) 判別する。

(3) 被積分関数 f は Ω 全体で定義されているか (分数だったら分母が 0 にならないか、対数関数で真数が 0 になったりしないか)？f の値が有界であるか (その点に近づくと値が発散するようなものはないか)？除外集合 N を見つけ、それが Jordan 零集合であることを確かめる。

(4) Ω や f は極座標向きか？広義積分でない普通の積分の場合は、極座標向きかそうでないかの区別は簡単だが (ほぼ Ω の形が丸いかどうかで判断できる)、広義積分の場合はやや微妙である。例えば全平面 $\mathbf{R}^2$ は、増大する正方形 $K_n=[-n,n]\times[-n,n]$ で近似するのが良い場合もあれば、増大する円盤 $K_n=\{(x,y);x^2+y^2\le n^2\}$ で近似するのが良い場合もある。

(5) 以上をふまえて $\Omega\setminus N$ を近似する集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を作る。これができるようになるには絶対に練習が必要である (他人の解答を見るだけでは、まずできるようにならない)。

(6) もし f の符号が一定ならば、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

をていねいに計算する (だけ)。f の符号が一定でない場合は、それを実行する前に絶対収束であるかどうか、つまり

$$\iint_\Omega |f(x,y)|\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} |f(x,y)|\,dx\,dy<\infty$$

であるかどうかをチェックする必要がある (これについては後述)。

例 1.1

$$\iint_\Omega \frac{1}{x^2(1+y^2)}\,dx\,dy,\quad \Omega=\{(x,y);x\geq 1,\ y\geq 1\}.$$

まず Ω の図を描いてそれが有界でないことを理解しよう。被積分関数は分数関数であるが、Ω ではその分母は 0 にならない。この Ω, f が極座標向きかそうでないかは、極座標変換した場合とそうでない場合でどちらが簡単そうか予想することになる。この場合は極座標にしても簡単にならず、そのまま素直に Fubini の定理の形に持ち込むのがよさそうである[1]。そこで

$$K_n:=\{(x,y);1\leq x\leq n,\ 1\leq y\leq n\}$$

とおく (K_n の図も描いた方がよい)。$\bigcup_{n=1}^\infty K_n=\Omega$ であることは見やすい。被積分関数は Ω で正の値を取るので、後はひたすら計算である。

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \frac{1}{x^2(1+y^2)}\,dx\,dy &= \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n}\frac{1}{x^2(1+y^2)}\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\int_1^n x^{-2}\,dx\cdot\int_1^n\frac{1}{1+y^2}\,dy\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_1^n\cdot\left[\tan^{-1}y\right]_1^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\tan^{-1}n-\tan^{-1}1\right)=1\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}.\blacksquare\end{aligned}$$

例 1.2

$$\iint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy,\quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2\geq 1\}.$$

これまた Ω の図を描いてそれが有界でないことを理解しよう。被積分関数は分数関数であるが、Ω ではその分母は 0 にならない。この Ω, f は明らかに極座標向きである (境界は丸いし、被積分関数も r だけの関数なので簡単)。そこで

$$K_n:=\{(x,y);1\leq x^2+y^2\leq n^2\}$$

とおく。$\bigcup_{n=1}^\infty K_n=\Omega$ である。被積分関数は Ω で正の値を取るので、後はひたすら計算である (計算ははしょって書くが、ヤコビアンは忘れずに…)。

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy &= \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_1^n\frac{1}{(r^2)^2}\cdot r\,dr\right)d\theta\\ &= \lim_{n\to\infty}2\pi\int_1^n r^{-3}\,dr=2\pi\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2}r^{-2}\right]_1^n=\pi.\blacksquare\end{aligned}$$

例 1.3

$$\iint_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy,\quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2\leq 1\}.$$

上の例と似ているが、Ω の中の条件の不等式の向きが逆だから、計算のやり方はまったく違う。まず Ω は有界である。被積分関数は分数関数で、Ω はその分母を 0 とする点 (ここでは原点 O) を含んでいることに注意する。そこで $N:=\{O\}$ とする。この Ω, f はやはり極座標向きである (境界は丸いし、被積分関数も r だけの関数…)。そこで原点という「特異点」をさけて

$$K_n:=\{(x,y);\frac{1}{n^2}\leq x^2+y^2\leq 1\}$$

[1]どういうことか分かりたければ、実際に両方ともやってみるとよい。

とおく (この K_n は良く出て来るので、人によっては紙の上に図を描かなくても頭の中に描けるだろうが、まだ一度も描いたことがない人は是非とも描くこと)。なお穴を原点中心半径 $1/n$ の円盤としたのは極座標との相性を考えたものである (例えば穴を四角くすると極座標に変換した後に曲がってしまって困る)。$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega \setminus N$ である。被積分関数は $\Omega \setminus N$ で正の値を取るので、後はひたすら計算。

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n}\frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_{1/n}^1 \frac{1}{r^2}\cdot r\,dr\right)d\theta \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\pi \int_{1/n}^1 \frac{dr}{r} = 2\pi \lim_{n\to\infty}\left[\log r\right]_{1/n}^1 = 2\pi \lim_{n\to\infty}\log n = \infty.\blacksquare\end{aligned}$$

例 1.4

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy, \quad \Omega = \{(x,y); 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}.$$

これは Ω の図を描かないと始まらない (この Ω も頻出するものなので、人によっては頭の中に描けると思うが、ミスを避けるためにも、また後の K_n をどうするか考えるためにも、紙の上に実際に図を描くことを強く勧める)。Ω が縦線集合あるいは「横線集合」であるということに気づいて、$\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^x 某\,dy\right)dx$, $\displaystyle\int_0^1\left(\int_y^1 某\,dx\right)dy$ という変形が自然と頭に浮かぶようになっていなくてはならない (そうでなかったら、広義積分という前に Fubini の定理の練習が必要)。Ω は三角形だから、もちろん有界である。被積分関数は分数関数で、Ω はその分母を 0 とする点 (ここでは x 軸上の点 $(x,0)$ $(x\in[0,1])$ — それ全体を N とおく) を含んでいることに注意する。この Ω, f は明らかに極座標向きではない。N の点という「特異点」をどう避けるかが問題であるが、「横線集合」上の Fubini の定理を使うことを念頭に

$$K_n := \{(x,y); \frac{1}{n}\le y\le 1,\ y\le x\le 1\}$$

とおく。この K_n の図をじっくり眺めて、確かに N に属する点という特異点を避けることが出来ていることに注意しよう。$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ ではなく、$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega\setminus N$ である (慣れないと分かりづらくて当然の結果なので、あせらずゆっくり考えること)。被積分関数は Ω で正の値を取るので、後はひたすら計算。

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy &= \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n}\frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^1\left(\int_y^1 \frac{1}{\sqrt{xy}}dx\right)dy \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\left[2x^{1/2}\right]_y^1 dy = 2\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^1\left(y^{-1/2}-y\right)dy \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = 2.\blacksquare\end{aligned}$$

2 被積分関数の符号が一定でない場合 — 絶対収束と主値積分

2.1 状況説明

被積分関数 f の符号が一定である場合の広義積分 $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ の定義は既に述べたが、符号が一定でない場合は、集合列 $\{K_n\}$ の取り方によって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy$ が異

なる[2]可能性があり、難しい[3]。この問題に対処する方法は大きく分けて二つある。

1. 以下に説明する意味で「**絶対収束**」する広義積分を扱う。
2. Ω が典型的な場合 (例えば全空間のように対称性のある場合など) に、集合列 $\{K_n\}$ の選び方を具体的に指定する (**主値積分**)。

2.2 絶対収束

広義積分 $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ が**絶対収束**するとは、f の絶対値 $|f|$ が広義積分可能なことをいう[4]。それは任意に選んだ近似列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対して

$$\iint_\Omega |f(x,y)|\ dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} |f(x,y)|\ dx\,dy < \infty \tag{1}$$

(収束すること) と同値である。このとき任意の近似列 $\{K_n\}$ に対して $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy$ が共通の極限値を持つことが証明できる。その値を $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ とする:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy := \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

式 (2) だけみると、符号が一定の場合と同じだが、それが矛盾ないことを保証するために、(1) という条件をチェックする、ということである。

以上の話は無限級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ の収束・発散理論と符合するところが多い。

例 2.1

$$\iint_\Omega e^{-x}\cos xy\,dx\,dy,\quad \Omega=\{(x,y); x\geq 0,\ 0\leq y\leq 1\}$$

を考えよう。これは被積分関数の符号が一定でない。この問題を解くには、まず絶対収束することを確かめる必要がある。これは

$$\iint_\Omega \left|e^{-x}\cos xy\right| dx\,dy = \iint_\Omega e^{-x}\ dx\,dy < \infty$$

を示せと言うことで特に難しくはないだろう (計算すると値は 1 であることがわかる)。 ■

[2]収束したり、収束しなかったり、収束しても極限が違ったりしうる。念のために繰り返しておくと、符号が一定の関数に対してはこういうことはなく、任意の近似列に対して収束発散と極限値は共通する (だから一つの近似列で計算すれば十分)。

[3]近似列の取り方は無限にあるので、具体的に計算をするのは不可能であるから

[4]$|f|$ は 0 以上の値しか取らず、符号は一定であるので、一つの $\{K_n\}$ について収束すれば、別の $\{K'_n\}$ についても同じ値に収束する (発散する場合も同様)。