解析概論II
第2部 (ベクトル解析)

桂田 祐史

2006 年1 月10 日

目 次

第 1 章　ベクトル解析 — まずはベクトル場から **3**

1.1 イントロ . . . 3

1.1.1 ベクトル解析とは . . . 3

1.1.2 記号に関する注意 . . . 4

1.1.3 ベクトル場 — その一つの必然性 . . . 5

1.2 準備: $\mathbf{R}^3$ のベクトル積 . . . 5

1.3 ベクトル場の微分演算子 . . . 10

1.3.1 ナブラ ∇ . . . 10

1.3.2 勾配 . . . 10

1.3.3 発散 . . . 11

1.3.4 回転 . . . 11

1.3.5 ラプラシアン . . . 12

1.3.6 微分演算子の公式 . . . 13

1.3.7 例 . . . 13

第 2 章　線積分 **16**

2.1 曲線の弧長と線要素 . . . 16

2.2 (接線) 線積分の定義と基本的な性質 . . . 17

2.2.1 例 . . . 17

2.2.2 定義 . . . 19

2.2.3 線積分の性質 . . . 20

2.3 線積分とポテンシャル . . . 21

2.3.1 ポテンシャルの定義 . . . 21

2.3.2 ポテンシャルと線積分の関係 . . . 23

2.3.3 ポテンシャルの存在条件 . . . 24

2.4 Green の定理 . . . 27

第 3 章　曲面と面積分 **32**

3.1 曲面の定義 . . . 32

3.1.1 3 つの素朴な方法 . . . 32

3.1.2 正則パラメーター曲面 . . . 35

3.1.3 一般の正則曲面の定義 . . . 38

3.2 正則パラメーター曲面の曲面積と面積要素に関する面積分 . . . 39

3.3 ベクトル場の法線面積分 . . . 42

3.4 Gauss の発散定理 . . . 45

3.5 Stokes の定理 47

付 録 A 本文で略した事実の証明 **50**
A.1 一方向について縦線集合である領域における Green の定理 50
A.2 縦線集合である領域における Gauss の定理 52

付 録 B 細かな補足 **58**
B.1 区分的に C^k-級 58
B.2 曲線のいろは 59
B.3 連結性 60
B.4 単連結性 62
B.5 Jordan の曲線定理 62

付 録 C 単連結領域におけるポテンシャルの存在 **64**
C.1 ステップ 1: 球におけるポテンシャルの存在 64
C.1.1 証明 1: 区間の「辺」からなる折線に沿う線積分と積分定理を利用 . . . 64
C.1.2 証明 2: 球の中心と結んだ線分に沿う線積分を利用 65
C.2 ステップ 2: 連続曲線に沿う線積分の導入 65
C.3 ステップ 3: 単連結領域におけるポテンシャルの存在 67

付 録 D 細かいトピックス **69**
D.1 Green の公式 69
D.2 Helmholtz の定理 69
D.3 立体角 70
D.4 外微分形式の形式的導入 70
D.5 ポアンカレの補題の条件について 70
D.6 弧長の一般的定義 71
D.7 Schwarz のちょうちん 71
D.8 ベクトル・ポテンシャル 71
D.9 71

付 録 E 幾何への応用 **73**
E.1 復習: 領域の単連結性とポテンシャルの存在条件 73
E.2 ベクトル・ポテンシャル 73
E.3 商線型空間概念の適用 74
E.4 高次元化と de Rham のコホモロジー群 74
E.5 ホモロジー群 76
E.6 多様体の de Rham コホモロジー群 76
E.7 多様体の特異ホモロジー群 77

付 録 F おもちゃ箱 **78**
F.1 平行体と単体 78
F.2 スピヴァック [10] の「まえがき」から引用 78

第1章　ベクトル解析 — まずはベクトル場から

1.1　イントロ

1.1.1　ベクトル解析とは

この章 (解析概論 II の後半) のテーマはベクトル解析である。ベクトル解析とは何だろうか？この問いかけに対しては色々な答がある。初めて学ぶ段階では理解しづらいだろうが (一通り終わった段階でもう一度ここに戻ってきて読み直してもらいたい)、いくつか紹介してみよう。

1. 「ベクトル場の微積分」
   これが一番安直な答だが、これだけだと中身が見えない。

2. 「曲がっているもの (曲線や曲面) の上での微積分」

   (a) 曲線上の積分である線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dr}$

   (b) 曲面上の積分である面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$

   に関わる微積分である。

3. 微積分の基本定理

   $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad \int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

   の高次元化である

   $$\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{f}\,dx = \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \quad (\textbf{Gauss の発散定理})$$

   や

   $$\int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{f}\,dS = \int_{\partial S}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dr} \quad (\textbf{Stokes の積分定理})$$

   の活躍する世界である。

歴史的には、電磁気学[1]や流体力学に現れる現象を説明するために生まれた数学である (現在でも、これらの物理学を学ぶことはベクトル解析の学習に大いに役立つと思われる。また偏

[1] ファラデー (Michael Faraday, 1791–1867, 英国) が開拓した分野をマクスウェル (James Clerk Maxwell, 1831–1879, スコットランドの Edinburgh に生まれ、英国の Cambridge に没する) が数学的にまとめ、ヘビサイド (Oliver Heaviside, 1850–1925, 英国) が整理した。

微分方程式の入門講義では、物理学に由来する問題が重要な例として登場するので、必然的にベクトル解析が活躍する。)。20 世紀に入って高次元化され[2]、幾何学における基礎的な道具となって大発展した。

歴史メモ

古典的なベクトル解析は、電気工学者の O.Heaviside の [20] (1893) と熱力学で有名な Josiah Willard Gibbs (1839–1903, 米国) (1881, 公刊は以下に示すように 1901) によって整えられた。両者とも、James Clerk Maxwell (1831–1879) により完成された電磁気学 ([23], 1873) を数学的に整理するのが目的であった。

J.W.Gibbs の著作 [21] について、`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gibbs.html` から引用しておく。

> Gibbs' work on vector analysis was also of major importance in pure mathematics. He first produced printed notes for the use of his own students in 1881 and 1884 and it was not until 1901 that a properly published version appeared prepared for publication by one of his students. Using ideas of Grassmann, Gibbs produced a system much more easily applied to physics than that of Hamilton.

(ここに出て来る Hamilton[a]のシステムとは、**4** 元数 (**quaternion**) のことであろう。)

[a]Sir William Rowan Hamilton (1805–1865, Ireland の Dublin に生まれ、Dublin にて没する) は数学者かつ天文学者で、4 元数の発見 (1843) 以外にも解析力学の分野で大きな業績がある。論文が `http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Papers.html` から入手可能である。4 元数については (色々な本に説明が書いてあるが、ベクトル解析の本ということならば) 例えば一松 [14] や小松 [6] を見よ。

1.1.2 記号に関する注意

- ベクトルを表すのに $\vec{a}$ のように矢印をつけたり、$\boldsymbol{a}$ のように太字にする習慣がある。この解析概論 II の前半ではそれを採用しなかったが、ベクトル解析の説明では、なるべくベクトルを太字で書くことにする。
- この文書では右肩に T (transpose の頭文字) を書くことで行列やベクトルの転置を表す。数ベクトルは基本的に縦ベクトルとするが、紙幅を節約するために、横ベクトルの転置、例えば $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ のようにして表すことが多い。
- 空間の点を表す変数として x という文字が使われることが多いが、伝統的なベクトル解析の教科書では $\boldsymbol{r}$ という文字がよく使われている。ここでもそれを採用することにする。なお $\boldsymbol{r}$ の成分は普通の習慣通り x, y, z で表す。

[2](外) 微分形式の理論という、ちょっと異なる見かけになった。

1.1.3　ベクトル場 — その一つの必然性

1 変数実数値関数 $f\colon I \to \mathbf{R}$ (I は $\mathbf{R}$ の区間) の一般化としては、n 変数 m 次元ベクトル値関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ (Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合) というのがありうるが、以下に説明するように $m = n$ の場合は特に重要であるため、n 次元ベクトル場 (**vector field**) と名づけられている。素朴な幾何学的なイメージとしては、「空間内のある範囲 Ω 内のすべての点 $\boldsymbol{r}$ において矢印 (ベクトル $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$) がある」とき、$\Omega$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が与えられている、ということになる。

(ここらへんにベクトル場の例の図を入れよう。)

ベクトル場がごく自然に現れるものであることを一つの例で説明しよう。f を普通の実 1 変数の実数値関数

$$f\colon I \longrightarrow \mathbf{R} \quad (I \text{ は } \mathbf{R} \text{ の区間})$$

とするとき、導関数

$$f'\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$$

もまた実 1 変数の実数値関数であるが、n 変数実数値関数

$$f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \quad (\Omega \text{ は } \mathbf{R}^n \text{ の開集合})$$

については、$n \geq 2$ の場合は f の導関数に相当するものは、n 変数 n 次元ベクトル値 関数 (n 次元ベクトル場)

$$\nabla \boldsymbol{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

である (n 変数 実数値関数 ではない)。

多変数では、導関数は元の関数と違ったタイプ (値の空間の次元が異なる) になる
実数値関数の微分はベクトル場である

なお、Ω を定義域とする実数値関数

$$f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

のことを Ω 上のスカラー場 (**scalar field**) と呼ぶこともある。

1.2　準備: $\mathbf{R}^3$ のベクトル積

$\mathbf{R}^3$ の二つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

に対して、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のベクトル積[3]とは、次式で定義される $\mathbf{R}^3$ のベクトルのことをいう。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &:= \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)^T \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boldsymbol{e_1} \\ a_2 & b_2 & \boldsymbol{e_2} \\ a_3 & b_3 & \boldsymbol{e_3} \end{vmatrix} \quad (\text{これはやや形式的}).\end{aligned}$$

ただし

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

第 i 成分には a_i, b_i が現れないこと、添字が $1 \to 2 \to 3 \to 1 \to \cdots$ と循環することを覚えておくとチェックするのに便利である。

なお、行列を転置しても行列式の値は変わらないので、

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

としてもよい。

ベクトル積の計算

$\boldsymbol{a} = (1,2,3)^T$, $\boldsymbol{b} = (3,2,1)^T$ とするとき、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を計算してみよう。どちらか自分にとって分かりやすい方を覚えるとよい。

(1) (「形式的公式」の利用 — 行列式の展開に慣れている場合お勧め)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(2) 右の表から

1		2		3		1
	③		①		②	
3		2		1		3

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

[3] しばしば外積とも呼ばれる。

命題 1.2.1 (ベクトル積の性質) 以下 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は $\mathbf{R}^3$ の要素、$\lambda \in \mathbf{R}$ とする。

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$. 特に $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

(2) $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \times \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b})$, $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

(3) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して、

$$\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}).$$

(4) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立 $\iff \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. (ここに誤植があった！)

(5) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で出来る平行四辺形 $\{t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}; t \in [0,1], s \in [0,1]\}$ の面積を S とするとき、

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}, \quad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}, \quad \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \geq 0, \quad \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = S.$$

証明　(1), (2) は定義式と行列式の性質から明らかである。(3) は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ とすれば、

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}).$$

($\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の形式的定義の $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ のところにそれぞれ x_1, x_2, x_3 を代入すると $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{x}$ の内積になる。)
(4) については、(3) を用いて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ が } 1 \text{ 次独立} &\iff \exists \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \text{ が } 1 \text{ 次独立} \\ &\iff \exists \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.} \quad \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}) \neq 0 \\ &\iff \exists \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.} \quad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) \neq 0 \\ &\iff \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

(5) の最初の三つは (3) を使って、

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}) = 0,$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{b}) = 0,$$

$$\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 \geq 0.$$

$S = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ の証明は、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次従属な場合は、両辺とも 0 であるから明らかである。以下、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立な場合を考える。3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で作られる 3 次元平行体の体積を V としよう。$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が他の二つのベクトルに直交しているところから、

$$V = S\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|.$$

一方、平行体の体積の一般論から

$$V = \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

ゆえに

$$S\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2$$

となるので両辺を $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|\ (>0)$ で割ることにより、

$$S = \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|.\blacksquare$$

(5) の計算による証明　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると、$\cos\theta = \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2} \\ &= \sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2} \\ &= \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|\ .\blacksquare \end{aligned}$$

問　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を満たさない $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の例をあげよ。

問　次の等式を証明せよ。

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \quad (\textbf{Jacobi の等式}).$$

注意 1.2.1 ($\mathbf{R}^n$ のベクトルの外積) あまり使われないが、$\mathbf{R}^n$ のベクトルのベクトル積を紹介しよう。$\mathbf{R}^n$ の $n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ があったとき

$$\mathbf{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}$$

は線形形式であるから、

$$\exists \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n \quad \text{s.t.} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \quad \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}).$$

この $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ のベクトル積と呼び、$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{a}_{n-1}$ と書く。

n 次元空間では $n-1$ 個のベクトルに対してそのベクトル積が定義される。
2 つのベクトルのベクトル積が定義できるのは 3 次元空間だけ！

もし $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{a}_{n-1}$ の成分が知りたい場合は、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ を代入すれば良い:

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{a}_{n-1} \text{ の第 } i \text{ 成分} = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{e}_i).$$

(これはもちろん 3 次元の場合の一般化になっている。) ■

例 1.2.1 (空間内の三角形の面積、平面の方程式への応用) 空間の 3 点 $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(2,1,0)$, $\mathrm{C}(0,2,-1)$ を頂点とする三角形 ABC の面積と、それを含む平面の方程式を求めよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ゆえに (三角形は平行四辺形の半分だから)

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 7^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{86}}{2}.$$

考えている平面は、$\mathrm{A}(1,2,3)$ を通り、$(4,7,-1)^T$ に垂直であるから、それを定義する方程式として

$$4(x-1) + 7(y-2) + (-1)(z-3) = 0$$

が取れる。整理して $4x + 7y - z = 15$. ■

例 1.2.2 (力学への応用例「中心力場での運動」) 1 変数ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(t)$, $\boldsymbol{g}(t)$ があるとき、

$$(\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}(t))' = \boldsymbol{f}'(t) \times \boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}'(t)$$

が成り立つ (各自確かめよ)。

質点の質量、時刻 t での位置、働く力をそれぞれ m, $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{f}$ とするとき、

$$m\boldsymbol{r}''(t) = \boldsymbol{f}$$

が成り立つ (**Newton** 力学の第二法則)。$\boldsymbol{f}$ が

$$\boldsymbol{f} = f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$$

の形をしているとき、$\boldsymbol{f}$ は中心力場であるという。このとき、任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ であることに注意すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}''(t)\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}(t) \times \frac{\boldsymbol{f}}{m} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}(t) \times \frac{f}{m}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{0}$$

が分かるから

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t) \equiv \text{定数ベクトル}.$$

この左辺は面積速度と呼ばれるものになっているので[4]、

中心力場では面積速度は一定である

ということを示している (万有引力の場合は **Kepler** の第二法則)。 ■

[4] この定数倍である $\boldsymbol{r}(t) \times (m\boldsymbol{r}'(t))$ を $\boldsymbol{0}$ のまわりの角運動量と呼ぶ。ここの議論は角運動量が保存される、ということにもなる。

1.3　ベクトル場の微分演算子

ベクトル場の微分演算子をざっと紹介する。grad, rot, div は、幾何学で (これから) 学ぶ外微分形式の理論では外微分という一つの演算にあざやかにまとめられているが、「物理的な」意味も重要であり、ここで説明する記法も習得すべきである。

grad の意味は既知のはずである (解析概論 I で習った)。div, rot については、後述する積分定理で明らかになる。

1.3.1　ナブラ ∇

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 (大抵は開集合) で定義された関数を考えているとき、

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

という微分演算を表す形式的ベクトルを導入する。∇ は **nabla** (ナブラ) と呼ばれる[5]。なお **Hamilton** の微分演算子と呼ぶこともある。

1.3.2　勾配

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された C^1-級の関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ に対して、

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

と定義し、∇f を f の勾配 (こうばい) (**gradient**) と呼ぶ。∇f はしばしば $\operatorname{grad} f$ とも書かれる。

微分法の復習: ∇f の幾何学的意味

$a \in \Omega$ とするとき、$\nabla f(a)$ は f のレベルセット (等高線あるいは等値面)

$$\{x \in \Omega; f(x) = c\}, \quad c := f(a)$$

の上にある点 a における法線ベクトルであり、f の値が最も速く増加する方向を表している。

[5]何でもヘブライ語 (と言っても筆者自身ピンと来ないが) の竪琴 (Nebel) が語源であるという (藤野 [17])。

1.3.3 発散

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の C^1-級のベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

と定義し、$\nabla \cdot \boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{f}$ の発散 (**divergence**) または湧き出しと呼ぶ。$\nabla \cdot \boldsymbol{f}$ はしばしば $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ とも書かれる。

恒等的に $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ を満たすベクトル場を湧き出しなしまたは管状 (**solenoidal**) という。

$\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ の正確な意味は後述の Gauss の発散定理で明らかになる。

例 **1.3.1** 浅い川の水の流れの速度場を $\boldsymbol{f}$ とするとき、$\boldsymbol{f}$ は 2 次元のベクトル場である。もしも川底に穴が空いていたりして水が染み込んでいったり、逆に川底から水が湧き出して来なければ $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = 0$ が成り立つ。水が染み込んで消えるようなところでは $\operatorname{div} \boldsymbol{f} < 0$, 水が湧き出して来るようなところでは $\operatorname{div} \boldsymbol{f} > 0$ が成り立つ。 ■

1.3.4 回転

ここでは $n = 3$ とする。$\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ については、前節で見たようにベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が定義できることに注意する。

$\mathbf{R}^3$ の開集合 Ω 上の C^1-級のベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^3$ に対して、

$$\nabla \times \boldsymbol{f} := \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ f_3 & f_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

と定義し、$\nabla \times \boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{f}$ の回転 (**rotation**) と呼ぶ。$\nabla \times \boldsymbol{f}$ はしばしば $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}$ あるいは $\operatorname{curl} \boldsymbol{f}$ とも書かれる。ますます形式的になってしまうが、

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

と書くこともできる。

特に $\boldsymbol{f}$ を速度場と考えるときは $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}$ を渦度 (**vorticity**) と呼び、恒等的に $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ を満たすベクトル場を渦無しまたは非回転という。

問　流体粒子が角速度 Ω の等速円運動 $(r\cos\Omega t, r\sin\Omega t)$ $(r = \sqrt{x^2+y^2}$, t は時刻) をするとき、その速度場 $\boldsymbol{v}$ は定数であるが、その渦度 $\boldsymbol{\omega} := \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ はどうなるか？

$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}$ の正確な意味は後述の Stokes の定理で明らかになる。

計算にあたっての注意

$\nabla \boldsymbol{f}$ の第 1 成分は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

であるが、これが分かれば後は $1 \to 2,\ 2 \to 3,\ 3 \to 1$ と番号を回して

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

が得られる。計算のチェックに利用すると良い。

余談: 2 次元ベクトル場の回転

2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)^T$ について

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \operatorname{rot} \boldsymbol{f} := \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

と定義することもある。これは 3 次元ベクトル場 $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ が

$$\widetilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{r}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), 0)^T$$

のように本質的に 2 次元である場合に

$$\nabla \times \widetilde{\boldsymbol{f}} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 & \boldsymbol{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 & \boldsymbol{e}_2 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{e}_3 = \left(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^T$$

となることから来ているものであろう。

なお、スカラー場 ψ に対して

$$\operatorname{rot} \psi := \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^T$$

と定めることもある (このとき ψ をベクトル場 $\operatorname{rot} \psi$ の流れ関数 (**stream function**) であるという)。

結局、3 次元以外で rot が出て来たら、その話をしている人がどういう意味で用いているか、よくよく注意すべきである。

1.3.5 ラプラシアン

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上定義された C^2-級の関数 $f \colon \Omega \to \mathbf{R}$ に対して

$$\triangle f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

と定義し、$\triangle f$ を f のラプラシアン (**Laplacian**) と呼ぶ。
$\triangle f \equiv 0$ をみたす f を調和関数 (harmonic function) とよぶ。
$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された C^2-級のベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ に対して

$$\triangle \boldsymbol{f} := (\triangle f_1, \cdots, \triangle f_n)^T$$

とおき、$\boldsymbol{f}$ の Laplacian と呼ぶ。

余談 **1.3.1** (記号の話) すぐ後で示すように、$\triangle f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f)$ であるから、$\triangle$ を ∇^2 で表すことがある (特に工学系の本ではそうしてあることが多い)。 ■

1.3.6 微分演算子の公式

微分演算子を二つ続けると何がおこるか?

命題 1.3.1 (ベクトル場の微分演算子) $\boldsymbol{f}$ は $\mathbf{R}^3$ 上の C^2 級のベクトル場、f は $\mathbf{R}^3$ 上の C^2-級のスカラー場とする。

(1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \triangle f$. いいかえると $\nabla \cdot (\nabla f) = \triangle f$.

(2) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$. いいかえると $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.

(3) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f}) = 0$. いいかえると $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) = 0$.

(4) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) - \triangle \boldsymbol{f}$. いいかえると $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) - \triangle \boldsymbol{f}$.

証明　(演習問題とする。必修!) (1), (2), (3) については是非とも自分の手で計算して確かめてみること (定義を覚えるのと、(2), (3) の理由を納得するのが大事である。) ■
なお (1) は一般の次元で成立する。(4) の応用としては、以下に述べる例 1.3.2 が有名である。

問　上の命題 1.3.1 を証明せよ。

問　任意の C^1-級ベクトル場 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

が成り立つことを示せ。

1.3.7 例

数学を深く理解するためには、その良い応用例を学ぶことが非常に役に立つ。その意味で (遠回りのように思えるかも知れないが) 電磁気学や流体力学における例を物理学のテキストで学ぶことを強く奨めたい[6]。
簡単で典型的な例 (ただし偏微分方程式関係に限られる) をいくつか

[6] 立場の違いはあれ、空間概念を突き詰めて考えている点では、現代でも数学と物理学は近い関係を持っているはずである。

「応用解析 II 講義ノート」
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/ouyoukaiseki2/pde2004-long.pdf
に載せてある。以下いくつか手短に (結果のみ) 紹介する。

例 1.3.2 (Maxwell の方程式 (1873), 電磁波の予言) 真空中では、電場 $\boldsymbol{E}$, 磁場 $\boldsymbol{B}$, 電荷密度 ρ, 電流密度 $\boldsymbol{j}$ は Maxwell の方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad c^2\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

を満たす[7] (c は光速, ε_0 は真空の誘電率[8]である)。

特に電荷、電流密度が存在しない ($\rho\equiv 0$, $\boldsymbol{j}\equiv\boldsymbol{0}$) とき、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad c^2\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

であるから、命題 1.3.1 の (4) を使って、

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(-\nabla\times\boldsymbol{E})\\&=\triangle\boldsymbol{E}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})=\triangle\boldsymbol{E}-\boldsymbol{0}\\&=\triangle\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{1}{c^2}\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=-\frac{1}{c^2}\nabla\times\left(c^2\nabla\times\boldsymbol{B}\right)=-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}\\&=\triangle\boldsymbol{B}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})=\triangle\boldsymbol{B}-\boldsymbol{0}\\&=\triangle\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

すなわち $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ ともに速さ c の波動方程式を満たす。Maxwell (1831–1879) はこの事実を知って、真空中を伝播する電磁波の存在を予言した (1864)。それに従い 1887 年、Hertz (Heinrich Rudolph Hertz, 1857–1894) が実験で発生と検知に成功した。その伝播速度が光速度とよく一致することから、光も一種の電磁波と予想された (光の電磁波説)。 ■

例 1.3.3 (Fourier の熱伝導の法則, 熱伝導方程式) 「熱の流れの速度は温度勾配に比例する。」という法則が、Fourier (Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1768–1830, フランス) によって発見された。温度を場所の関数 (スカラー場) u とするとき、熱流の速度は $\nabla u=\operatorname{grad}u$ に比例する、ということである。時間変化を表す方程式 (熱伝導方程式) は、熱量の保存則から (残念ながら詳細は省略するが)

$$C\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)$$

となる (C は熱容量、k は Fourier の法則に現れる比例定数)。特に C や k が定数である場合には、公式 $\operatorname{div}(\operatorname{grad})=\triangle$ より

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\triangle u,\quad \kappa:=\frac{k}{C}$$

となる (普通数学で熱伝導方程式というときはこちらの方程式を指す)。 ■

[7] Maxwell は文章で表現したという。はじめてこの微分方程式の形に書き下したのは Heaviside である。

[8] ちなみに、MKS 単位系では $\varepsilon_0=\dfrac{10^7}{4\pi c^2}\fallingdotseq 8.854\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$.

この例も以下の二つの例も発散定理の説明の後に置く方が適当かも知れない。

例 **1.3.4** (流体の非圧縮性の条件) 非圧縮性流体の速度 (ベクトル) 場を $\boldsymbol{v}$ とするとき、$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ が成り立つ (流体の質量保存を表す)。 ■

例 **1.3.5** (静電場の **Gauss** の法則) (準備中 — 非常に重要な例なのでぜひ書きたい。とりあえずファインマン他 [15] を参考書としてあげておく。)

第2章　線積分

2.1　曲線の弧長と線要素

前口上

ベクトル場の接線線積分が最重要な目標であるが、一応その前に線要素に関する線積分を説明しておく。時間的余裕がない場合はここを省略しても大きな問題は生じない。

区分的に C^1-級の曲線 $C:\ \boldsymbol{r}=\varphi(t)\ (t\in[a,b])$ の長さ (弧長) L は

$$L=\int_a^b \|\varphi'(t)\|\,dt,\quad \|\varphi'(t)\|=\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i'(t)^2\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

である[1]。

弧長はパラメーターの取り方によらないことが証明できる。

さて、$t=a$ から $t=t$ までの弧長 $s=\sigma(t)\ (t\in[a,b])$ は

$$s=\sigma(t)=\int_a^t \|\varphi'(r)\|\,dr$$

なので

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d\sigma}{dt}=\|\varphi'(t)\|\,.$$

これから $\sigma(t)$ は、t の連続かつ区分的に C^1-級の関数であることが分かる。

曲線 C は正則、すなわち任意の $t\in[a,b]$ に対して $\varphi'(t)\neq 0$ と仮定しよう。すると

$$\frac{d\sigma}{dt}>0\quad (t\in[a,b]).$$

ゆえに逆関数 $t=\tau(s)$ が存在し[2]、それも連続かつ区分的 C^1-級となる。$\psi:=\varphi\circ\tau$, つまり $\psi(s):=\varphi(\tau(s))\ (s\in[0,L])$ とおいて、$\boldsymbol{r}=\varphi(t)$ の代わりに $\boldsymbol{r}=\psi(s)$ を曲線 C のパラメーター付けとして採用できる。s を弧長パラメーターと呼ぶ。

C の像 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}=\psi(s),\ s\in[0,L]\}$ 上で定義された関数 f の弧長に関する線積分を

$$\int_C f\,ds:=\int_0^L f(\psi(s))\,ds \tag{2.2}$$

[1]もっと一般的に定義することもできる。定義域である区間 $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{t_j\}_{j=0}^N$ に対して、$L_\Delta:=\sum_{j=1}^N\|\boldsymbol{\varphi}(t_j)-\boldsymbol{\varphi}(t_{j-1})\|$ とおき、$|\Delta|\to 0$ のときに L_Δ の極限値 L が存在するとき、C は長さを持つ (rectifiable) 曲線であるといい、L を C の長さという。φ が区分的に C^1-級の場合はこの (2.1) が成立し、この場合で実用上十分一般的と考えられるので、解析概論 II では、とりあえずこの (2.1) を曲線の長さの定義と考えることにする。

[2]σ, τ はそれぞれローマ字の s, t に対応するギリシア文字である。

で定義する。変数変換の公式を用いると

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|\,dt \tag{2.3}$$

であることがわかる。こちらを定義と考えても良い。

(2.3) の場合、

$$ds := \|\varphi'(t)\|\,dt = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}\,dt$$

と考え、これを曲線 C の線要素 (線素) とよぶ。線要素を $d\gamma$ と書く流儀もある。

2.2 (接線) 線積分の定義と基本的な性質

伝統的なベクトル解析でもっとも活躍する線積分は、ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の曲線 C 上の接線線積分 (接線要素に関する線積分)

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dr}$$

である。この講義では単に線積分と言ったら、この線積分のことを指す。

これは現代の幾何学においては、1 次 (外) 微分形式

$$\omega = f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n$$

の曲線 C 上での線積分

$$\int_C \omega = \int_C f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n$$

として表現されることが多い。形式的になってしまうが、暗記術としては[3]$\boldsymbol{dr} = (dx_1, \cdots, dx_n)^T$ とみなすのがよい。すると

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dr} = \int_C \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \int_C f_1dx_1 + \cdots + f_ndx_n$$

となってつじつまがあう (?)。

2.2.1 例

(少々乱暴かもしれないが定義の前に例を紹介する。)

物理からの例 (力の場がする仕事)

(図が必要である。板書はするが...)

[3] d某 は「某」の微小変位を表す、と考える (古いタイプ？) 人には、これこそが本質かもしれない。

方向と大きさが一定の力 (大きさを f とする) で、その力の方向に物体を距離 r だけ移動させるとき、その力がした仕事 W は

$$W = fr$$

となるのであった。

一定の力 $\boldsymbol{f}$ を作用させて、物体をまっすぐ $\boldsymbol{r}$ だけ移動させたとき、その力のした仕事は

$$W = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{r}.$$

力の場 $\boldsymbol{f}$ が与えられているとき、曲線 C に沿って物体を動かした場合、その力がした仕事 W は近似的に

$$W \fallingdotseq \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_j) \cdot \boldsymbol{\Delta r}_j, \quad \boldsymbol{\Delta r}_j := \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_{j-1}.$$

ただし $\boldsymbol{r}_j$ は、$[a,b]$ の十分細かい分割 $\Delta = \{t_j\}_{j=0}^{N}$ に対して $\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{\varphi}(t_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$ で定義される。

そこで

$$W = \int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \boldsymbol{\Delta r}_i$$

とみなすことができる。曲線 C が区分的に C^1-級である場合には、容易に

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\, dt$$

に等しいことが示せる。 ■

複素関数論からの例

Ω を複素平面 $\mathbf{C}$ の開集合で、C を Ω 内の長さを持つ曲線とするとき、連続関数 $f : \Omega \to \mathbf{C}$ の曲線 C 上の線積分を

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

(ただし $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{t_j\}_{j=1}^{N}$ に対して、$z_j = \varphi(t_j)$ とおいた。)

のように定義するのであった。やや形式的な計算だが、

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C (u + iv)(dx + i\, dy) = \int_C u\, dx - v\, dy + i \int_C v\, dx + u\, dy$$

となって、この線積分が、ここで扱っているベクトル場の接線線積分の特別な場合であることがわかる。 ■

2.2.2 定義

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された n 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ が、$\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n)^T$ であり、曲線 C が Ω 内の C^1-級の曲線 $\boldsymbol{r} = \varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))^T$ $(t \in [a,b])$ であるとき、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} := \int_a^b \boldsymbol{f}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = \int_a^b \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\,dt = \int_a^b [f_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \cdots + f_n(\varphi(t))\varphi_n'(t)]\,dt$$

とおき、曲線 C 上のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の (接線) 線積分とよぶ。

(2005 年度に配布したプリントでは、上の定義式に誤植があった。)

例 2.2.1 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)^T$ とするとき、次の各曲線 C_j に対して、$\displaystyle\int_{C_j} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

(1) C_1: $\boldsymbol{r} = (t, t^2, t^3)^T$ $(t \in [0,1])$

(2) C_2: $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ を順に結んでできる折線

解 (1) $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, t^2, t^3)$ とおく。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = (t^2+t^3, t^3+t, t+t^2)^T$, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (1, 2t, 3t^2)^T$ であるから、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t) &= (t^2+t^3)\cdot 1 + (t^3+t)\cdot 2t + (t+t^2)\cdot 3t^2 \\ &= t^2+t^3+2t^4+2t^2+3t^3+3t^4 = 3t^2+4t^3+5t^4.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (3t^2+4t^3+5t^4)dt = 3\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{4} + 5\cdot\frac{1}{5} = 3.$$

(2) $(0,0,0)$ から $(1,0,0)$ にいたる線分を γ_1, $(1,0,0)$ から $(1,1,0)$ にいたる線分を γ_2, $(1,1,0)$ から $(1,1,1)$ にいたる線分を γ_3 とおくと、$C_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ となる。ゆえに

$$\int_{C_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\gamma_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\gamma_3} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

γ_1 は $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t,0,0)^T$ $(t \in [0,1])$ とパラメーターづけできる。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = (0,t,t)^T$, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (1,0,0)^T$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t) = 0$ であるから、$\displaystyle\int_{\gamma_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$.

γ_2 は $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1,t,0)^T$ $(t \in [0,1])$ とパラメーターづけできる。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = (t,1,1+t)^T$, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (0,1,0)^T$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t) = 1$ であるから、$\displaystyle\int_{\gamma_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 1$.

γ_3 は $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1,1,t)^T$ $(t \in [0,1])$ とパラメーターづけできる。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = (1+t, t+1, 2)^T$, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (0,0,1)^T$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t) = 2$ であるから、$\displaystyle\int_{\gamma_3} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 2$.

ゆえに $\displaystyle\int_{C_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0+1+2 = 3$. ■

注意 **2.2.1** (記号の色々な流儀 — 他の本を読むときのために) 外微分形式を用いた表現とは対照的に、ベクトル解析のベクトル場を用いた記法には、数多くの流儀がある[4]。ここでは線積分を表す記号をいくつか紹介する。

$\boldsymbol{dr}$ の代わりに $\boldsymbol{ds}$ あるいは $\boldsymbol{dx}$ を用いて

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{ds},\quad \int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dx}$$

と書いたり、単位接ベクトル $\boldsymbol{t}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ を導入して線要素 ds に関する線積分

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$$

で表したり、内積の記号を変えて

$$\int_C (\boldsymbol{f},\boldsymbol{dr}),\quad \int_C (\boldsymbol{f}|\boldsymbol{dr})$$

のように書いたり、とにかく (あきれるくらい) 色々な記法がある。 ■

注意 **2.2.2** (覚えるのは大変？) 線積分が 3 つ出来てきたが、計算法については

$$\begin{aligned}
&\int_C f\,ds=\int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t))\frac{ds}{dt}\,dt,\quad \frac{ds}{dt}=\|\varphi'(t)\|\,,\\
&\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dr}=\int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt,\quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{\varphi}'(t),\\
&\int_C P\,dx+Q\,dy=\int_a^b\left[P(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+Q(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right]dt\quad (n=2\text{ の場合})
\end{aligned}$$

であるから、覚えるのに困難はないであろう。1 番目と他の 2 つは別物であるが、2 番目と 3 番目は見掛けが異なるだけで、本質的には同じものである。 ■

2.2.3 線積分の性質

次の命題は本質的に複素関数論の線積分で学んだはずである (証明も同じである)。

[4]筆者自身は、少なくとも線積分に関しては、微分形式を用いた記法の方が混乱がなくて明らかに優れていると思う (趣味の問題かもしれないが)。

命題 **2.2.1** (ベクトル場の接線線積分の性質) (乱暴だが仮定は省略する。曲線は区分的に C^1-級, ベクトル場は連続くらい。)

(1) 線積分の値は曲線の (向きを変えない) パラメーターの取り方によらない。

(2) $\displaystyle\int_C (\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_C \boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{r}.$

(3) $\displaystyle\int_C (\lambda\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{r} = \lambda\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}.$

(4) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}.$

(5) $\displaystyle\int_{-C} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}.$

(6) $\displaystyle\left|\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}\right| \le \int_C \|\boldsymbol{f}\|\, ds.$

((1) の証明はせめて付録には用意しておこう。)

注意 **2.2.3** 弧長要素に関する線積分 $\displaystyle\int_C f\, ds$ についても、ほぼ同様のことが成り立つが、(5) だけは

$$\int_{-C} f\, ds = \int_C f\, ds$$

となる。つまり弧長要素に関する線積分は向きによらない。 ■

2.3 線積分とポテンシャル

高校数学で習った積分 (1 次元の世界 $\mathbf{R}$ での積分) では原始関数が大活躍した。ベクトル場の接線線積分でそれに相当するものはポテンシャル[5]と呼ばれる。ポテンシャルはいつも存在するとは限らないが、存在するときは原始関数と同様のことが成り立つ。

ポテンシャルがいつ存在するか、存在するときはどうやって求められるかが山場である。

2.3.1 ポテンシャルの定義

与えられたベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\nabla F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x}\in\Omega)$$

をみたす関数 F を求めるという問題を考える。これが存在するとき、F を $\boldsymbol{f}$ のポテンシャル (potential) と呼ぶ。

[5] これは物理学用語のポテンシャル・エネルギーに由来する。この概念を初めて導入したのは Lagrange (1773) であるが、この言葉を初めて使ったのは Green (1828) であるという。

1 変数実数値関数の世界では、$F' = f$ をみたす F を f の原始関数と呼ぶのであった。

ところで、Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を C^1-級の関数とするとき、F の「導関数」は (実数値関数ではなく) F の勾配ベクトル場 $\nabla F\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ である。これは実数値関数ではないので

多変数では、実数値関数の原始関数は考えられない！

ということになる。結局、多変数の場合に 1 変数関数の原始関数に相当するのは、ベクトル場のポテンシャルであることが納得できるであろう。

ポテンシャルとは、多変数版原始関数である。

例 **2.3.1** (一様な重力場のポテンシャル)

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (g \text{ は定数})$$

とするとき

$$F(x_1, x_2, x_3) := -gx_3$$

は $\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす。つまり F は $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルである。 ■

例 **2.3.2** (一つの恒星の作る重力場のポテンシャル)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) := -\frac{GM}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\boldsymbol{r} \quad (M,\, G \text{ は定数},\, \boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})$$

とするとき

$$F(\boldsymbol{r}) := \frac{GM}{\|\boldsymbol{r}\|}$$

は $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルである (これを確かめるのは良い計算練習である)。 ■

注意 **2.3.1** (ポテンシャル — 物理学の用語法) 物理学では、力の場 $\boldsymbol{f}$ に対して

$$-\operatorname{grad} V = \boldsymbol{f}$$

となるような関数 V が存在するとき、$\boldsymbol{f}$ は保存力であるといい、V を $\boldsymbol{f}$ のポテンシャル・エネルギーと呼ぶ。これは上で定義したポテンシャルと符号のみ異なっているわけである。上の二つの例は物理学で良く知られた例である。 ■

注意 **2.3.2** (外微分形式の言葉では) 1 次外微分形式 $\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ に対して、$\omega = dF := \dfrac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial x_n}dx_n$ となる関数 F を ω のポテンシャルとよぶ。ポテンシャルの存在する ω を完全 (**exact**) であるという ■

2.3.2　ポテンシャルと線積分の関係

(1) ポテンシャルはいつも存在するとは限らない (1 次元との大きな相違点)。実際、C^1-級ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n)^T$ にポテンシャルが存在するならば

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

が成り立つ必要がある。特に 3 次元の場合は、この条件は

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \quad (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0})$$

と同値である。

(2) ポテンシャルが存在する場合、線積分はポテンシャルで計算できる。
すなわちベクトル場 $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルを F, 曲線 C の始点、終点をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とするとき、

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_C \nabla F \cdot \boldsymbol{dr} = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a}).$$

これはもちろん、1 次元の場合の

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

に対応している。

(3) ポテンシャルが存在する場合、それは線積分で求められる。すなわち、Ω から定点 $\boldsymbol{a}$ を任意に選び、各 $\boldsymbol{x}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ を始点、$\boldsymbol{x}$ を終点とする Ω 内の区分的 C^1-級曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取って、

$$F(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr}$$

とおくと、F は $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルになる ($\nabla F = \boldsymbol{f}$ が成り立つ)。これは 1 次元の場合の

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

に相当している。

例 2.3.3 (ポテンシャルを持たないベクトル場) ベクトル場

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

はポテンシャルを持たない。実際、もしもポテンシャル F が存在したとすると定義から

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2) = -x_2, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2) = x_1$$

となるが、これから

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = -1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$$

で、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} \neq \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$$

となり矛盾する。■

(1) の証明

$\boldsymbol{f}$ のポテンシャル F が存在したとする。$\boldsymbol{f}$ が C^1-級であるから、F は C^2-級である。

$$f_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

であるから、偏微分の順序交換をして

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).\blacksquare$$

(2) の証明

曲線 C のパラメーターづけを $\boldsymbol{r} = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ とすると、

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^n f_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(t))\varphi_i'(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\varphi(t))\,dt = [F(\varphi(t))]_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a}).\blacksquare\end{aligned}$$

(3) の証明は、ポテンシャルの存在条件を詳しく扱う次項にまわそう。

2.3.3 ポテンシャルの存在条件

次の非常に印象的な定理からはじめる。

定理 2.3.1 $\mathbf{R}^n$ の領域 (連結開集合) Ω と Ω 上の連続なベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ に対して、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャルが存在するためには、Ω 内の任意の区分的 C^1-級閉曲線 C に対して、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

が成り立つことが必要十分である。

証明　(必要性) $\boldsymbol{f}$ のポテンシャル F が存在すると仮定する。閉曲線 C のパラメーター付けを $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ とするとき、$\boldsymbol{\varphi}(\alpha) = \boldsymbol{\varphi}(\beta)$ に注意すると、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{\varphi}(\beta)) - F(\boldsymbol{\varphi}(\alpha)) = 0.$$

(十分性) Ω 内の任意の区分的 C^1-級閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ が成り立つと仮定する。Ω 内の任意の点 $\boldsymbol{a}$ を取って固定し、Ω 内の各点 $\boldsymbol{x}$ に対して、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ をそれぞれ始点、終点とする、Ω 内の区分的に C^1-級の曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取り[6]、

$$F(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

[6]命題 B.3.1 を見よ。

とおく。仮定から $F(\boldsymbol{x})$ は $C_{\boldsymbol{x}}$ の取り方によらずに定まる (いわゆる well-defined)。任意の $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して、$\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x})$ となることを示す[7]。曲線 γ_h を $\boldsymbol{\varphi}(t) := \boldsymbol{x} + th\boldsymbol{e_i}$ $(0 \leq t \leq 1)$ で定めると、これは $\boldsymbol{x}$ を始点、$\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i$ を終点とする線分である。$C_{\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i}$ として、$C_{\boldsymbol{x}} + \gamma_h$ が取れる。$\boldsymbol{\varphi}'(t) = h\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{e}_i = f_i$ であるから、

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) - F(\boldsymbol{x}) &= \int_{C_{\boldsymbol{x}}+\gamma_h} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} - \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_{\gamma_h} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} \\ &= \int_0^1 \boldsymbol{f}(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + th, x_{i+1}, \cdots, x_n) \cdot h\boldsymbol{e}_i \, dt \\ &= h \int_0^1 f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + th, x_{i+1}, \cdots, x_n) \, dt \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{F(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) - F(\boldsymbol{x})}{h} &= \int_0^1 f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + th, x_{i+1}, \cdots, x_n) \, dt \\ &\to \int_0^1 f_i(\boldsymbol{x}) \, dt = f_i(\boldsymbol{x}) \quad (h \to 0). \end{aligned}$$

これは $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x})$ を示している。ゆえに $\nabla F = \boldsymbol{f}$ で、F は $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルである。■

この定理は示唆に富み、面白いが、与えられたベクトル場 $\boldsymbol{f}$ がポテンシャルを持つことを示すには使いづらい[8]。

前節で $\mathbf{R}^n$ の領域におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}$ がポテンシャルを持つには

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

が必要であることを示したが、実は定義域の領域に「穴」がなければこれは十分条件である。実際、次の定理が成り立つ。

定理 2.3.2 (単連結領域では渦無しベクトル場はポテンシャルを持つ) Ω が $\mathbf{R}^n$ の単連結領域、$\boldsymbol{f} \colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ が C^1-級のベクトル場で、

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.4}$$

をみたすとき、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャルが存在する。特に $\mathbf{R}^3$ の単連結領域における C^1-級のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャルが存在する。

この定理の証明は付録で与えることにするが、一つの証明のあらすじを与えておく。

---

[7] 授業などでは $n = 2$ の場合に、積分路を図示して、$\partial F/\partial x = f_1$ を示すとよい。このノートにも図を入れること。

[8] ポテンシャルが存在しないことを示すには、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} \neq 0$ をみたす閉曲線 C を一つでも見つければよいので、まあまあ実際的である。

証明のあらすじ　Ω 全体で $\partial f_i/\partial x_j = \partial f_j/\partial x_i$ が成り立つと仮定すると、任意の曲線 C を連続的に変形させたとき、$\boldsymbol{f}$ の C にそっての線積分の値は変らないことが示せる。単連結性の仮定から、任意の閉曲線は定数曲線 (像が 1 点) に連続的に変形できるので、閉曲線上の線積分の値は 0 である。ゆえに $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルが存在する。 ■

順序が逆になったが、単連結性の定義は次のようなものである。

定義 2.3.1 (単連結) Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域 (連結開集合) とする。Ω が単連結 (**simply connected**) であるとは、Ω 内の任意の閉曲線が定数閉曲線に Ω 内で連続可変であることを言う。

(本当は「連続可変」の定義を述べていないので、このままでは定義とは言いかねる。詳しくは付録を見よ。)

例 2.3.4 (単連結な領域、単連結でない領域) 単連結な領域の例として、全空間 $\mathbf{R}^n$, 開球 $B(a;R)$, 凸領域、星型領域、3 次元空間での 1 点の補集合 $\mathbf{R}^3 \setminus \{a\}$, 平面から半直線を除いた領域例えば $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0); x \leq 0\}$ などがある。

単連結でない領域の例としては、2 次元空間での 1 点の補集合 $\mathbf{R}^2 \setminus \{a\}$, $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$ (ℓ は両方向に無限にのびた直線) などがある。 ■

余談 2.3.1 (Poincaré の定理とどっちが強い) (幾何学で外微分形式を学んだ人に) 定理の条件 (2.4) は、1 次微分形式

$$\omega := f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n$$

が閉形式であることを意味しているので、定理は「単連結領域では、任意の 1 次閉微分形式は完全である」と書き換えられる。Poincaré の定理「星型領域では、任意の次数の閉微分形式は完全である」は有名であるが[9]、星型ならば単連結であり逆は真でないから、ベクトル場のポテンシャルの存在については (1 次微分形式については) 上の定理の方が (仮定が弱いだけ) 強いわけである[10]。 ■

例 2.3.5 (ポテンシャルの計算) $\mathbf{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = (y+z, z+x, x+y)^T$ はポテンシャルを持つことを示し、実際にポテンシャルを求めよ。

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の定義域 $\mathbf{R}^3$ は単連結領域で、

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{f} &= \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^T \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}(x+y) - \dfrac{\partial}{\partial z}(z+x) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(y+z) - \dfrac{\partial}{\partial x}(x+y) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(z+x) - \dfrac{\partial}{\partial y}(y+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

[9] Jules Henri Poincaré (1854–1912, フランスの Nancy に生まれ、Paris にて没する) は 19 世紀から 20 世紀にかけて活躍した (D.Hilbert と双璧をなす) 大数学者である。

[10] ときどき定理 2.3.2 に言及せず、Poincaré の定理しか書いていない数学書がある。筆者は学生時代、この余談に書いたことを悟るまで、ずいぶんと落ち着かない気分にさせられた覚えがある。

が成り立つので、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。原点から $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ に向かう線分 $C_{\boldsymbol{x}}$ は

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (tx, ty, tz)^T \quad (t \in [0, 1])$$

とパラメーターづけができる。ポテンシャルとして

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}) &:= \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} ty + tz \\ tz + tx \\ tx + ty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t\,[x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)]\, dt \\ &= xy + yz + zx \end{aligned}$$

が得られる。$\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たすことを確かめるのは易しい (でもサボらずにやること)。 ■

例 **2.3.6** (単連結でない領域では、ポテンシャルを持たない渦無しベクトル場がある) $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ で定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T$$

は $\nabla \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ を満たすが、ポテンシャルを持たない。実際、単位円周上を正の向き (進行方向の左手に円の内部を見る向き) に一周する閉曲線を C とするとき、

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 2\pi \neq 0$$

であることが示せるから (練習だと思ってぜひとも確認すること)、もしポテンシャルが存在するならば、定理 2.3.1 に矛盾する。

この例は多くのテキストで紹介されているものだが、実は複素関数論で有名な等式

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (i \text{ は虚数単位})$$

の両辺の虚部を取ったものに他ならない。こちらの言葉でいうと、関数 $z \mapsto 1/z$ の原始関数が存在しないということになる。なお、よく知られているように例えば $\mathbf{C} \setminus \{x; x \leq 0\}$ という単連結領域では原始関数が存在する ($\log z$ の任意の分枝が原始関数になる)。それに対応して、$\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leq 0\}$ では $\boldsymbol{f}$ もポテンシャルを持つ。 ■

問　$\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leq 0\}$ における $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルを求めよ。

2.4　Green の定理

— 閉曲線上の線積分は重積分に変換できる —

微積分の基本定理の一つの拡張であるといえる、Green の定理を紹介する。色々な表現ができるが、(2.6) の形で覚えておくのがよいであろう[11]。

Green の定理については次のように述べられていることが多い。

定理 2.4.1 (Green の定理あるいは Cauchy-Green の定理) $\mathbf{R}^2$ 内の区分的 C^1-級 Jordan 閉曲線 C の囲む領域を D とする。C の向きは、C 上の各点で進行方向の左手に D を見るようになっているとする。このとき D の閉包を含む開集合 Ω 上で定義された C^1-級のベクトル場 $\boldsymbol{f} = (P, Q)^T$ に対して次式がなりたつ。

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} = \iint_D \operatorname{rot} \boldsymbol{f}\, dx\, dy, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{f} := \det(\nabla\ \boldsymbol{f}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q \end{pmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{2.5}$$

同じことを微分形式で表現すると次のようになる。

$$\int_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{2.6}$$

余談 2.4.1 (定理の名称) Green の定理は **Gauss-Green の定理**と呼ばれたり、**Green-Stokes の定理**と呼ばれたりする。その辺の事情を説明しよう。

(後で紹介する) Gauss の発散定理の 2 次元版

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, dx\, dy$$

で $\boldsymbol{f} = (Q, -P)^T$ とおいて、$\boldsymbol{n}\, ds = (dy, -dx)^T$ に注意すると、(2.6) が得られる。

一方、(2.5) は後で紹介する Stokes の定理の 2 次元版と考えることもできる。

つまり 2 次元空間では、Gauss の定理も Stokes の定理も、Green の定理という一つの公式につぶれてしまう、ということである。あるいは Green の定理という、比較的証明の簡単な基本的定理が、高次元空間では別の形の拡張 (Gauss の定理, Stokes の定理) を許す、という見方もできる。 ■

ところがこの命題は、筆者にとっては以下の点から少々「気持が悪い」。

1. 「囲む」の意味が曖昧である。Jordan の曲線定理を仮定すればよいが、そのような (授業では到底証明が不可能な) 大定理を持ち出すのは心苦しい。

2. 「左」というのも誤解[12]を生じかねない表現である (おそらく授業で上の定理だけ見せた場合、まず 99% の学生は誤解するのではないだろうか)。

ここでは次の形の定理を証明することで満足 (我慢？) することにする。

[11] ベクトル場の接線線積分でなく、1 次微分形式の線積分の形で述べてあり、最初の方針から逸脱しているが、それで減点をしてもこれが良いと信じる。

[12] 右と左の数学的な定義を読んだり聞いたりしたことがあるだろうか。物理法則は左右非対称なので (ヤンとリーの発見した「パリティ対称性の破れ」)、物理学としては右と左は定義可能であるようだが、数学では「普通の」意味と一致するように右と左を定義することはできない。数学書に「右」と「左」が出て来ることはあるが、本当は x 軸と y 軸の「位置関係」と「同じ」というだけのことであろう。

定理 2.4.2 (x 軸 y 軸両方向に縦線集合である領域での Green の定理) $\mathbf{R}^2$ の領域 D が

$$D = \{(x,y); x \in (a,b),\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} = \{(x,y); y \in (c,d),\ \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$$

と表されるとする。ここで φ_j は $[a,b]$ 上定義された区分的に C^1-級の関数、ψ_j は $[c,d]$ 上定義された区分的に C^1-級の関数で、

$$\forall x \in (a,b) \quad \varphi_1(x) < \varphi_2(x), \quad \forall y \in (c,d) \quad \psi_1(y) < \psi_2(y)$$

を満たすとする。このとき、D の閉包で定義された C^1-級の実数値関数 P, Q に対して

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

が成り立つ。ただし C は次で定義される C_1, C_2, C_3, C_4 を結んで出来る閉曲線とする。

$$\begin{aligned} C_1 &: \boldsymbol{r} = (t, \varphi_1(t))^T \quad (t \in [a,b]), & C_2 &: \boldsymbol{r} = (b,t)^T \quad (t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]), \\ -C_3 &: \boldsymbol{r} = (t, \varphi_2(t))^T \quad (t \in [a,b]), & -C_4 &: \boldsymbol{r} = (a,t)^T \quad (t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]). \end{aligned}$$

証明　D が y 軸の方向に縦線集合であることから、

$$\begin{aligned} \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy\right) dx \\ &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x))dx \\ &= \int_{C_1} P(x,y)\ dx - \int_{-C_3} P(x,y)\ dx \\ &= \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} P(x,y)\ dx = \int_C P(x,y)\ dx. \end{aligned}$$

ただし C_2, C_4 では $dx/dt = 0$ であることから、$\displaystyle\int_{C_2} P\ dx = \int_{C_4} P\ dx = 0$ となることを用いた。

同様にして D が x 軸の方向に縦線集合であることから、

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\ dx\,dy = \int_C Q(x,y)\ dy$$

が得られる。以上得られた二つの等式を加えればよい。■

一工夫すると、一方向だけに縦線集合であるような領域に対しても成り立つことが示せる (付録の定理 A.1.1)。

いずれにせよ、この定理は仮定が強すぎるので「一般性が低い」と言われても仕方がないが、以下に解説する積分範囲の分割のテクニック (多分複素関数論でおなじみ) を併用すれば、実際に (具体的に) 与えられた領域での積分に適用するのに「かなり使える」。

例 **2.4.1** (積分範囲を分割して定理が使える場合に帰着する例) D を円環領域 $\{(x,y); 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ とすると、どちらの定理の仮定も満たさないが、

$$D_1 := \{(x,y) \in D; x > 0,\ y > 0\}, \quad D_2 := \{(x,y) \in D; x < 0,\ y > 0\},$$
$$D_3 := \{(x,y) \in D; x < 0,\ y < 0\}, \quad D_4 := \{(x,y) \in D; x > 0,\ y > 0\}$$

とおくと、D_j $(j = 1,2,3,4)$ は定理 2.4.2 の仮定を満たす[13]。

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup \text{零集合}.$$

また逆向きの曲線の対を (線積分に影響なしとして) 除くことにすれば

$$C = \partial D_1 + \partial D_2 + \partial D_3 + \partial D_4,$$
∂D_j は D_j の周を進行方向の左手に D_j の内部を見る向きに一周する閉曲線

であるから、

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy &= \sum_{j=1}^{4} \iint_{D_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial D_j} P dx + Q dy \\ &= \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy. \blacksquare \end{aligned}$$

自分で好きなように選んだ区分的 C^1 級 Jordan 閉曲線で囲まれた領域 D の図をながめて、それが縦線集合であるような領域に分解できるか、しばらく紙とペンを持って試してみることを奨める。多分「実用上十分」という感触が持てると思う。

問　ある本で、ほぼ定理 2.4.2 に相当する命題 (両方向に縦線集合であるような領域について...) だけを証明して、後は領域を分解することでいつもうまく行く、と説明していたが、そこまで言ってしまうと嘘になる。反例を示せ。

余談 **2.4.2** ... しかし数学者の普通の感覚からすると、縦線集合である領域の有限和に分解できるような領域というのは、いくら使えるものではあっても「美しくない」ので、例えば例 2.4.1 にも直接適用できるような定理を述べようと努力してしまうようである (ある種の職業病かもしれない)。... しかし筆者が読んだテキストで、定理を厳密に述べて証明することに成功しているものは少ないようである。結構「ずる」をしている本が多い (そうするくらいならば、変に一般化しなければよいと思うのだが...)。誠実に立ち向かっていると感じられた本として、杉浦 [9] をあげておく (「また杉浦先生の本か」という感じがするが)。この本では Green の定理を 3 バージョン提示している。最初の二つがこの文書の定理 2.4.2, A.1.1 である。興味が出て来た人は最後の一つを読んでみるとよい。 ■

例 **2.4.2** (線積分で領域の面積を計算する) 区分的 C^1-級の閉曲線 C で囲まれる有界領域を D とすると、

$$\int_C x\,dy = -\int_C y\,dx = \frac{1}{2} \int_C x\,dy - y\,dx = \mu(D)$$

である ($\mu(D)$ は D の面積を表す記号であった) 。実際に

[13] 本当は二つに分解するだけで定理 A.1.1 が適用できる。

$$P(x,y)=0,\ Q(x,y)=x \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1,$$

$$P(x,y)=-y,\ Q(x,y)=0 \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1,$$

$$P(x,y)=-\frac{1}{2}y,\ Q(x,y)=\frac{1}{2}x \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$$

であるから、Green の定理によれば $\displaystyle\int_C x\,dy$, $\displaystyle-\int_C y\,dx$, $\displaystyle\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx$ のいずれも

$$\iint_D 1\,dxdy=\mu(D)$$

に等しい。 ■

例 2.4.3 (Cauchy の積分定理) 複素平面上の区分的 C^1-級の Jordan 閉曲線 C の囲む領域を D とし、$\overline{D}$ の開近傍で定義された C^1-級の複素数値関数 f があるとき、$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbf{R},\ u(x,y)\in\mathbf{R},\ v(x,y)\in\mathbf{R})$ とすると、

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u(x,y)+iv(x,y))(dx+i\,dy)\\ &= \int_C u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_C v(x,y)dx+u(x,y)dy\\ &= \iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy+i\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy.\end{aligned}$$

もしも f が正則関数であれば、Cauchy-Riemann の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立つので、

$$\int_C f(z)\,dz=\iint_D 0\,dx\,dy+i\iint_D 0\,dx\,dy=0.\blacksquare$$

例 2.4.4 (2 次元単連結領域で渦無しベクトル場はポテンシャルを持つ) 2 次元領域 Ω におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}=\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}=0$$

を満たす場合、領域 Ω に穴がないので、Ω 内の任意の閉曲線 C の囲む領域 D について $\overline{D}\subset\Omega$ となるため、Green の定理が使えて

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dr}=\iint_D\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D 0\,dx\,dy=0$$

が成り立つ。定理 2.3.1 より、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。すなわち、定理 2.3.2 の 2 次元版が成り立つことが分かる (厳密な証明とはいいづらい — なぜだか分かりますか？[14])。 ■

[14] C は Jordan 曲線とは限らないので、C が囲む領域というものがはっきりしない。

付 録A　本文で略した事実の証明

A.1　一方向について縦線集合である領域における Green の定理

定理 A.1.1 (y 軸方向に縦線集合である領域での Green の定理) $\mathbf{R}^2$ の領域 D が

$$D = \{(x, y); x \in (a, b),\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$$

と表されるとする。ここで φ_j は $[a, b]$ 上定義された区分的に C^1-級の関数で、

$$\forall x \in (a, b) \quad \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$$

を満たすとする。このとき、D の閉包で定義された C^1-級の実数値関数 P, Q に対して

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

が成り立つ。ただし C は次で定義される C_1, C_2, C_3, C_4 を結んで出来る閉曲線とする。

$$C_1 : \boldsymbol{r} = (t, \varphi_1(t))^T \quad (t \in [a, b]), \qquad C_2 : \boldsymbol{r} = (b, t)^T \quad (t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]),$$
$$-C_3 : \boldsymbol{r} = (t, \varphi_2(t))^T \quad (t \in [a, b]), \qquad -C_4 : \boldsymbol{r} = (a, t)^T \quad (t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]).$$

証明　以下の内容は杉浦 [9] による。まず定理 2.4.2 の証明と同様にして、

$$\iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C P(x, y)\ dx$$

が得られる。

今

$$F(x, u, v) := \int_u^v Q(x, y)\ dy$$

とおくと、

$$F_x(x, u, v) = \int_u^v \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\ dy, \quad F_u(x, u, v) = -Q(x, u), \quad F_v(x, u, v) = Q(x, v)$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} Q(x,y)\,dy\right)\\
&\quad=\frac{d}{dx}\left(F(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))\right)\\
&\quad=F_x(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))+F_u(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))\varphi_1'(x)+F_v(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))\varphi_2'(x)\\
&\quad=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dy-Q(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x)+Q(x,\varphi_2(x))\varphi_2'(x).
\end{aligned}$$

移項して、x について $[a,b]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dy\right)dx\\
&\quad=\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}Q(x,y)\,dy\right]_{x=a}^{x=b}+\int_a^b Q(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x)\,dx-\int_a^b Q(x,\varphi_2(x))\varphi_2'(x)\,dx\\
&\quad=\int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)}Q(b,y)\,dy-\int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)}Q(a,y)\,dy+\int_a^b Q(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x)\,dx\\
&\quad-\int_a^b Q(x,\varphi_2(x))\varphi_2'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

この右辺が

$$\int_{C_2}Q(x,y)\,dy+\int_{C_4}Q(x,y)\,dy+\int_{C_1}Q(x,y)\,dy+\int_{C_3}Q(x,y)\,dy=\int_C Q(x,y)\,dy$$

に等しいことを示せば証明は完了する。

曲線 C_2 は $\boldsymbol{r}=(b,t)^T$, $t\in[\varphi_1(b),\varphi_2(b)]$ と表せるので、$dx/dt=0$, $dy/dt=1$ で、

$$\int_{C_2}Q(x,y)\,dy=\int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)}Q(b,t)\cdot 1\,dt=\int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)}Q(b,y)\,dy.$$

同様にして

$$\int_{C_4}Q(x,y)\,dy=-\int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)}Q(a,y)\,dy.$$

一方、曲線 C_1 は $\boldsymbol{r}=(t,\varphi_1(t))^T$, $t\in[a,b]$ と表せるので、$dx/dt=1$, $dy/dt=\varphi'(t)$ で、

$$\int_{C_1}Q(x,y)\,dy=\int_a^b Q(t,\varphi_1(t))\cdot\varphi_1'(t)\,dt=\int_a^b Q(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x)\,dx.$$

同様にして

$$\int_{C_2}Q(x,y)\,dy=-\int_a^b Q(x,\varphi_2(x))\varphi_2'(x)\,dx$$

が得られる。以上の 4 つの式を辺々加えれば求める等式を得る。 ■

余談 **A.1.1 (Green の定理の仮定を緩める)** 上では $P,\,Q\in C^1$ としたが、$Q_x,\,P_y$ が存在して Q_x-P_y が連続とするだけでよい (**Goursat-Bochner の定理**)。これは一松先生の本には大抵書いてある。 ■